

## 4. Ecuación advectiva lineal

En las ecuaciones que gobiernan el movimiento de la atmósfera aparecen términos difusivos  $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  y advectivos de la forma  $u \frac{\partial u}{\partial x}$ . El comportamiento de los términos difusivos fue estudiado en los capítulos anteriores. En este capítulo consideraremos el término advectivo.

El término advectivo tiene un par de características que deben ser consideradas separadamente. La primera de ellas es que si se usa una fórmula simétrica de 3 puntos para representar la derivada espacial aparecen oscilaciones que no son físicas en la solución si el término de viscosidad es menor al advectivo. No obstante, si usamos fórmulas algebraicas asimétricas para representar la derivada espacial vemos que, si bien la solución tiende a ser mas suave, la exactitud de la representación es típicamente un orden menor que usando la fórmula simétrica con el mismo número de nodos. Para fórmulas asimétricas esto puede introducir términos en el error de truncamiento de magnitud comparable a los términos físicos en la ecuación.

La segunda característica importante es que el término advectivo es no-lineal en la variable dependiente, lo cual permite la aparición de ondas de choque. En este capítulo nos ocuparemos de la ecuación lineal, por lo que resolveremos una ecuación de la forma

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = 0 \quad (4.1)$$

donde  $u$  es una velocidad conocida y  $T$  es un escalar pasivo desconocido. La ecuación (4.1) es hiperbólica y su solución se puede obtener por el método de las características que vimos en el capítulo 1.

Como  $u$  es una constante positiva la solución general a (4.1) puede ser escrita como

$$\bar{T}(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{x} - \mathbf{u}t) \quad (4.2)$$

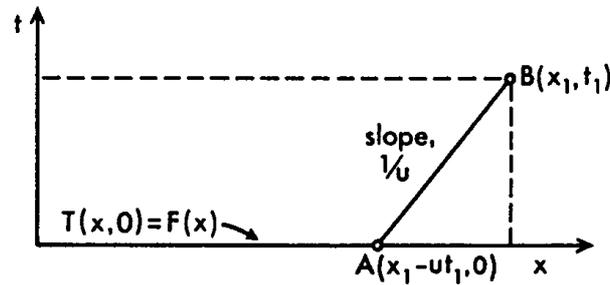
donde la condición inicial es

$$\bar{T}(\mathbf{x}, 0) = F(\mathbf{x}) \quad (4.3)$$

y  $F(\mathbf{x})$  es conocida. Si  $F(\mathbf{x})$  está especificada en todo el rango  $(-\infty, +\infty)$  la solución en  $(x_1, t_1)$  es igual a la solución en  $x_1 - ut$  a tiempo  $t=0$ , o sea

$$\bar{T}(x_1, t_1) = F(x_1 - ut_1) = \bar{T}(x_1 - ut_1, 0) \quad (4.4)$$

Esta solución se ilustra en la figura 4.1: la solución es constante a lo largo de líneas como la AB, la cual es una característica de la ecuación.



**Figura 4.1** – Dependencia de la solución de la ecuación lineal advectiva en las condiciones iniciales.

#### 4.1 Esquemas numéricos

##### 4.1.1 FTCS

El algoritmo mas simple para la ecuación advectiva es el FTCS

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} + \frac{u(T_{j+1}^n - T_{j-1}^n)}{2\Delta x} = 0 \quad (4.5)$$

el cual puede reescribirse como

$$T_j^{n+1} = T_j^n - 0.5C(T_{j+1}^n - T_{j-1}^n) \quad (4.6)$$

Este algoritmo es consistente con (4.1) y tiene un error de truncamiento de  $O(\Delta t, \Delta x^2)$ . En (4.6) C se denomina número de Courant y está definido por

$$C = u\Delta t / \Delta x \quad (4.7)$$

Aplicando el análisis de estabilidad de von Neumann a (4.6) se obtiene un factor de amplificación G dado por

$$G = 1 - iC \sin \theta \quad (4.8)$$

Claramente,  $|G| = \sqrt{1 + C^2 \sin^2 \theta} \geq 1$  por lo que el algoritmo es incondicionalmente inestable. Por lo tanto, el esquema FTCS no tiene uso práctico para resolver problemas de advección pura. Recordemos que el FTCS es condicionalmente estable para el caso de la ecuación de difusión.

