Solución Práctico 1

1. a. El sistema es compatible determinado y $Sol(S) = \{(1, 1, 1)\}$.

   b. El sistema es compatible indeterminado y $Sol(S) = \{(-3z, 2 + 2z, z) : z \in \mathbb{R}\}$. La matriz ampliada $A|b$ correspondiente al sistema es

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \end{array}\right)$$

   Haciendo $F_2 - 2F_1$ y $F_3 - 2F_1$ obtenemos

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & 6 \\ 0 & 6 & -12 & 12 \end{array}\right)$$

   Notar que la tercera fila es múltiplo de la segunda, por lo tanto si hacemos $F_3 - 2F_2$ llegamos a la siguiente matriz escalerizada

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

   Dado que la matriz A tiene la misma cantidad de escalones que la matriz ampliada, el sistema es compatible. Además, como tenemos dos escalones y tres incógnitas, sabemos que es indeterminado.
   De la segunda fila obtenemos la siguiente ecuación

$$3y - 6z = 6$$

   Por lo que podemos expresar a y en función de z como $y = 2 + 2z$ y sustituir en la primera ecuación para obtener $x = -3z$.

   c. El sistema es compatible determinado y $Sol(S) = \{(2, 1, -1, 1)\}$.

   d. El sistema es compatible indeterminado y $Sol(S) = \{(3 - z, 1, 2 - z, z) : z \in \mathbb{R}\}$

2. a. El sistema es incompatible y por lo tanto $Sol(S) = \emptyset$

   b. El sistema es compatible indeterminado y $Sol(S) = \{(3y - z, -2y + z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$.

3. a. El sistema es compatible indeterminado y $Sol(S) = \{(3x_5, 4x_5, x_3, -9x_5, x_5) : x_5 \in \mathbb{R}\}$.

b. El sistema es compatible indeterminado y $Sol(S) = \{(10x_5, 2x_5, 0, -2x_5, x_5)\}$.

4. a.
   - si $\lambda = 1$ el sistema es incompatible y por lo tanto $Sol(S) = \emptyset$.
   - si $\lambda \neq 1$ el sistema es compatible determinado y $Sol(S) = \{(\frac{2\lambda-4}{\lambda-1}, \frac{2}{\lambda-1})\}$

   b.
   - si $\lambda = 4$ el sistema es incompatible
   - si $\lambda \neq 4$ el sistema es compatible determinado y $Sol(S) = \{(\frac{4\lambda-10}{\lambda-4}, \frac{-\lambda}{\lambda-4}, \frac{\lambda-2}{\lambda-4})\}$

5. Consideremos un sistema de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0 \end{cases}$$

a. Si $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ es solución del sistema, entonces verifica cada una de las m ecuaciones. Es decir, para cada $i \in \{1, ..., m\}$, tenemos que

$$a_{i1}\alpha_1 + ... + a_{in}\alpha_n = 0$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $c \in \mathbb{R}$, obtenemos

$$c(a_{i1}\alpha_1 + ... + a_{in}\alpha_n) = c.0 = 0$$

Usando la propiedad distributiva resulta que para todo $i \in \{1, ..., m\}$

$$a_{i1}(c\alpha_1) + ... + a_{in}(c\alpha_n) = 0$$

Concluimos entonces que $(c\alpha_1, ..., c\alpha_n)$ es solución del sistema.

b. En esta parte razonamos de forma análoga a la anterior. Supongamos que $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ y $(\beta_1, ..., \beta_n)$ son soluciones del sistema. Entonces si consideramos la ecuación i-ésima tenemos que

$$a_{i1}\alpha_1 + ... + a_{in}\alpha_n = 0$$

$$a_{i1}\beta_1 + ... + a_{in}\beta_n = 0$$

Sumando ambas ecuaciones

$$a_{i1}(\alpha_1 + \beta_1) + ... + a_{in}(\alpha_n + \beta_n) = 0$$

Como esto vale para cada una de las m ecuaciones, concluimos que $(\alpha_1 + \beta 1, ..., \alpha_n + \beta_n)$ es solución del sistema.

c. La idea de esta prueba es observar la cantidad máxima de escalones que puede tener esta matriz y usar el teorema de Rouché-Frobenius visto en el teórico. La siguiente parte es simplemente el contrarrecíproco de ésta.

6.c. Observar que $m < n$ da una restricción sobre la cantidad máxima de escalones que puede tener la matriz escalerizada. Usar con esto el Teorema de Rouché-Frobenius

7. El ejercicio consiste en hallar la cantidad de tablas de cada tipo que podemos armar con las piezas de sushi disponibles. Llamemos entonces w a la cantidad de tablas Lagrange, x a la cantidad de tablas Hausdorff, y a la cantidad de tablas Gauss y z a la cantidad de tablas Kolmogorov. Disponemos de 32 piezas Philadelphia que debemos repartir entre las diferentes tablas. Por cada tabla Lagrange que armemos, usamos 4 de ellas, por cada tabla Hausdorff usamos 2 de ellas, por cada tabla Gauss usamos 6 y por cada tabla Kolmogorov usamos 8 de ellas. Razonando análogamente con el resto de las piezas, podemos representar el problema con el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 4w + 2x + 6y + 8z = 32 \\ 3w + x + 3y + 6z = 22 \\ 5w + 5x + 15y + 10z = 50 \end{cases}$$

Escalerizando, obtenemos que el sistema es compatible indeterminado y las soluciones son de la forma $(6-2z, 4-3y, y, z)$. Dado que solamente podemos tener cantidades enteras de tablas y además debe haber al menos una de cada una, tenemos que

$$w = 6 - 2z \geq 1$$
$$x = 4 - 3y \geq 1$$

Despejando de las inecuaciones anteriores, obtenemos que $y = 1$, $1 \leq z \leq \frac{5}{2}$. Por lo tanto, el conjunto de soluciones del sistema es

$$\{(4,1,1,1),(2,1,1,2)\}$$

8. La información que nos dan los puntos marcados es que $f(-2) = g(-2) = 4$, $f(-1) = g(-1) = 3$ y $f(1) = g(1) = 1$. A partir de esto, podemos armar un sistema de ecuaciones y obtenemos que $f(x) = -x + 2$, $g(x) = x^3 + 2x^2 - 2x$

9. La ecuación genérica del plano asumiendo que $d = 10$ es

$$ax + by + cz = 10$$

   Basta sustitir en ella los puntos $(1, 1, -1), (3, -2, -2), (5, 5, 3)$ y encontrar a, b, c para que estos la verifiquen. La ecuación del plano es entonces $2x + 3y - 5z = 10$.

10. a. Los valores son $x_1 = 14$, $x_2 = 16$, $x_3 = 18$.

    b. Los valores son $k_1 = 10,7$, $k_2 = 18,3$, $k_3 = 12,5$.