

# Lógica de Primer Orden

Conceptos Básicos  
Introducción a las Bases de Datos

# 1 Lógica de Primer Orden (FOL)

- Es un **lenguaje formal** que trata de representar la forma en que se piensa en matemáticas.
- Se usa para describir propiedades (condiciones) sobre los elementos del **Mundo Semántico**. Estas condiciones, pueden ser **Verdaderas** o **Falsas**.
- El lenguaje provee mecanismos que permiten probar (demostrar matemáticamente) que si ciertas propiedades son verdaderas, otras propiedades necesariamente son verdaderas.
- El lenguaje, está en el **Mundo Sintáctico**: son tiras de símbolos.

1

La Lógica de Primer Orden es un **lenguaje formal** que trata de representar la forma en que se piensa en matemáticas.

Se usa para describir propiedades (condiciones) sobre los elementos del Mundo Semántico. Estas condiciones pueden ser **Verdaderas** o **Falsas**.

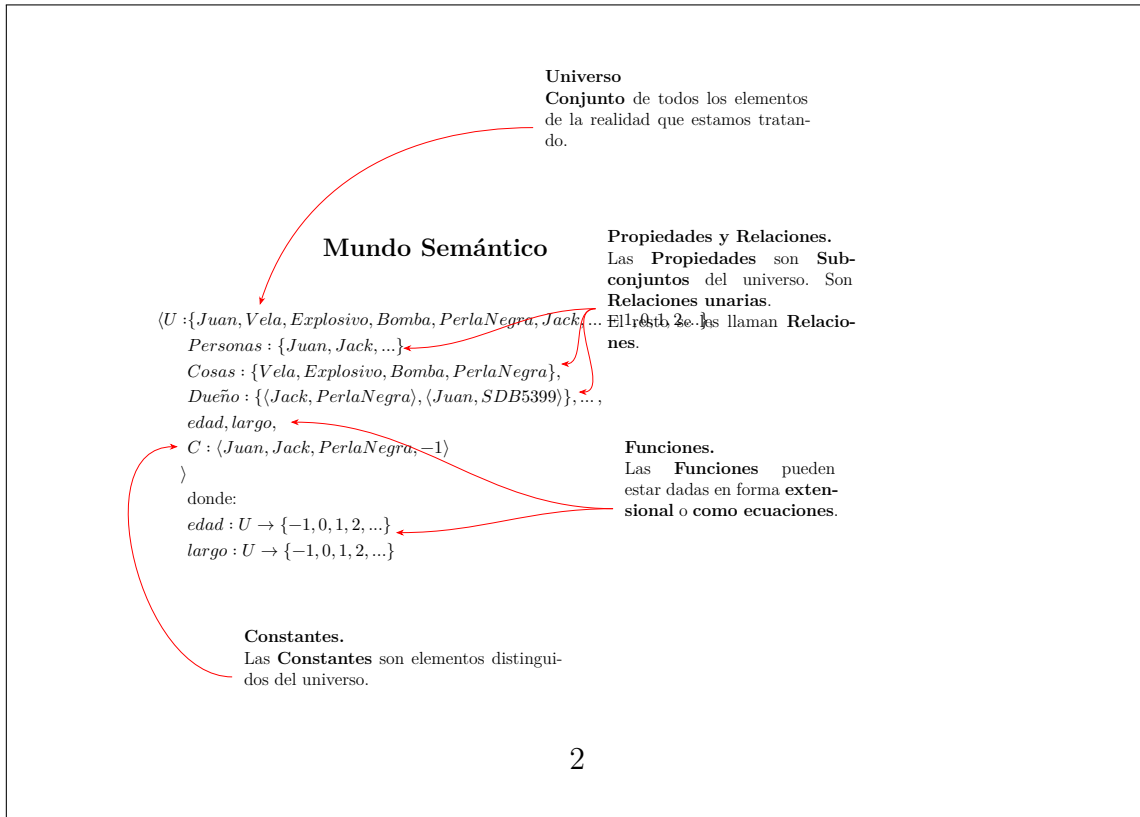
El lenguaje provee mecanismos que permiten probar (demostrar matemáticamente) que si ciertas propiedades son verdaderas, otras propiedades necesariamente son verdaderas.

