Curso MNNS. - Hoja de notas N°3. Martes 30/Agosto/2005

Análisis de estabilidad de esquemas dicretizados de integración temporal.

Consideramos el método de análisis de estabilidad de Von-Neumann (C. Hirsch "Numerical Computation of Internal and External Flows", 1988), presentado a continuación tomando como ejemplo el esquema **Forward-Euler** aplicado a la ecuación de advección-difusión lineal en 1D, no estacionaria:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

con aproximaciones de primer orden para la derivada primera **(UDS)**:

$$\frac{\phi_i^{m+1} - \phi_i^m}{\Delta t} + \frac{u}{\Delta x} \cdot \left(\phi_i^m - \phi_{i-1}^m\right) = \frac{\alpha}{\Delta x^2}\left(\phi_{i+1}^m - 2\phi_i^m + \phi_{i-1}^m\right)$$

Si la solución exacta a esta ecuación en diferencias, para el tiempo **m**, es: $\overline{\phi}_i^m$, podemos escribir la solución aproximada obtenida como :

$$\phi_i^m = \overline{\phi}_i^m + \varepsilon_i^m$$

donde ε_i^m es el error contenido en la solución en el paso temporal **m.** El propósito de este análisis será determinar si el 'tamaño' de este error es atenuado (caso estable) o amplificado (caso inestable) por el método de integración a medida que avanzamos en el tiempo.

Sustituyendo esta expresión en la ecuación en diferencias, y como $\overline{\phi}_i^m$ la verifica exactamente, obtenemos para el error :

$$\frac{\varepsilon_i^{m+1} - \varepsilon_i^m}{\Delta t} + \frac{u}{\Delta x} \cdot \left(\varepsilon_i^m - \varepsilon_{i-1}^m\right) = \frac{\alpha}{\Delta x^2}\left(\varepsilon_{i+1}^m - 2\varepsilon_i^m + \varepsilon_{i-1}^m\right)$$

Es decir que el término de error debe verificar la misma ecuación en diferencias. En esta sustitución se aprovechó la linealidad de la ecuación correspondiente al ejemplo considerado. El análisis de estabilidad en casos no lineales es considerablemente más complejo y las conclusiones que se pueden obtener más limitadas.

Para simplificar el análisis de estabilidad consideramos condiciones de borde periódicas. Por lo tanto el veredicto de estabilidad o inestabilidad que obtendremos no tendrá en cuenta la influencia de condiciones de borde particulares.

Proponemos para el término de error un desarrollo en serie de Fourier :

$$\varepsilon(x_i, t_m) = \varepsilon_i^m = \sum_{k=-N}^{+N} E_k^m \exp\left(j\,i\,\frac{k\pi}{N}\right) = \sum_{k=-N}^{+N} E_k^m e^{j i \phi_k}$$

donde j es la unidad imaginaria, se definió $\phi_k = k\pi/N$, y E_k^m es la amplitud (compleja) de cada modo **k**. En lo anterior se sobre entiende que se considera sólo la parte real del desarrollo al evaluar ε_i^m. El desarrollo propuesto es equivalente a considerar una serie de senos y cosenos:

$$\varepsilon_i^m = \sum_{k=-N}^{+N} \left[a_k^m \operatorname{sen}(ik\pi / N) + b_k^m \cos(ik\pi / N)\right]$$

pero la expresión en términos de exponenciales complejas es más cómoda para operar.

Considerando un único modo k, substituyendo en la ecuación en diferencias para ε_i^m y dividiendo por exp(jiϕ) tenemos (omitimos el subíndice k):

$$\frac{E^{m+1} - E^m}{\Delta t} + \frac{u}{\Delta x} E^m\left(1 - e^{-j\phi}\right) = \frac{\alpha}{\Delta x^2} E^m\left(e^{+j\phi} - 2 + e^{-j\phi}\right)$$

Nos interesa analizar el crecimiento de E^m, para lo cual consideramos el cociente E^{m+1}/E^m. Definiendo los parámetros c y d :

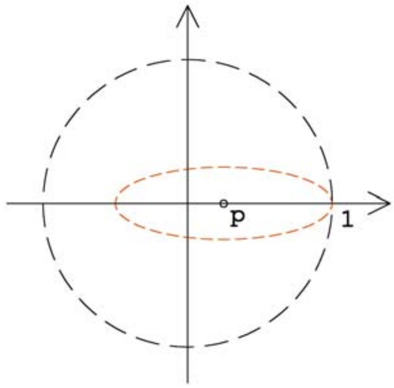
$$c = \frac{\Delta t \cdot u}{\Delta x} \text{ (número de Courant)}, \qquad d = \frac{\Delta t \cdot \alpha}{\Delta x^2}$$

y reordenando obtenemos :

$$G = \frac{E^{m+1}}{E^m} = (1 - c - 2d) + (c + 2d)\cos\phi - j\,c\sin\phi$$

donde hemos utilizado la expresión de la exponencial compleja : $e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi$.

El esquema representa la condición de estabilidad dentro del circulo unidad para valores dados de **c** y **d.** La elipse, centrada en p=1-c-2d, excederá el círculo unidad si c+2d>1 (p<0), por lo tanto la condición de estabilidad para este problema es:



$$|G| \le 1 \;\rightarrow\; c + 2d \le 1 \;\rightarrow\; \Delta t \le \frac{1}{\dfrac{2\alpha}{\Delta x^2} + \dfrac{u}{\Delta x}}$$

Para el caso púramente advectivo (d=0) la condición anterior se reduce a la llamada condición CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) :

$$\text{si } d=0 \;\rightarrow\; c \le 1 \;\rightarrow\; \frac{\Delta t \cdot u}{\Delta x} \le 1 \quad \text{(CFL)}$$

Vale la pena observar también que en lo anterior se ha considerado u>0 (c>0) (y la aproximación 'upstream' correspondiente para el término advectivo). Para el caso u<0 (c<0) el esquema se vuelve incondicionalmente inestable en ausencia de difusión (debido a que en ese caso la aproximación del término advectivo pierde su característica 'upwind' o 'upstream').

