MODELADO DE SISTEMAS MECÁNICOS EMPLEANDO EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Henry Figueredo Losada

Universidad de la República-Uruguay
IIMPI-FING

henryf@fing.edu.uy

31 de agosto de 2020

Sumario

CLASE 2. INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

TEMA I. INTRODUCCIÓN AL MEF

TEMA I. INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS (FEM)

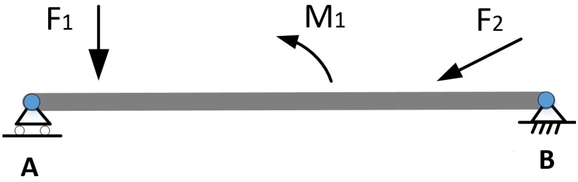
CLASE 2. INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.

1. Introducción.
2. Ecuación Diferencial de gobierno para una Barra 1D.
3. Método de la Función de Prueba.
4. Principio de los Trabajos Virtuales (PTV).

Clase No.2

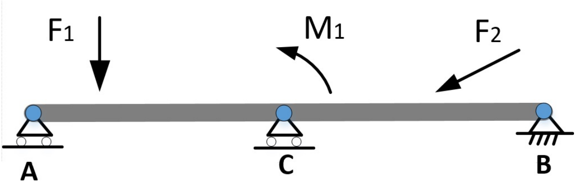
1.Introducción

Como se sabe, de la mecánica del Sólido Rígido, aplicando las leyes de Newton a sistemas isostáticos es posible determinar las fuerzas desconocidas que generadas en los apoyos garantizan el equilibrio de cuerpos.



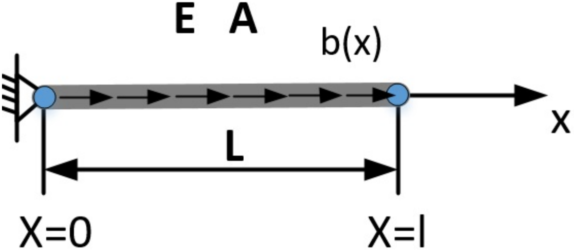
Sin embargo, si la barra estuviera apoyada sobre un tercer apoyo, de la mecánica del sólido rígido , seguiremos sabiendo que para el sistema se mantenga en equilibrio la resultante de las fuerzas generadas en los apoyos tendrá que ser la misma que en el caso del sistema isóstatico.

Pero lo que no se podrá determinar en este caso son las fuerzas que genera cada apoyo, debido a que el sistema es estáticamente indeterminado; o en otras palabras para determinar de las infinitas soluciones de fuerzas generadas en los apoyos , para que exista el equilibrio , cuál de ellas es la única correcta será necesario tener en cuenta las deformaciones que sufre la viga.



De los antes expuesto, se arriba a la conclusión de que la determinación de la fuerza resultante generadas en los apoyos, mediante la Mecánica del Sólido Rígido, es la *condición necesaria* en tanto que el análisis de la deformación para determinar el valor de las fuerza en cada apoyo será la *condición suficiente*.

Ecuación de gobierno para una barra 1D ("Strong Form")



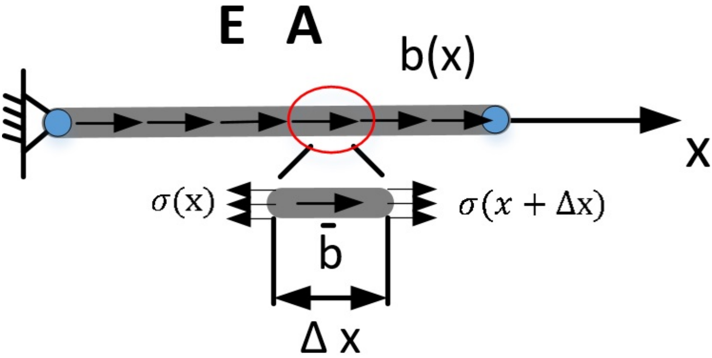
Considerando la respuesta estática de la barra elástica de la figura , La barra esta sometida a una *distribución volumétrica de fuerzas* b(x).