El lenguaje, está en el **Mundo Sintáctico**: son tiras de símbolos.

Resumiendo: se escriben tiras de símbolos en la sintaxis del lenguaje que cuando las interpretamos, nos hablan de sucesos que ocurren o no en el Mundo Semántico.

La ventaja principal de esta estrategia para representar la realidad es que se puede hacer un procesamiento semi-automático de las representaciones y, si están bien construidas, entender esos resultados en términos del mundo real.

## 2 Semántica



El mundo semántico de nuestra realidad, lo representamos con una **Tupla** que contiene los elementos de los que queremos hablar, sobre los que queremos establecer condiciones. A esa representación matemática de la realidad se le suele llamar **Estructura Matemática** o simplemente **Estructura**.

Es así que tenemos el **Universo** o **Dominio**. Es un conjunto con todos los elementos posibles que haya que considerar en la realidad.

Luego hay una secuencia de **Propiedades y Relaciones**. Las propiedades son **subconjuntos** de elementos del universo y las relaciones son conjuntos de **tuplas** de elementos del universo (parejas, ternas, cuaternas, etc.). Las relaciones representan relaciones entre elementos del universo (ej: Dueño). Las propiedades representan *clases* de elementos del universo.

Luego hay **Funciones** que se usan para representar propiedades de los elementos del universo (No confundirlas con las propiedades) como, por ejemplo, edad de una persona o un objeto o el largo de un objeto.

Además de todos estos elementos, podemos tener **Constantes** que son elementos distinguidos del universo. Son elementos de los que interesa hablar particularmente.

Las estructuras se pueden dar de diferentes formas, pero siempre

### 3 Lógica de Primer Orden (FOL)

- Los elementos que están involucrados y las condiciones que deben cumplir entre ellos, están en el **Mundo Semántico**.
- Hay una función que se llama **Interpretación** que si recibe una tira de símbolos correctamente escrita, es capaz de devolver el significado: si es verdadera o falsa de acuerdo al universo, las relaciones y los elementos involucrados en la frase.

3

## 4 Lógica de Primer Orden (FOL)

- El lenguaje se estructura en dos capas:

### **Terminos**

Representan los elementos del universo.

Un término, está en el **Mundo Sintáctico** (es una expresión) y su significado (o valor) esta en el **Mundo Semántico** y es un elemento del universo.

### **Fórmulas**

Representa condiciones o propiedades que deben cumplir los elementos del universo.

Una fórmula, está en el **Mundo Sintáctico** y su significado es **verdadero** o **falso**, dependiendo si las condiciones se cumplen en el **Mundo Semántico** (o sea, en la realidad).

## 5 Ejemplo

### **La Realidad**

Hay estudiantes que se inscriben a cursos.

De los estudiantes se conoce su cédula de identidad y su nombre.

La cédula de identidad identifica al estudiante (No hay dos estudiantes con la misma cédula).

De los cursos se conoce su nombre, y un número que es su código.

El código identifica al curso (No hay dos cursos con el mismo código).

De la inscripción de un estudiante a un curso, se conoce la fecha de inscripción.

