Clase 5: Axiomas para los reales (Parte 2)

Axiomas de cuerpo: Ax1, ..., Ax6

Axiomas de órdenes: Ax 7. $\mathbb{R}^+$ cerrado por suma y producto.

Ax 8. Si $x \neq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}^+$ o $-x \in \mathbb{R}^+$ (pero no ambos)

Ax 9. $0 \notin \mathbb{R}^+$

<u>Teo</u>. $1 > 0$ $\left(\Leftrightarrow 1 - 0 \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow 1 \in \mathbb{R}^+ \right)$

<u>Dem</u>. Por Axioma 4, $1 \neq 0 \overset{\text{Ax.8}}{\Rightarrow} 1 \in \mathbb{R}^+$ o $-1 \in \mathbb{R}^+$ pero no ambos

Por absurdo, si $\underbrace{1 \notin \mathbb{R}^+} \Rightarrow -1 \in \mathbb{R}^+$

$\underset{\text{Ax 7.}}{\Rightarrow} (-1).(-1) = -(-1) = \underbrace{1 \in \mathbb{R}^+}$ ↯

Luego $1 \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow 1 > 0$.

<u>Teo</u>. $x > y \Rightarrow x + z > y + z$

<u>Dem</u>. $x > y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{R}^+$

$$
\begin{aligned}
x + z > y + z &\Leftrightarrow (x+z) - (y+z) \in \mathbb{R}^+ \\
&\Leftrightarrow x + z - y - z \in \mathbb{R}^+ \\
&\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{R}^+ \\
&\Leftrightarrow x > y.
\end{aligned}
$$

<u>Def</u>. $2 := 1 + 1$

definición

Teo. $2 > 1$

Dem. $1 > 0 \overset{\text{teo. ant.}}{\Longrightarrow} 1+1 > 0+1 \overset{\text{neutro}}{\Longrightarrow} 2 > 1$.

Enteros y racionales

Informalmente: $\mathbb{Z}^+ = \{1, 1+1, 1+1+1, \dots\}$

Def. Un subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ se dice inductivo si verifica: i) $1 \in X$
ii) Si $x \in X \Rightarrow x+1 \in X$.

Ejemplos de conj. inductivos: $\mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^+, \mathbb{Z}, \dots$
$X = \{n/2 : n \in \mathbb{Z}\}$

Definimos $\mathcal{J} = \{X \subseteq \mathbb{R} : X \text{ inductivo}\}$

Def: $\mathbb{Z}^+ = \bigcap_{X \text{ inductivo}} X$

Teo. i) $\mathbb{Z}^+$ es un conjunto inductivo
ii) Si X es inductivo $\Rightarrow \mathbb{Z}^+ \subseteq X$

Dem. i) $1 \in X$, $\forall X$ inductivo $\Rightarrow 1 \in \bigcap_{X \text{ induct.}} X = \mathbb{Z}^+$

Si $x \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow x \in X$, $\forall X$ inductivo
$\Rightarrow x+1 \in X$, $\forall X$ inductivo
$\Rightarrow x+1 \in \bigcap_{X \text{ ind.}} X = \mathbb{Z}^+$.

ii) Por definición

("$\mathbb{Z}^+$ son el menor conjunto inductivo")

<u>Definición</u>: $\mathbb{Z}^- = \{-n : n \in \mathbb{Z}^+\}$

$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$

$\mathbb{Q} = \{a/b : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

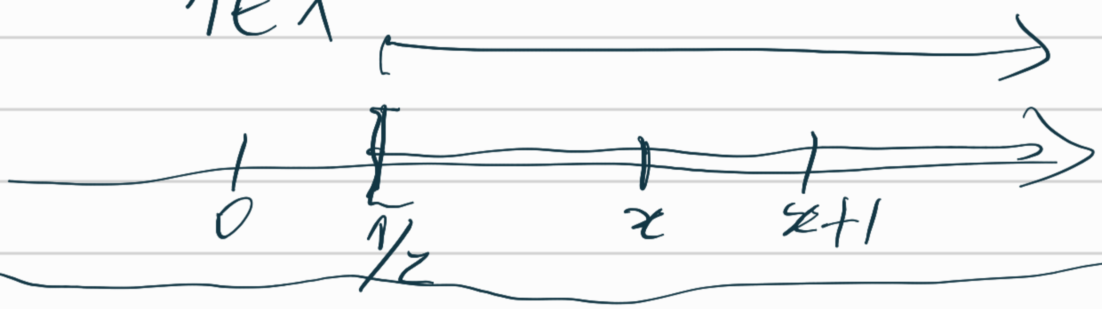
$X = [2, +\infty)$

$x \in X \Rightarrow x+1 \in X$ | X no es ind.