Ecuación de gobierno para una barra 1D ("Strong Form")

Como mencionamos anteriormente, la barra debe satisfacer las siguientes condiciones:

- Debe estar equilibrio
- Debe satisfacer la ley elástica tensión-deformación
- El campo de desplazamiento debe ser compatible
- Debe satisfacer la ecuación deformación-desplazamiento

Ecuación de gobierno para una barra 1D ("Strong Form")



Ecuación de gobierno para una barra 1D ("Strong Form")

Equlibrio Sumatoria de fuerzas

$$\sigma(x + \Delta x) \cdot A(x + \Delta x) - \sigma(x) \cdot A(x) + \bar{b}(x) \cdot \Delta x = 0 \quad (1)$$

Sustituyendo $\sigma \cdot A = N$

$$N(x + \Delta x) - N(x) + \bar{b}(x) \cdot \Delta x = 0 \quad (2)$$

Dividiendo por Δx haciendo Limite $\Delta x \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{N(x + \Delta x) - N(x)}{\Delta x} + \bar{b}(x) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\mathrm{d}N(x)}{\mathrm{d}x} + b(x) = 0 \cdots N,x + b(x) = 0 \quad (4)$$

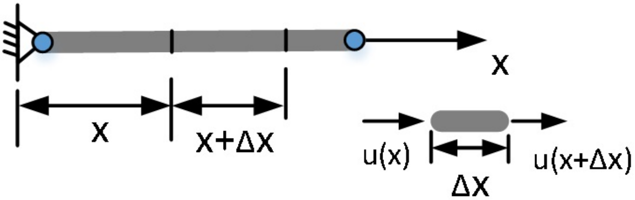
Ecuación de gobierno para una barra 1D ("Strong Form")

-Satisfacer la ley Hooke

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \tag{5}$$

-La relación deformación-desplazamiento como:

$$\varepsilon = \frac{Elongación}{Longitud\ Original} \tag{6}$$



Ecuación de gobierno para una barra 1D ("Strong Form")

$$\bar{\varepsilon} = \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \tag{7}$$

$$\varepsilon(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} = u,x \tag{8}$$

$$\varepsilon(x) = \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} \tag{9}$$

Multiplicando la Ec.(5) por A.

$$\frac{N}{A} = E \cdot \varepsilon \cdot A \ \therefore \ N(x) = EA \cdot \varepsilon \tag{10}$$

Ecuación de gobierno para una barra 1D ("Strong Form")

Sustituyendo la Ec.(9) en Ec.(10)

$$N(x) = EA\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{11}$$

Sustituyendo la Ec.(11) en Ec.(4)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(EA \cdot \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}) + b(x) = 0 \tag{12}$$

Si E y A son constantes en toda la sección

$$EA\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}^2x} + b(x) = 0 \tag{13}$$

Dividiendo por EA

$$\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}^2x} + \frac{b}{EA} = 0 \tag{14}$$

Ecuación de gobierno para una barra 1D ("Strong Form")

Resolviendo la Ec.(14),

$$\frac{\mathrm{d}^2 u(x)}{\mathrm{d}^2 x} + \frac{b}{EA} = 0 \qquad (15)$$

Condiciones de Frontera

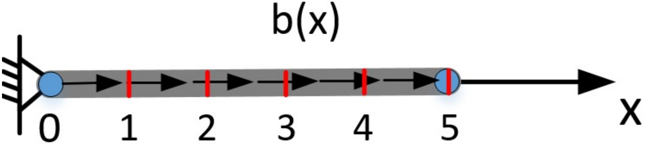
$$\begin{cases} u(x) = 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} = 0 & \text{si } x = l \end{cases} \qquad (16)$$

la solución analítica:

$$u(x) = \frac{-b}{EA}\frac{x^2}{2} + \frac{bL}{EA}x \qquad (17)$$

Método de Diferencias Finitas para una barra 1D

Un segundo método de solución,



$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \quad (18)$$

Siendo

$$h = \frac{b-a}{N} \quad (19)$$

Método de Diferencias Finitas para una barra 1D

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta l^2} = \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{u}}{\mathrm{d}^2 x} \tag{20}$$