4.1.2 Upwind

Un esquema alternativo se obtiene introduciendo una fórmula regresiva para calcular la derivada espacial, asumiendo que  $u$  es positiva (en un esquema upwind hay mas puntos corriente arriba que corriente abajo). O sea

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} + \frac{u(T_j^n - T_{j-1}^n)}{\Delta x} = 0 \tag{4.9}$$

la cual puede ser reescrita como

$$T_j^{n+1} = (1 - C)T_j^n + CT_{j-1}^n \tag{4.10}$$

Para  $u$  negativo (4.10) se reemplaza por

$$T_j^{n+1} = (1 - |C|)T_j^n + |C|T_{j-1}^n \tag{4.11}$$

La ecuación (4.10) indica que la solución  $T_j^{n+1}$  está determinada por nodos “corriente arriba” o upwind del  $(j,n)$ . Un análisis de estabilidad de von Neumann aplicado a (4.10) da un factor de amplificación mostrado en la tabla (4.1). Se encuentran soluciones estables si

$$C = u \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \tag{4.12}$$

La desigualdad  $C \leq 1$  se denomina condición CFL – Courant-Friedrichs-Lewy. Esta condición se aplica, generalmente, a esquemas explícitos aplicados a EDPs hiperbólicas. Físicamente, la condición CFL indica que una partícula de fluido no debe viajar mas de una distancia  $\Delta x$  en un paso de tiempo  $\Delta t$ .

El caso particular  $C=1$  da  $T_j^{n+1} = T_{j-1}^n$ , la cual es la solución exacta (4.2) de la ecuación (4.1).

Una expansión en series de Taylor alrededor del nodo  $(j,n)$  de la solución exacta sustituida en (4.10) resulta en

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + 0.5 \Delta t \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial t^2} - 0.5 u \Delta x \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + O(\Delta t^2, \Delta x^2) = 0 \tag{4.13}$$

Por lo tanto (4.10) es consistente con (4.1) pero tiene un error de truncamiento de  $O(\Delta t, \Delta x)$ . De (4.1)

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = -u \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} \tag{4.14}$$

y es posible reescribir (4.13) de la forma

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} - 0.5u\Delta x(1-C) \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + O(\Delta t^2, \Delta x^2) = 0 \quad (4.15)$$

Si consideramos que (4.15) tiene un error de truncamiento de  $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$  entonces (4.10) sería consistente con

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} - \alpha' \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = 0 \quad (4.16)$$

en lugar de con la ecuación advectiva lineal pura (4.1). Por lo tanto, el uso de un esquema upwind de dos términos introduce una difusividad numérica artificial  $\alpha' = 0.5u \Delta x(1-C)$ .

Notar que esta difusividad artificial es nula para  $C=1$ , lo cual es esperable ya que para ese valor de  $C$  la solución dada por (4.10) coincide con la solución exacta. Por ello, parecería que si elegimos  $\Delta t$  tal que  $C=1$  evitaría la difusión artificial. Mientras que esto es cierto para la ecuación advectiva lineal, no es posible asegurar  $C=1$  en todos lados del dominio para el caso no-lineal ya que  $u$  varía espacialmente.

#### 4.1.3 Esquemas Leapfrog y de Lax-Wendorf

Siguiendo los mismos pasos que para el caso de la ecuación de difusión es posible obtener una representación mas exacta de (4.1) introduciendo diferencias centradas en tiempo y espacio. Esto resulta en el esquema Leapfrog (“salto de rana”)

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{u(T_{j+1}^n - T_{j-1}^n)}{2\Delta x} = 0 \quad (4.17)$$

el cual se reescribe como

$$T_j^{n+1} = T_j^{n-1} - C(T_{j+1}^n - T_{j-1}^n) \quad (4.18)$$

La (4.18) es consistente con la (4.1) con un error de truncamiento de  $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$ . El factor de amplificación  $G$  obtenido de un análisis de von Neumann se muestra en la tabla 4.1. Se puede ver que si para todo  $\theta$  vale que  $0 \leq (1 - C^2 \sin^2 \theta) \leq 1$  entonces  $|G| = 1$  y la estabilidad es neutral. Como  $\sin \theta$  puede ser igual a 1 la estabilidad está asegurada sólo si  $C \leq 1$ , el criterio CFL. Por lo tanto si la condición CFL se satisface el esquema Leapfrog es neutralmente estable. Esta propiedad es deseable ya que implica que al avanzar en el tiempo la solución no es amortiguada, y por lo tanto representa correctamente el proceso de advección.