Condiciones de estabilidad para otros esquemas de discretización.

Forward Euler + (CDS) en termino convectivo. (orden o(Δt))

$$\frac{\phi_i^{m+1} - \phi_i^m}{\Delta t} + \frac{u}{2\Delta x}\cdot\left(\phi_{i+1}^m - \phi_{i-1}^m\right) = \frac{\alpha}{\Delta x^2}\left(\phi_{i+1}^m - 2\phi_i^m + \phi_{i-1}^m\right)$$

En forma análoga se obtiene :

$$\frac{E^{m+1} - E^m}{\Delta t} + \frac{u}{2\Delta x} E^m\left(e^{+j\phi} - e^{-j\phi}\right) = \frac{\alpha}{\Delta x^2} E^m\left(e^{+j\phi} - 2 + e^{-j\phi}\right)$$

y para el factor de amplificación:

$$G = \frac{E^{m+1}}{E^m} = (1 - 2d) + 2d\cos\phi - j\,c\sin\phi$$

La condición de estabilidad resulta:

$$|G| \le 1 \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} 2d \le 1 \\ c \le 2d \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} \Delta t \le \dfrac{2\Delta x^2}{\alpha} \\ Pe_{\Delta x} = \dfrac{u\Delta x}{\alpha} \le 2 \end{matrix}$$

Es interesante observar que la restricción sobre el número de Peclet de la celda, obtenida anteriormente como condición para evitar oscilaciones, se presenta nuevamente ahora como condición de estabilidad.

En el caso puramente advectivo (d=0) este esquema resulta incondicionalmente inestable, dado que el módulo de **G** resulta mayor a **1** para cualquier valor de **c**:

$$\text{Si } d=0, \quad G = \frac{E^{m+1}}{E^m} = 1 - j\,c \sin\phi$$

Leap Frog + (CDS) en termino convectivo. (orden $o(\Delta t^2)$)

$$\frac{\phi_i^{m+1} - \phi_i^{m-1}}{2\Delta t} + \frac{u}{2\Delta x}\cdot\left(\phi_{i+1}^m - \phi_{i-1}^m\right) = \frac{\alpha}{\Delta x^2}\left(\phi_{i+1}^m - 2\phi_i^m + \phi_{i-1}^m\right)$$

Considerando los instantes m-1, m y m+1 tenemos :

$$\frac{E^{m+1} - E^{m-1}}{2\Delta t} + \frac{u}{2\Delta x} E^m\left(e^{+j\phi} - e^{-j\phi}\right) = \frac{\alpha}{\Delta x^2} E^m\left(e^{+j\phi} - 2 + e^{-j\phi}\right)$$

y para el factor de amplificación $G = \dfrac{E^{m+1}}{E^m} = \dfrac{E^m}{E^{m-1}}$:

$$G - \frac{1}{G} = 2d(-2 + 2\cos\phi) - j\,2c\sin\phi$$

que se puede expresar como una ecuación de segundo grado para G :

$$G^2 + G\cdot\left(2cj\sin\phi + 4d(1-\cos\phi)\right) - 1 = 0$$

En particular interesa ver que en el caso puramente advectivo (d=0) se tiene :

$$G = -jc\sin\phi \pm \sqrt{\left(1 - c^2\sin^2\phi\right)}$$

y por lo tanto el método es inestable ($|G| > 1$) si c>1 y sólo neutralmente estable ($|G| = 1$) si c≤1.

Finalmente consideramos un caso de esquema implícito para verificar que el mismo es incondicionalmente estable.

Backward Euler + (UDS) en término convectivo. (orden $o(\Delta t)$)

$$\frac{\phi_i^{m+1} - \phi_i^m}{\Delta t} + \frac{u}{\Delta x}\cdot\left(\phi_i^{m+1} - \phi_{i-1}^{m+1}\right) = \frac{\alpha}{\Delta x^2}\left(\phi_{i+1}^{m+1} - 2\phi_i^{m+1} + \phi_{i-1}^{m+1}\right)$$

Obtenemos para E^m y E^{m+1} :

$$\frac{E^{m+1} - E^m}{\Delta t} + \frac{u}{\Delta x} E^{m+1}\left(1 - e^{-j\phi}\right) = \frac{\alpha}{\Delta x^2} E^{m+1}\left(e^{+j\phi} - 2 + e^{-j\phi}\right)$$

y resulta para el factor de amplificación :

$$G = \frac{E^{m+1}}{E^m} = \frac{1}{1 + c(1 - \cos\phi + j\sin\phi) + 2d(1 - \cos\phi)}$$

donde el denominador es mayor que la unidad para cualesquiera valores de c y d (c>0). Por lo tanto este esquema implícito es incondicionalmente estable.

Cabe puntualizar que la 'estabilidad incondicional' de los esquemas implícitos no es ninguna garantía de precisión o buen comportamiento de la solución para pasos temporales 'grandes'. Asi mismo estos resultados de estabilidad son peculiares del ejemplo y los esquemas considerados. En particular en casos no lineales los esquemas implícitos de integración temporal pueden igualmente presentar problemas de estabilidad para pasos temporales 'grandes'.