## 6 Ejemplo

### El Mundo Semántico

- **Universo:**  $Estudiantes \cup Cursos \cup CI \cup String \cup \mathbb{N} \cup Fechas$

- **Relaciones:**
  - $Estudiantes$
  - $Cursos$
  - $CI's$
  - $Inscriptos : Estudiantes \times cursos$

- **Funciones:**

$CI : Estudiantes \rightarrow CI$   
 $nombreEst : Estudiantes \rightarrow String$   
 $codigo : Cursos \rightarrow \mathbb{N}$   
 $NombreCurso : Cursos \rightarrow String$   
 $Fecha : Inscriptos \rightarrow Fechas$



## 7 Ejemplo

### El Mundo Sintáctico

- **Axiomas (Condiciones que sabemos que son verdaderas en la realidad):**

$$\forall x \in \textit{Estudiante}. \forall y \in \textit{Estudiante}.$$

$$(CI(x) = CI(y) \rightarrow x = y)$$

$$\forall x \in \textit{Cursos}. \forall y \in \textit{Cursos}.$$

$$(codigo(x) = codigo(y) \rightarrow x = y)$$

- **Equivalente a:**

$$\neg \exists x \in \textit{Estudiante}. \exists y \in \textit{Estudiante}.$$

$$(CI(x) = CI(y) \wedge \neg x = y)$$

$$\neg \exists x \in \textit{Cursos}. \exists y \in \textit{Cursos}$$

$$(codigo(x) = codigo(y) \wedge \neg x = y)$$

## 8 Cómo se lee ?

**Diferenciar Términos de Fórmulas**

$\forall x \in \text{Estudiantes}. \forall y \in \text{Estudiantes}$

$(CI(x) = CI(y) \rightarrow x = y)$

---

Términos	Representan Elementos del Universo.	○
Fórmulas	Pueden ser verdaderas o falsa. Representa lo que se dice de los elementos del universo.	○

8

Los **términos** Se piensan como elementos del universo. Pueden ser variables, constantes o funciones aplicadas a otros términos.

**Ej:**  $x$ , 25,  $CI(\text{juan})$

Las **Fórmulas** son condiciones que supuestamente deben cumplir los elementos del universo. Para saber si son verdaderas o falsas hay que ir a la estructura en la cual se está interpretando. Si se cumplen en la estructura, toman el valor **verdadero** y no se cumplen en la estructura, entonces toman el valor **falso**.

Para comprender las fórmulas, hay que conocer los **operadores lógicos**.

## 9 Operadores Lógicos

$\alpha \wedge \beta$	Es verdadero cuando $\alpha$ y $\beta$ son verdaderas
$\alpha \vee \beta$	Es verdadero cuando $\alpha$ o $\beta$ o las dos son verdaderas
$\alpha \leftrightarrow \beta$	Es verdadero cuando las dos partes toman el mismo valor, sea verdadero o falso
$\alpha \rightarrow \beta$	Es verdadero cuando, si $\alpha$ es verdadera, entonces $\beta$ es verdadera. Otra forma de verlo es que es verdadero cuando $\alpha$ es falso o $\beta$ es verdadero.
$\neg\alpha$	Es verdadero cuando $\alpha$ es falso.

9

El operador **implica** ( $\rightarrow$ ) es, sin duda alguna, el más difícil de entender. Considere la siguiente expresión:

$$\alpha \rightarrow \beta$$

Esta expresión, como todos los operadores lógicos, se puede ver como una abstracción de una frase en español:

Si  $\alpha$  entonces  $\beta$

Esta expresión se va a interpretar como **falso, solamente** en el caso en que  $\beta$  es falso y  $\alpha$  es verdadero. Algunos ejemplos en español son los siguientes:

- a Si *la Luna es de queso* entonces *la Tierra gira alrededor del Sol*.
- b Si *la Luna es de queso* entonces *el Sol gira alrededor de la Tierra*.
- c Si *la Tierra gira alrededor del Sol* entonces *la Luna es de queso*.

Las frases **a** y **b**, son verdaderas porque la Luna no es de queso. No importa el valor del consecuente<sup>1</sup>. En cambio, la frase **c** es falsa, dado que su antecedente es verdadero pero su consecuente es falso.

---

<sup>1</sup>En  $\alpha \rightarrow \beta$ , a  $\alpha$  se le llama *antecedente* y a  $\beta$  *consecuente*.