Para tener una comprensión mas detallada del esquema Leapfrog resolveremos (4.18) analíticamente asumiendo una solución de la forma

$$T_n^j = B^{n\Delta t} e^{i u j \Delta x} \quad (4.19)$$

Sustituyendo (4.19) en (4.18) se obtiene

$$(B^{(n+1)\Delta t} - B^{(n-1)\Delta t}) e^{i\mu j \Delta x} = -CB^{n\Delta t} (e^{i\mu(j+1)\Delta x} - e^{i\mu(j-1)\Delta x}) \quad (4.20)$$

Manipulando (4.20) da

$$B^{2\Delta t} + 2i\sigma B^{\Delta t} - 1 = 0 \quad (4.21)$$

donde

$$\sigma = C \sin \mu \Delta x \quad (4.22)$$

La solución de (4.21) es

$$B^{\Delta t} = -i\sigma \mp (1 - \sigma^2)^{1/2} \quad (4.23)$$

Asumiendo que la solución es estable ( $C < 1$ ) podemos llamar  $\sigma = \sin \theta$  de forma que  $B^{\Delta t}$  puede escribirse como

$$B_{po}^{\Delta t} = e^{-i\theta} \quad y \quad B_{ne}^{\Delta t} = e^{i(\theta + \pi)} \quad (4.24)$$

y la solución completa toma la forma

$$T_j^n = [A_p e^{-i\theta n} + A_c e^{i(\theta + \pi)n}] e^{i\mu j \Delta x} \quad (4.25)$$

De (4.25) es posible ver que hay dos ondas en la solución de diferencias finitas. No obstante, como la ecuación de advección es una EDPs de primer orden debería existir únicamente una solución de onda verdadera. Las dos ondas aparecen en (4.25) pues la ecuación en diferencias finitas (4.18) es de segundo orden. Para determinar las dos constantes en (4.25) se necesitan dos condiciones iniciales. Si asumimos que a  $t=0$   $T=Ae^{i\mu x}$  entonces  $T_j^0 = Ae^{i\mu j \Delta x}$ . La segunda condición puede ser derivada usando una diferencia finita hacia adelante en el tiempo pero reteniendo la diferencia centrada en el espacio, o sea

$$\frac{T_j^1 - T_j^0}{\Delta t} + u \frac{T_{j+1}^0 - T_{j-1}^0}{2\Delta x} = 0 \quad (4.26)$$

Usando la condición inicial se tiene

$$T_j^1 = A(1 - i \sin \theta) e^{i\mu j \Delta x} \quad (4.27)$$

Así, la solución (4.25) puede ser escrita como

$$T_j^n = A \frac{1 + \cos \theta}{2 \cos \theta} e^{i\mu(j\Delta x - n\theta/\mu)} + (-1)^{n+1} A \frac{1 - \cos \theta}{2 \cos \theta} e^{i(j\Delta x + n\theta/\mu)} \quad (4.28)$$

Tomemos ahora el límite  $\Delta x \rightarrow 0$  y  $\Delta t \rightarrow 0$ , lo cual resulta en  $\theta \rightarrow 0$ . En este límite, el primer término de (4.28) se acerca a la solución verdadera, mientras que el segundo término tiende a cero. Por lo tanto el primer término corresponde a la solución verdadera y se lo llama comúnmente el modo físico. Por otro lado, el segundo término, que aparece por el uso de una fórmula de segundo orden para aproximar una ecuación diferencial de primer orden, se llama comúnmente modo computacional.

En el caso de la ecuación advectiva lineal el modo computacional puede ser suprimido eligiendo apropiadamente las condiciones iniciales, como se vió arriba. No obstante, en el caso no lineal el modo computacional, inherente al esquema Leapfrog, puede desarrollarse y agravar la separación de las soluciones en pasos de tiempo consecutivos. Para evitar esto se usan estrategias diversas como promediar la solución a tiempo  $n$  y  $(n+1)$  que tienden a suprimir el modo computacional y tienen poco efecto sobre el modo físico. En lo que sigue examinaremos el procedimiento más común de suavización temporal para prevenir que la solución en tiempos pares e impares divergan (muchas veces llamado “time-splitting”).

Sea  $T^n$  la solución a tiempo  $n\Delta t$  previo al filtrado temporal y  $\bar{T}^n$  la solución luego del filtrado. Una elección natural para la operación de filtrado es

$$\bar{T}^n = T^n + \gamma(T^{n+1} - 2T^n + T^{n-1}) \quad (4.29)$$

Aplicamos el filtrado a la solución (4.25); entonces la solución filtrada puede ser escrita como

$$\bar{T}^n = [1 - 2\gamma(1 - \cos \theta)] A_p e^{-i\theta n} e^{i\mu j \Delta x} + [1 - 2\gamma(\cos \theta + 1)] A_c e^{i(\theta + \pi)n} e^{i\mu j \Delta x} \quad (4.30)$$

