Clase 4 :

Ecuaciones de variables separables

CDIVV - 2023 - 2sem

Eugenia Ellis

eellis@fing.edu.uy

- ¿Qué es una ecuación diferencial?

Es una ecuación en donde la incógnita es una función $y=f(x)$ y la ecuación la relaciona con sus derivadas

Ejemplo: 1) $y+y'+y''=2$ 2) $y'=\alpha y$ $\alpha \in \mathbb{R}$

- ¿Qué es el orden de una ecuación diferencial?

El orden de la ecuación es el mayor orden de derivada que aparece en la ecuación

orden 2 orden 1

- ¿Qué es la solución de una ecuación diferencial?

Una solución de una ecuación diferencial es una función definida en un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ I, tal que verifica la ecuación (f, I)

Tipos de ecuaciones que vamos a poder resolver:

- Ecuaciones diferenciales de primer orden de variables separables

$$\boxed{y' = A(y)\,B(x)}$$

- Ecuaciones diferenciables lineales de primer orden

$$\boxed{y' + a(x)\,y = r(x)}$$

- Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes.

$$\boxed{y'' + a y' + b y = r(x)} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Ejemplos: (1) $\boxed{y' = \cos x \, y \quad (E)}$

$$y' - \cos x \, y = 0$$

ecuación lineal de primer orden y $\underbrace{\text{homogénea}}$

término independiente es 0

Verifiquemos que la función $y = e^{\operatorname{sen} x}$ es solución de (E)

$$\underbrace{y'} - \cos x \, \underbrace{y} = \cos x \, e^{\operatorname{sen} x} - \cos x \, e^{\operatorname{sen} x} = 0 \checkmark$$

$$y = \underbrace{e^{\operatorname{sen} x}}$$

$$y' = e^{\operatorname{sen} x} \cdot (\operatorname{sen} x)' = \underbrace{\cos x \, e^{\operatorname{sen} x}}$$

$y = 2e^{\operatorname{sen} x}$ también es solución de (E)

$$\underbrace{y'} - \cos x \, \underbrace{y} = \underbrace{2 \cos x \, e^{\operatorname{sen} x}} - \cos x \, 2 e^{\operatorname{sen} x} = 0$$

$y' = \cos x \, y$ ¿tiene soluciones constantes?

$f(x) = \alpha$ $\alpha \in \mathbb{R}$ es solución de la ecuación sii

$$f'(x) = 0 = \cos x . f(x) = \cos x . \alpha$$

Cuando $\alpha = 0$ $f(x) = 0$ es una solución constante de la ecuación.

Ecuaciones de primer orden de variables separables

$$y' = A(y) \, B(x) \quad (*)$$

A y B funciones continuas

Una ecuación diferencial es de variables separables si podemos escribirla de la forma $(*)$ separando las y y las x en dos funciones que se multiplican.

Ejemplo: $y' = \underbrace{\operatorname{sen} x}_{B(x)} \cdot \underbrace{(1+y^2)}_{A(y)}$ ✓

$$y' = \operatorname{sen}(x+y) \quad \times$$

① Estudiar soluciones constantes de (E)

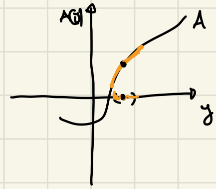
La función $y(x)=\alpha$ es solución de (E)

si $\quad y' = A(y)\,B(x)$

$$0 = \underbrace{A(\alpha)}_{=0} \cdot B(x)$$

Si $A(\alpha) = 0 \Rightarrow y(x) = \alpha$ es solución de (E)

② Soluciones no constantes.



$$y' = A(y)\,B(x)$$

Supongamos que $A(y) \neq 0$

$$y'(x) = A(y(x))\,B(x)$$

$\xRightarrow{A(y)\neq 0}$ $$\frac{y'(x)}{A(y(x))} = B(x)$$

tomamos primitivas

$$\int \frac{y'(x)}{A(y(x))}\,dx = c + \int B(x)\,dx \qquad c \in \mathbb{R}.$$

cambio de variable

$$y = y(x)$$
$$dy = y'(x)\,dx$$

$$\boxed{\int \frac{dy}{A(y)} = c + \int B(x)\,dx}$$

Ejemplo 1) $y' = \underbrace{\cos x}_{B(x)} \underbrace{y}_{A(y)}$

- soluciones constantes $y = 0$

- $y \neq 0 \Rightarrow \dfrac{y'}{y} = \cos x$

separamos las y de un lado

y las x del otro.

$$\Rightarrow \int \frac{y'}{y}\, dx = \int \cos x\, dx + C$$

tomamos primitiva

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \cos x\, dx + C$$

cambio de variable

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Log}|y| = \operatorname{sen} x + c$$

$$\Rightarrow \quad |y| = e^{\operatorname{sen} x + c} = e^{c} e^{\operatorname{sen} x}$$

$$= k e^{\operatorname{sen} x}$$

$$y = \pm k e^{\operatorname{sen} x} \qquad k \in \mathbb{R}^{+}$$

$$y = 0$$

$$\boxed{y = r e^{\operatorname{sen} x}} \qquad r \in \mathbb{R}.$$

todas las soluciones de

$x \in \mathbb{R}$ $\qquad I = \mathbb{R}$ $\qquad (E)\ y' = \cos x\, y.$

Ejemplo 2

$$y' = \underbrace{(1+y^2)}_{A(y)} \underbrace{3x^2}_{B(x)}$$

- $A(y) \neq 0$ no tenemos constantes.

- **Paso 1** separamos variebles

$$\frac{y'}{1+y^2} = 3x^2$$

- **Paso 2** tomamos primitive

$$\int \frac{y'}{1+y^2}\,dx = \int 3x^2\,d\cancel{x} + c$$

- **Paso 3** cambio de variable.

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int 3x^2\,dx + C$$

- **Paso 4** Resolver las primitivas

$$\operatorname{Arctg}(y) = x^3 + C$$

- Paso 5   Despejar la y.

$$\boxed{y = tg(x^3 + c)}$$

$c = 0$ $y = tg(x^3)$ está definida en intervalos, esa función en cada intervalo es una solución

Que pasa si queremos la solución de la ecuación (E) $y' = \cos x \, y$ que cumple que $y(0) = 1$

Las soluciones que verifican (E) son

$$y(x) = r \, e^{\operatorname{sen} x} \qquad r \in \mathbb{R}$$

Si queremos que $y(0) = 1$

$$y(0) = r \cdot e^{\operatorname{sen} 0} = r \cdot e^0 = r = 1$$

La función que verifica la condición inicial $y(0) = 1$ es

$$\boxed{y(x) = e^{\operatorname{sen} x}}$$