$1 \notin X$

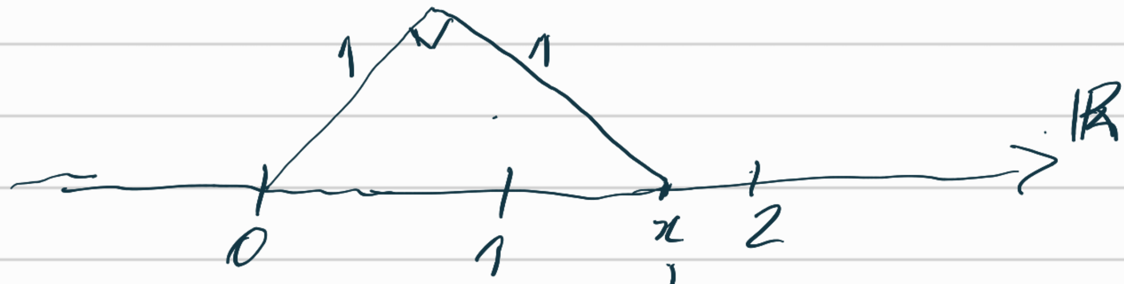
$X = [1/2, +\infty)$ sí, es inductivo.

$1 \in X$



Recta real

Intuitivamente si fijamos en una recta el origen (0) y la unidad (1) entonces existe una correspondencia entre los reales y los puntos de la recta



$$x^2 = 1^2 + 1^2$$
$$x^2 = 2$$

Teo. $\nexists\, x \in \mathbb{Q} \,/\, x^2 = 2$.

Lema previo (se prueba por inducción):
Si $a \in \mathbb{Z}$ entonces se cumple una y solo una de las siguientes condiciones:
1) $\exists\, b \in \mathbb{Z} : a = 2b$
2) $\exists\, b \in \mathbb{Z} : a = 2b+1$

notación

En el primer caso decimos que a es par ($a = \dot{2}$)
En el segundo " " " a es impar ($a = \dot{2}+1$)

Dem. Supongamos por absurdo que $\exists\, x \in \mathbb{Q} \,/\, x^2 = 2$. Como $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = a/b$ con a y b enteros, $b \neq 0$.
Podemos suponer que a y b no tienen factores comunes (sino los cancelamos).

$$x^2 = 2 \Rightarrow a^2/b^2 = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2$$

2 posibilidades $\rightarrow a = \dot{2}$
$\rightarrow a = \dot{2}+1$

$\boxed{\text{Si } a = \dot{2}} \Rightarrow a = 2c$ con $c \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^2 = 4c^2$

$$\Rightarrow 2b^2 = 4c^2 \Rightarrow b^2 = 2c^2$$

Como $a = \dot{2}$ y a/b es irreducible $\Rightarrow b = \dot{2}+1$

$$\Rightarrow b = 2d+1 \Rightarrow b^2 = (2d+1)^2 = 4d^2+1+4d$$
$$= 2(2d^2+2d)+1$$

$\Rightarrow b^2$ es impar y $b^2 = 2c^2$ es par $\lightning$

$\boxed{\text{Si } a = \dot{2}+1} \Rightarrow a = 2c+1$ con $c \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow a^2 = (2c+1)^2 = 4c^2+4c+1 = \dot{2}+1$$

Pero $a^2 = 2b^2 = \dot{2}$

Luego a^2 es par e impar $\lightning$

Conclusión: $\nexists\, x \in \mathbb{Q} \,/\, x^2 = 2$.

$\longrightarrow$ Precisamos algún axioma extra para que $\mathbb{R}$ esté en correspondencia con la recta real.

Cota superior, máximo y supremo de un conjunto

Def. Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ y $s \in \mathbb{R}$.

1) s es <u>cota superior</u> de X si $s \geq x \ \forall x \in X$.
2) s es máximo de X si es cota superior y $s \in X$.
3) s es supremo de X si se cumple
    - s es cota superior de X
    - Si s' es otra cota superior $s \leq s'$.

Ejemplos (informales)

① 

$X = [0,1]$ $\qquad\qquad$ $[1,+\infty)$

- cotas superiores: $2, 3/2, \pi, e, 80, \ldots$
- máximo: 1
- supremo: 1

② 

$X = [0,1)$ $\qquad$ cotas superiores: $s \geq 1$

máximo: $\nexists$

supremo: 1