Solución Práctico 2

1.1 a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

b. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1.2 Se pueden hacer las operaciones $AC + D$, $E(A + B)$ y EAC que tienen dimensiones 4×2, 5×5 y 5×2 respectivamente

1.3

$$AB = \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ 0 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}, BC = \begin{pmatrix} 1 & 15 & 3 \\ 5 & 9 & 9 \end{pmatrix}, B+B^t = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, AA^t = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 3 \\ -3 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{A}^t A = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, (AB)C = \begin{pmatrix} 3 & 45 & 9 \\ 9 & 3 & 15 \\ 6 & 24 & 12 \end{pmatrix}, DE-ED = \begin{pmatrix} 11 & -6 & -3 \\ 22 & -12 & -6 \\ 11 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

1.5 a. Verdadera. La idea es ver que para calcular los elementos de la primera columna de AB se usan las filas de A y la primera columna de B. Para la tercera columna de AB se usan las filas de A y la tercera columna de B que es igual a la primera.

b. Falsa.

c. Verdadera.

d. 1) Falsa.
2) Falsa.
3) Falsa.

e. Falsa.

f. Falsa.

2.2 a) Sean $A = ((a_{ij}))$ y $B = ((b_{ij}))$ matrices cuadradas de $n \times n$. Entonces $A+B = ((a_{ij}+b_{ij}))$ y $\alpha A = ((\alpha a_{ij}))$ son matrices de $n \times n$. Podemos calcular sus trazas:

$$tr(A + B) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + b_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = tr(A) + tr(B)$$

$$tr(\alpha A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha a_{ii} = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = tr(A)$$

Por otro lado, es claro que $tr(A) = tr(A^t)$ pues trasponer una matriz preserva la diagonal.

b. Supongamos por absurdo que existen A y B matrices cuadradas de $n \times n$ tales que $AB - BA = I_n$. Se debe cumplir entonces que

$$tr(AB - BA) = tr(I_n)$$

Pero $tr(I_n) = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$ y usando las propiedades de la parte a), sabemos que

$$tr(AB - BA) = tr(AB) + tr((-1)BA) = tr(AB) - tr(BA)$$

Por último, sabemos que $tr(AB) = tr(BA)$ y concluimos que

$$0 = tr(AB - BA) = n$$

Lo cual es absurdo pues $n \geq 1$.

c. Sea A una matriz de $n \times n$. Recordar que si tenemos dos matrices A y B conformables, entonces el producto AB es una matriz $C = ((\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}))$. Usando esta definición y teniendo en cuenta que el coeficiente de la fila i columna j de A^t es a_{ji} , tenemos que $AA^t = ((\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk}))$. Entonces

$$tr(AA^t) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{ik}) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2) \geq 0$$

Pues los sumandos son todos no negativos. Además, para que la suma sea 0, todos los términos deben ser nulos. Es decir $tr(AA^t) = 0$ si y solo si $a_{ik} = 0$ para todos i, k si y solo si $A = 0_n$.

3.2 Sea $\theta \in [0, 2\pi)$, $G_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ y la función $R_\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$R_\theta((x, y)^t) = G_\theta (x, y)^t$$

a. $R_\theta((1, 0)^t) = (\cos\theta, \sin\theta)^t$ $R_\theta((0, 1)^t) = (-\sin\theta, \cos\theta)^t$

b. $Y = R_\theta((1, 0)^t) = (\cos\theta, \sin\theta)^t$, entonces

$$Z = R_\psi((\cos\theta, \sin\theta)^t) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\theta - \sin\psi\sin\theta \\ \sin\psi\cos\theta + \cos\psi\sin\theta \end{pmatrix}$$

c. La función $R_{\theta+\psi}$ está dada por

$$R_{\theta+\psi}((x, y)^t) = G_{\theta+\psi}(x, y)^t$$

Esto corresponde a girar un vector un ángulo $\theta + \psi$. Lo que es igual a girarlo un ángulo θ y luego al vector resultante girarlo un ángulo ψ. Es decir, $R_{\theta+\psi} = R_\theta \circ R_\psi$.

Por un lado tenemos que

$$R_{\theta+\psi}((1,0)^t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\psi) & -\sin(\theta+\psi) \\ \sin(\theta+\psi) & \cos(\theta+\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\psi) \\ \sin(\theta+\psi) \end{pmatrix}$$

Usando la parte anterior, y dado que $R_{\theta+\psi}((1,0)^t) = R_\psi(R_\theta((1,0)^t))$, tenemos que

$$\begin{cases} \cos(\theta+\psi) = \cos\theta\cos\psi - \sin\theta\sin\psi \\ \sin(\theta+\psi) = \sin\theta\cos\psi + \cos\theta\sin\psi \end{cases}$$

4.1 a. Se necesitan 146, 526, 260, 158 y 388 unidades de hierro, madera, vidrio, pintura y ladrillos respectivamente.

b. Los precios por unidad de casa de tipo moderno, nórdico y colonial son 492 528 y 465 respectivamente.

c. Para construir 5 casas de tipo moderno, 7 de tipo nórdico y 12 de tipo colonial se necesitan 11.732.

4.2 a. Una forma de hacer esta parte es usar el ejercicio [1.4] donde dada una matriz A, tenemos otra matriz $\delta(i_0, i_0)$ tal que $A\delta(i_0, j_0)$ devuelve una matriz que tiene la columna i_0 de A en su columna j_0 y el resto de las entradas son nulas.

En este caso, queremos una matriz B que al multiplicarla por A, devuelva una matriz cuya columna $i+1$ sea la columna i de A. Resulta que esa matriz es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b. Razonando de forma análoga a la parte anterior, ahora buscamos copiar la columna i en la $n-i+1$. Por lo tanto, la matriz B que nos sirve es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c. Para esta parte, alcanza sumar a A una matriz $B = ((b_{ij}))$ de $n \times n$ tal que si $a_{ij} = 1$ entonces $b_{ij} = -1$ y si $a_{ij} = 0$ entonces $b_{ij} = 1$.