## 10 Operadores Lógicos: Cuantificadores

$\exists x.\alpha(x)$	Es verdadero cuando <b>algunos</b> elementos $e$ en el universo son tales que $\alpha(e)$ es verdadero
$\forall x.\alpha(x)$	Es verdadero cuando <b>todos</b> los elementos $a$ en el universo (uno cualquiera) cumplen que $\alpha(a)$ es verdadero
$\exists x \in S.\alpha(x)$	Es verdadero cuando <b>algunos</b> elementos $e$ en el conjunto $S$ tal que $\alpha(e)$ es verdadero
$\forall x \in S.\alpha(x)$	Es verdadero cuando <b>todos</b> los elementos $a$ en el conjunto $S$ (uno cualquiera) cumplen que $\alpha(a)$ es verdadero

10

En las dos primeras formas de los cuantificadores, las variables toman valores del universo. Dicho de una forma más informal, para ver la verdad de la expresión debemos *recorrer* el universo, tomando los valores uno a uno, chequeando si la fórmula  $\alpha$  es verdadera cuando en el lugar de la variable consideramos el valor. En el caso del cuantificador existencial ( $\exists$ ), se debe encontrar **al menos un elemento**  $e$  en el universo que haga verdadero a  $\alpha$  cuando se pone el valor de  $e$  en el lugar de la variable<sup>2</sup>. En el caso del cuantificador universal ( $\forall$ ) se debe verificar que **cada uno de los elementos** del universo hagan verdadera a  $\alpha$  en los términos descriptos anteriormente.

Aquí debería quedar claro que hay fórmulas que son verdaderas en una estructura y falsas en otras. Considere el siguiente ejemplo:

$$\forall x.Votantes(x) \wedge MayorDe18(x)$$

En una estructura en donde el universo<sup>3</sup> tiene **solamente** a todos los votantes en Uruguay, la fórmula es *verdadera*. Sin embargo, en una estructura en donde el universo son todos los uruguayos, entonces la fórmula es *falsa*.

<sup>2</sup>Esta **sustitución** de la variable  $x$  por el valor  $e$  se escribe como  $\alpha(e)$

<sup>3</sup>Se está asumiendo que en la estructura, el universo tiene **solamente** a todos los votantes, hay además una propiedad que contiene a todos los votantes, y otra que contiene a todas las personas mayores de 18 años que están en el universo.

Observar que si en el ejemplo se cambia  $\wedge$  por  $\rightarrow$ , se obtiene la siguiente fórmula:

$$\forall x.Votantes(x) \rightarrow MayorDe18(x)$$

Esta fórmula es **verdadera** en ambas estructuras.

Las dos últimas líneas de la tabla, presentan las formas **relativizadas** de los cuantificadores. Esas formas de escribir se pueden entender en términos de las primeras:

$$\begin{aligned}\exists x \in S.\alpha(x) &:= \exists x.x \in S \wedge \alpha(x) \\ \forall x \in S.\alpha(x) &:= \forall x.x \in S \rightarrow \alpha(x)\end{aligned}$$

## 11 Cómo se va usar en el curso ?

### Modelos de Datos

- La Lógica de Primer Orden es bastante compleja de escribir, aunque no tanto de entender.
- En el área de Base de Datos, se utiliza constantemente.
- Se usan otros lenguajes más simples de escribir pero el significado es similar al de la lógica de primer orden.
- Estos lenguajes se llaman **Modelos de Datos**.

## 12 Resto del Curso

### Modelos a Estudiar

Se van a estudiar dos modelos de datos:

- **Modelo Entidad-Relación (MER):** Orientado a describir la realidad. Esa descripción se hace en el Mundo Sintáctico pero mirando el Mundo Real y pensando en cómo nos queda en el Mundo Semántico.
- **Modelo Relacional (MR):** Orientado a la base de datos. Va a permitir operar con datos.
- **Correspondencia MER - MR:** Se va a estudiar cómo se puede construir un esquema en MR que represente lo mismo que lo escrito en MER.