La ecuación anterior indica que el factor de amortiguación del modo físico es  $1 - 2\gamma(1 - \cos \theta)$ , mientras que para el modo computacional es  $1 - 2\gamma(\cos \theta + 1)$ . Por lo tanto para una solución bien resuelta,  $\Delta t \ll 1$ ,  $\cos \theta \rightarrow 1$ , el modo físico es casi inalterado, mientras que el modo computacional es amortiguado en un factor  $(1 - 2\gamma)$  en cada filtrado. Así, este tipo de filtrado removerá el modo computacional sin impactar sustancialmente en los modos físicos bien resueltos. Para incorporar este filtrado en el proceso de solución Robert (1966) y Asselin (1972) propusieron el siguiente algoritmo. Asumiendo que se calculó y guardó la solución filtrada  $\bar{T}^{n-1}$  para el tiempo  $(n-1)\Delta t$ , así como la solución no filtrada  $T^n$  a tiempo  $n\Delta t$ .

Entonces, la ecuación de predicción se usa para calcular la tendencia  $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^n$  usando los valores no filtrados y aproximado

$$T^{n+1} = \bar{T}^{n-1} + 2\Delta t \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^n \quad (4.31)$$

Luego se calcula el valor filtrado a tiempo  $n\Delta t$  de acuerdo a

$$\bar{T}^n = T^n + \gamma(T^{n+1} - 2T^n + \bar{T}^{n-1}) \quad (4.32)$$

Ahora se reemplaza el valor guardado de  $T^{\bar{n}-1}$  por el de  $\bar{T}^n$  y se repite el procedimiento de predicción anterior.

Por su simplicidad en la implementación el método Leapfrog se usa mucho en los modelos atmosféricos y oceánicos. Otro algoritmo popular es el de Lax-Wendroff. Este método está basado en la construcción de una representación de segundo orden para la derivada temporal a partir de una expansión de Taylor. O sea

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} &\approx \frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} - 0.5 \Delta t \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial t^2} \\ &= \frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} - 0.5 \Delta t u^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Introduciendo la expresión de diferencias finitas centrada para la derivada espacial segunda da lugar a la representación de Lax-Wendroff de (4.2)

$$T_j^{n+1} = T_j^n - 0.5C(T_{j+1}^n - T_{j-1}^n) + 0.5C^2(T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n) \quad (4.34)$$

El esquema de Lax-Wendroff es consistente con (4.1) con un error de truncamiento de  $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$  y es estable si se satisface la condición CFL  $C \leq 1$ .

#### 4.1.4 Esquema de Crank-Nicolson

El esquema implícito de Crank-Nicolson puede escribirse como (recordar que este esquema evalúa la derivada espacial en el promedio de tiempos  $n$  y  $n+1$ )

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} + u(0.5L_x T_j^n + 0.5L_x T_j^{n+1}) = 0 \quad (4.35)$$

donde

$$L_x T_j = (T_{j+1} - T_{j-1}) / 2\Delta x$$

Escrita en forma de algoritmo se encuentra

$$-0.25CT_{j-1}^{n+1} + T_j^{n+1} + 0.25CT_{j+1}^{n+1} = 0.25CT_{j-1}^n + T_j^n - 0.25CT_{j+1}^n, \quad (4.26)$$

Al igual que vimos para la ecuación de difusión este algoritmo acopla la evolución del nodo  $j$  con el el nodo  $j-1$  y  $j+1$  lo cual implica resolver un sistema de ecuaciones para avanzar en el tiempo. La ecuación (4.26) da lugar a una matriz tridiagonal y por lo tanto puede ser eficientemente resuelto por el algoritmo de Thomas.

El algoritmo de Crank-Nicolson es consistente y tiene un error de truncamiento de

$O(\Delta t^2, \Delta x^2)$ . Es, a su vez, incondicionalmente estable (tabla 4.1).

Table 9.1. Algebraic (discretised) schemes for the convection equation  $\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = 0$

Scheme	Algebraic form	Truncation error* (E) (leading terms)	Amplification factor G ( $\theta = mx\Delta x$ )	Stability restrictions	Remarks
FTCS	$\frac{\Delta T_j^{n+1}}{\Delta t} + uL_x T_j^n = 0$	$Cu(\frac{\Delta x}{2})^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + u(\frac{\Delta x^2}{6})(1+2C^2) \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}$	$1 - iC \sin \theta$	unstable	$C = u \frac{\Delta t}{\Delta x}$ $L_x = \frac{1}{2\Delta x} \{-1, 0, 1\}$
Upwind	$\frac{\Delta T_j^{n+1}}{\Delta t} + uL_x \left( \frac{T_j^n - T_{j-1}^n}{\Delta x} \right) = 0$	$-u(\frac{\Delta x}{2})(1-C) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + u(\frac{\Delta x^2}{6})(1-3C+2C^2) \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}$	$1 - C(1 - \cos \theta) - iC \sin \theta$	$C \leq 1$	$\Delta T_j^{n+1} = T_j^{n+1} - T_j^n$
Leapfrog	$\frac{T_j^{n+1} - T_j^{n-1}}{2\Delta t} + uL_x T_j^n = 0$	$u(\frac{\Delta x^2}{6})(1-C^2) \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}$	$-iC \sin \theta \pm (1 - C^2 \sin^2 \theta)^{1/2}$	$C \leq 1$	

Table 9.1. (cont.)