Sustituyendo en la Ecuación de gobierno

$$\frac{u_0 - 2u_1 + u_2}{\frac{l^2}{5^2}} + \frac{b}{EA} = 0 \tag{21}$$

$$\begin{cases} u_0 - 2u_1 + u_2 + \frac{1}{5^2}\frac{bL^2}{EA} = 0 \\ u_1 - 2u_2 + u_3 + \frac{1}{5^2}\frac{bL^2}{EA} = 0 \\ u_2 - 2u_3 + u_4 + \frac{1}{5^2}\frac{bL^2}{EA} = 0 \\ u_3 - 2u_4 + u_5 + \frac{1}{5^2}\frac{bL^2}{EA} = 0 \end{cases} \tag{22}$$

Método de Diferencias Finitas para una barra 1D

Condiciones de Frontera

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_4 = u_5 \end{cases} \tag{23}$$

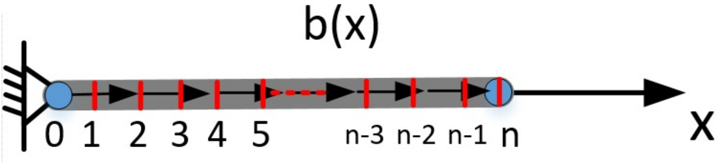
Generando un grupo de Ec Lineales

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} + \frac{1}{5^2}\frac{bL^2}{EA}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \tag{24}$$

Solución para u_i

$u_1 = \frac{4}{25}\frac{bL}{EA}$ $\quad u_2 = \frac{7}{25}\frac{bL}{EA}$ $\quad u_3 = \frac{9}{25}\frac{bL}{EA}$ $\quad u_4 = \frac{2}{5}\frac{bL}{EA}$

Método de Diferencias Finitas para una barra 1D



Generando un grupo de Ec Lineales

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} + \frac{1}{n^2}\frac{bL^2}{EA}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (25)$$

3-Método de la Función de Prueba (Trial Function method)

$$\frac{\mathrm{d}^2 u(x)}{\mathrm{d}^2 x} + \frac{b}{EA} = 0 \tag{26}$$

Condiciones de Frontera

$$\begin{cases} u(x) = 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} = 0 & \text{si } x = l \end{cases} \tag{27}$$

Función de Prueba

$$\hat{u} = \sum_j c_j \phi_j \tag{28}$$

-Determinar los coeficientes indeterminados para minimizar el error
-No satisface todos los requerimientos.

Clase No.2

3-Método de la Función de Prueba (Trial Function method)

Función Residual R(x)

$$R(x) = \frac{\mathrm{d}^2\hat{u}}{\mathrm{d}^2 x} + \frac{b}{EA} = 0 \tag{29}$$

Función de pesos o ponderación que deben cumplir los siguiente :

$$\int_0^L \phi_j R(x) dx = 0 \tag{30}$$

Una vez que se especifica una forma funcional para las funciones de ponderación, se emplea la aproximación de u y se combina y esta información anterior con la ecuación integral anterior para obtener un conjunto de n ecuaciones simultaneas con n valores incognitas, C_i

3-Método de la Función de Prueba (Trial Function method)

Ejemplo:

$$\hat{u}_1 = c_1 \cdot \phi_1(x) = c_1 \cdot sen(\frac{\pi x}{2L}) \tag{31}$$

Condiciones de Frontera

$$\hat{u}_1(x)|_0 = c_1 \cdot sen(\frac{\pi x}{2L}) = 0 \tag{32}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\hat{u}_1(x)|_L = \frac{\pi}{2L} \cdot c_1\, cos(\frac{\pi x}{2L}) = 0 \tag{33}$$

$$\int_0^L \phi_j R(x) dx = 0 \tag{34}$$

$$R(x) = -c_1\, sen(\frac{\pi x}{2L}) \cdot \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 + \frac{b}{EA} \neq 0 \tag{35}$$

3-Método de la Función de Prueba (Trial Function method)

Continuación:

$$\int_0^L \phi_j R(x)dx = sen(\frac{\pi x}{2L}) \cdot \left[-c_1\, sen(\frac{\pi x}{2L})\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 + \frac{b}{EA}\right] = 0 \quad (36)$$

$$\frac{-c_1\pi^2}{8L} - \frac{2bL}{\pi EA} = 0 \quad (37)$$

$$c_1 = \frac{16L^2 b}{\pi^3 EA} \quad (38)$$

$$\hat{u}_1(x) = \frac{16L^2 b}{\pi^3 EA} \cdot sen(\frac{\pi x}{2L}) \quad (39)$$