Scheme	Algebraic form	Truncation error* (E) (leading terms)	Amplification factor G ( $\theta = mx\Delta x$ )	Stability restrictions	Remarks
Lax-Wendroff	$\frac{\Delta T_j^{n+1}}{\Delta t} + uL_x T_j^n - 0.5uC \Delta x L_{xx} T_j^n = 0$	$u(\frac{\Delta x^2}{6})(1-C^2) \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + uC(\frac{\Delta x^3}{8})(1-C^2) \frac{\partial^4 T}{\partial x^4}$	$1 - iC \sin \theta - 2C^2 \sin^2(\frac{\theta}{2})$	$C \leq 1$	$L_{xx} = \left\{ \frac{1}{\Delta x^2}, -\frac{2}{\Delta x^2}, \frac{1}{\Delta x^2} \right\}$
Crank-Nicolson	$\frac{\Delta T_j^{n+1}}{\Delta t} + uL_x \left( \frac{T_j^n + T_j^{n+1}}{2} \right) = 0$	$u(\frac{\Delta x^2}{6})(1+0.5C^2) \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}$	$\frac{(1-0.5iC \sin \theta)}{(1+0.5iC \sin \theta)}$	None	
Three-level fully implicit	$\frac{3 \Delta T_j^{n+1}}{2 \Delta t} + uL_x \left( \frac{T_j^n + T_j^{n+1}}{2} \right) = 0$	$u(\frac{\Delta x^2}{6})(1+2C^2) \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}$	$\frac{1 \pm i(3+18C \sin \theta)}{2(1+i\frac{2C}{3} \sin \theta)}$	None	
Linear F.E.M./Crank-Nicolson	$M_x \frac{\Delta T_j^{n+1}}{\Delta t} + uL_x \left( \frac{T_j^n + T_j^{n+1}}{2} \right) = 0$	$C^2 u(\frac{\Delta x^2}{12}) \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}$	$\frac{(2 + \cos \theta - 1.5iC \sin \theta)}{(2 + \cos \theta + 1.5iC \sin \theta)}$	None	$M_x = \left\{ \frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6} \right\}$

\* The truncation error (E) has been expressed in terms of dx and x-derivatives as in the modified equation approach (Sect. 9.2.2). Thus the algebraic scheme is equivalent to  $\partial T / \partial t + u \partial T / \partial x + E(T) = 0$ .

Tabla 4.1

Un esquema implícito típico de tres niveles se muestra en la tabla 4.1. Estos esquemas son incondicionalmente estables. No obstante, el uso de esquemas implícitos para ecuaciones hiperbólicas no es necesariamente mejor. Puesto que los esquemas implícitos dan lugar a un sistema de ecuaciones acopladas entre los nodos, una perturbación (por ej, por redondeo) introducida en el nodo (j,n) afectará la solución de todos los otros nodos (j,n+1) en el

siguiente nivel temporal. Físicamente este comportamiento corresponde al de una EDPs parabólica. Al contrario, las perturbaciones en EDPs hiperbólicas se propagan a velocidades finitas. El uso de esquemas implícitos para EDPs hiperbólicas produce en general soluciones inexactas si  $\Delta t$  (o  $C$ ) es grande. Si  $\Delta t$  es chico, o sea  $C \leq 1$  para la ecuación de advección, no hay ventajas de estabilidad en el uso de esquemas implícitos.

#### 4.2 Disipación y dispersión numérica

Teóricamente, las ecuaciones hiperbólicas como la (4.1) no contienen disipación ni dispersión. Las soluciones de esas ecuaciones están caracterizadas por trenes de onda que se propagan sin pérdida de amplitud y sin distorsión de su forma inicial. Es importante que los esquemas numéricos, mas allá de que sean consistentes y estables, no introduzcan disipación no-física ni que alteren la velocidad de propagación de las ondas (dispersión).