3-Método de la Función de Prueba (Trial Function method)

Ejemplo:

$$\hat{u}_2(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) = c_1\, sen(\frac{\pi x}{2L}) + c_2\, sen(\frac{3\pi x}{2L}) \tag{40}$$

$$\left.\begin{matrix} \int_0^L \phi_1 R(x)dx \\ \int_0^L \phi_2 R(x)dx \end{matrix}\right\} \tag{41}$$

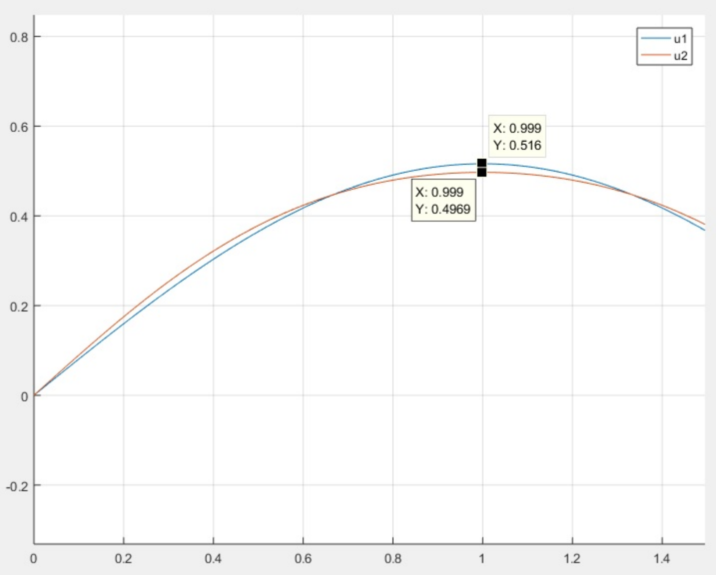
Resultados:

$$c_1 = \frac{16L^2 b}{\pi^3 EA} \tag{42}$$

$$c_2 = \frac{16L^2 b}{27\pi^3 EA} \tag{43}$$

$$\hat{u}_2(x) = \frac{16L^2 b}{\pi^3 EA} \cdot sen(\frac{\pi x}{2L}) + \frac{16L^2 b}{27\pi^3 EA} \cdot sen(\frac{3\pi x}{2L}) \tag{44}$$

3-Método de la Función de Prueba (Trial Function method)



4-Ejercicio propuesto (Jacob Fish)

Desarrolle la forma flaca para la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(AE\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)+2x=0 \quad para \;\; 1<x<3 \tag{45}$$

$$\sigma(1)=E\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)_{x=1}=0{,}1 \tag{46}$$

$$u(3)=0{,}001 \tag{47}$$

Paso 1:

$$0=\int_0^3 w\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(AE\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)+2x\right]dx \tag{48}$$

Continuación

Debemos integrar por partes para distribuir las derivadas igual entre la variable dependiente **u** y la función de pesos **w**. Este caso debemos garantizar que la función **w** debe ser **n** veces diferenciable y satisfacer las condiciones de frontera.

Paso 2: Recordando e Integrando por partes el primer miembro:

$$\int_0^L f \cdot g' = [f \cdot g]_0^L - \int_0^L f' \cdot g \tag{49}$$

$$\begin{cases} f = w \quad ; \; f' = \frac{dw}{dx} \\ \\ g' = \frac{d}{dx}\left(AE\frac{du}{dx}\right) \quad ; \; g = AE\frac{du}{dx} \end{cases} \tag{50}$$

Clase No.2

Continuación

Resulta en :

$$\left[wAE\frac{du}{dx}\right]_0^3 - \int_0^3 \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}AE\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \int_0^3 w2x = \int_0^3 w\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(AE\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + 2x\right]dx \tag{51}$$

Paso 3: Ahora pasamos al problema especifico con las condiciones de frontera

$$\left[wAE\frac{du}{dx}\right]_0^3 = wAE\frac{du(3)}{dx} - wAE\frac{du(1)}{dx} \tag{52}$$

$$-0{,}1(wA)_{x=1} - \int_0^3 \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}AE\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \int_0^3 2xw \ \ \forall \ \ con \ \ w(3) = 0 \tag{53}$$