Numéricamente es extremadamente difícil diseñar un esquema perfecto que no introduzca disipación ni dispersión numérica. Para ilustrar el comportamiento de los esquemas presentados en la sección previa consideremos la propagación de una onda sinusoidal gobernada por la ecuación advectiva lineal con  $u=0.1$ . Dada una condición inicial

$$T(x,0) = \begin{cases} \text{sen}(10\pi x) & \text{para } 0 \leq x \leq 0.1 \\ 0 & \text{para } 0.1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

y condiciones de borde

$$\begin{aligned} T(0,t) &= 0 \\ T(1,t) &= 0 \end{aligned}$$

la solución exacta, hasta  $t=0.9/u$  es

$$T = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq ut \\ \text{sen}(10\pi(x-ut)) & ut \leq x \leq ut+0.1 \\ 0 & ut+0.1 \leq x \leq 1.0 \end{cases}$$

La solución exacta en  $t=0$  y  $t=8$  se muestra en las Figuras 4.2-4.4. La onda sinusoidal se propaga sin reducción de amplitud a una velocidad  $u=0.1$ . Las figuras muestran también las soluciones numéricas calculadas con los esquemas upwind, Lax-Wendroff y Crank-Nicolson. Las soluciones fueron obtenidas con 41 puntos igualmente espaciados en el intervalo  $0 < x < 1.0$  y un número de Courant  $C=0.8$ .

La salida del programa en  $t=8$  para el esquema upwind se muestra en la figura 4.2. La solución es suave pero comparada con la solución exacta se ve que tiene menor amplitud y parece haberse difundido en el espacio. Esto es consistente con la introducción del término viscoso artificial en la ecuación (4.16).

La solución del esquema Lax-Wendroff mostrada en la figura 4.3 se caracteriza por una onda primaria de amplitud reducida que viaja mas despacio que la solución exacta y la aparición de

ondas secundarias mas atrás. El tren de ondas secundario se denomina “estela de dispersión”. El uso del esquema de Crank-Nicolson resulta en una solución aún mas distorsionada. Se observa una onda primaria que viaja mas despacio que la solución exacta y con una estela de dispersión importante. La pregunta entonces es: ¿cómo son introducidas la dispersión y disipación numérica en el esquema? En lo que sigue trataremos de responder esa pregunta.

En general, la solución de la propagación de una onda plana está sujeta a disipación y dispersión y puede ser escrita como

$$T = \Re(T_{amp} e^{-p(m)t} e^{im(x-q(m)t)}) \quad (4.27)$$

donde  $T_{amp}$  es positiva y real,  $m$  es el número de onda que está relacionado a la longitud de onda  $\lambda=2\pi/m$ . En (4.27)  $p(m)$  determina cuan rápido la amplitud de la onda se atenúa y  $q(m)$  es la velocidad de propagación de la onda. En particular, si el movimiento de la onda plana representada por (4.27) está gobernada por la ecuación advectiva lineal entonces  $p(m)=0$  y  $q(m)=u$ , o sea que ondas de cualquier  $m$  se propagan a la misma velocidad sin atenuación.

Es instructivo considerar dos ecuaciones que están relacionadas con la ecuación advectiva lineal

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} &= 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

La primera de (4.28) es la ecuación de transporte, mientras que la segunda es la ecuación lineal de Korteweg-deVries. Sustituyendo (4.27) en (4.28) se obtiene que las ondas planas satisfacen

$$p(m) = \alpha m^2 \quad \text{y} \quad q(m) = u$$

para el caso de la ecuación de transporte, y

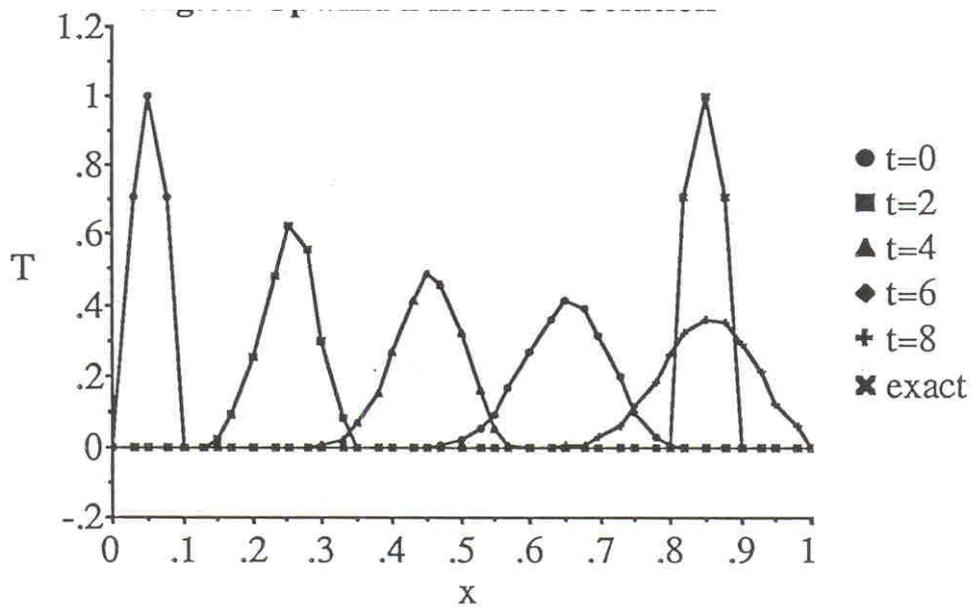
$$p(m) = 0 \quad \text{y} \quad q(m) = u - \beta m^2$$

para el caso de la ecuación de Korteweg-deVries.

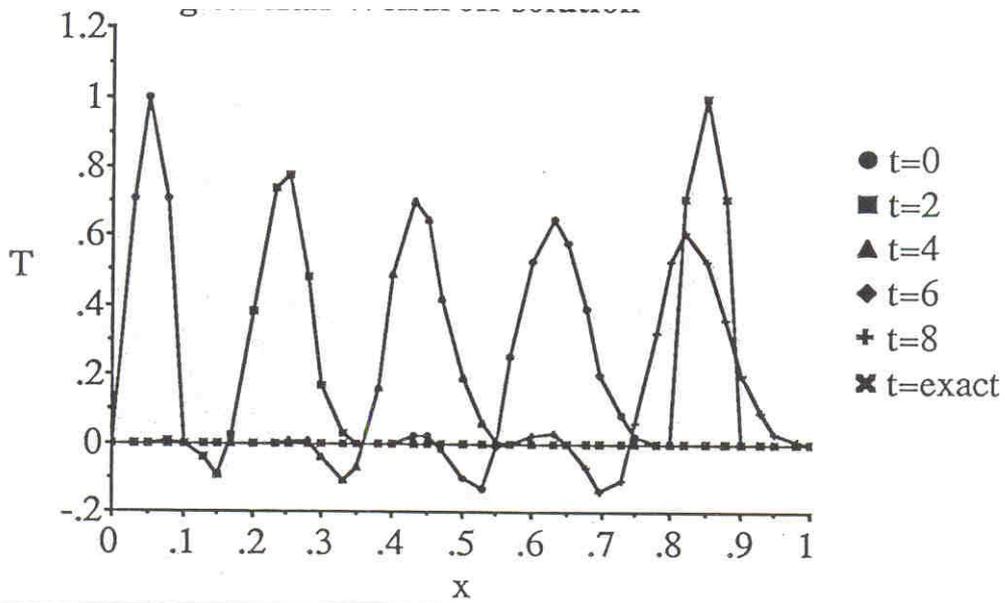
Esto significa en la ecuación de transporte la solución es atenuada por el término difusivo pero la velocidad de la onda no se ve afectada. Como  $m=2\pi/\lambda$  las ondas cortas son atenuadas mucho mas rápidamente que las ondas largas. Por otro lado, en la ecuación de Korteweg-deVries la solución no cambia de amplitud pero las ondas se propagan a velocidades que dependen de su longitud de onda, o sea hay dispersión. Podemos así definir formalmente disipación como la atenuación de la amplitud de ondas planas y dispersión como la dependencia de la velocidad de la onda  $q(m)$  en función de su número de onda. A través del rol de las derivadas de mayor orden en (4.28) podemos asociar disipación positiva con la

aparición de derivadas espaciales de orden par multiplicados por coeficientes de signo alternado. Igualmente, una reducción de la velocidad de propagación puede asociarse a la aparición de derivadas espaciales de orden impar multiplicados por coeficientes de signo alternado.

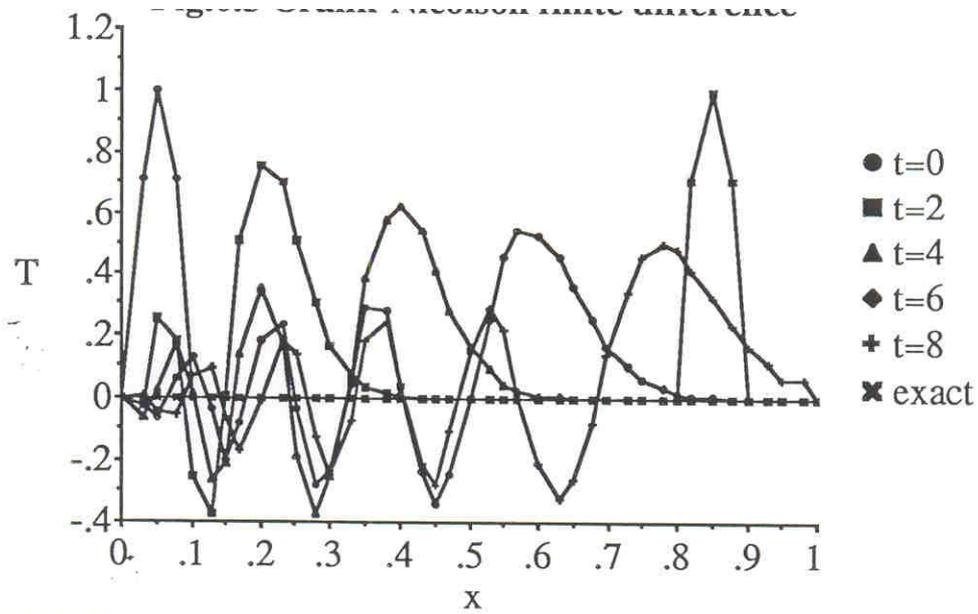
Recordemos que al examinar la consistencia de las ecuaciones discretizadas vimos que el algoritmo computacional es equivalente a la EDP original mas un error de truncamiento que consiste típicamente de derivadas de mayor orden par e impar sucesivas. La relación entre disipación, dispersión y derivadas de mayor orden en el error de truncamiento es la clave para comprender el comportamiento de las soluciones dadas por varios esquemas numéricos.



**Figura 4.2** – Solución exacta y aproximada usando esquema upwind.



**Figura 4.3** – Solución exacta y aproximada usando esquema Lax-Wendroff.



**Figura 4.4** – Solución exacta y aproximada usando esquema Crank-Nicolson.

#### 4.2.1 Método de la ecuación modificada

La solución exacta de las ecuaciones discretizadas satisface una EDP que es generalmente diferente a la que se quiere resolver. Por ejemplo, si la EDP original es

$$\frac{\partial T}{\partial t} + L T = 0 \quad (4.29)$$

la ecuación modificada a partir de las ecuaciones algebraicas  $\mathbf{A}T^{n+1} = \mathbf{B}T^n$  es

$$\frac{\partial T}{\partial t} + L T = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{2p} \frac{\partial^{2p} T}{\partial x^{2p}} + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{2p+1} \frac{\partial^{2p+1} T}{\partial x^{2p+1}} \quad (4.30)$$

La motivación del uso de este método proviene del hecho de que si bien las EDP son muy difícil o imposibles de resolver analíticamente, su comportamiento cualitativo es más fácil de predecir que aquel de las ecuaciones algebraicas.

La metodología consiste en dos pasos:

- expandir los valores en los nodos en el esquema diferencial en una serie de Taylor doble alrededor de un punto  $(j,n)$  para obtener una EDP.
- Expresar las derivadas temporales de mayor orden así como derivadas mixtas en términos de derivadas espaciales de tal forma que el error de truncamiento quede expresado solamente en términos de derivadas espaciales.

En la ecuación modificada las derivadas de orden impar están asociadas a la dispersión y las derivadas pares a la disipación. Por lo tanto considerando los términos de menor orden par e impar en la ecuación modificada podemos deducir las propiedades disipativas y dispersivas del esquema algebraico para longitudes de onda largas. Esto es pues la ecuación modificada está basada en un desarrollo de Taylor que asume  $\Delta t$  y  $\Delta x$  chicos. No obstante, en general es el comportamiento de gran escala el interesante.

Como ejemplo consideremos las soluciones de los esquemas upwind y Lax-Wendroff. De acuerdo a la tabla 4.1 para el esquema upwind tenemos un error de truncamiento

$$-u \left( \frac{\Delta x}{2} \right) (1-C) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + u^2 \frac{\Delta x^2}{6} (1-3C+2C^2) \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \quad (4.31)$$

y para el esquema Lax-Wendroff

$$-u \left( \frac{\Delta x^2}{6} \right) (1-C^2) \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + uC \frac{\Delta x^3}{8} (1-C^2) \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} \quad (4.32)$$

Por lo tanto, el esquema upwind tiene un error de disipación de primer orden y un error de dispersión de segundo orden, mientras que el esquema de Lax-Wendroff tiene un error de dispersión de segundo orden y de disipación de tercer orden. Esta es la razón por la cual se

observan mas efectos de disipación en la figura 4.2 y de dispersión en la figura 4.3.

En los últimos años se han diseñado esquemas que tienen menor error de disipación y dispersión. No obstante, esos esquemas son mucho mas complicados que los esquemas clásicos mencionados en este capítulo y son difíciles de usar en la práctica.

### **Bibliografía principal**

- Computational Techniques for Fluid Dynamics 1, Fletcher.