1. Ecuaciones de la atmósfera y su clasificación

1. Introducción

La figura 1.1 indica esquemáticamente las escalas de tiempo y escalas horizontales asociadas a varios fenómenos atmosféricos. Las escalas mayores, de 10^4 km, están asociadas a las ondas planetarias y ondulaciones de la corriente en chorro; las menores a turbulencia en la capa límite donde los remolinos tienen escalas de cientos de metros a milímiteros (y difusión molecular es importante). En escalas intermedias aparecen los ciclones, frentes y nubes.

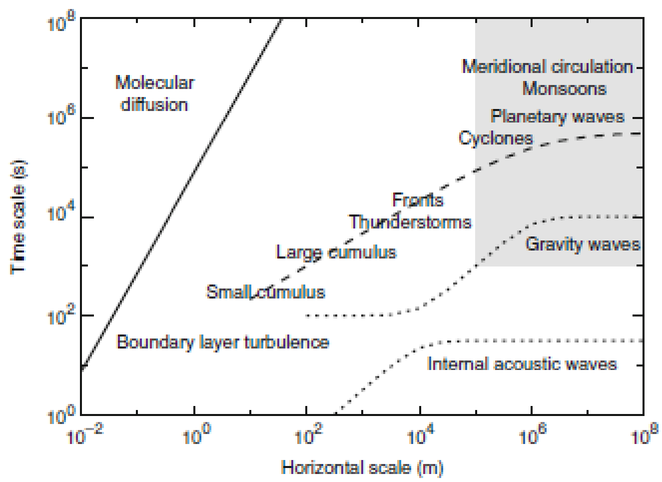

Figura 1.1 – Escala horizontales y temporales de fenómenos atmosféricos.

El espectro atmosférico de energía cinética horizontal tiene una pendiente cercana a k^{-3} en escalas largas y $k^{-5/3}$ en escalas chicas, donde k es el número de onda, con una transición gradual entre ambas pendientes. La curva quebrada de la figura 1.1 muestra ese comportamiento expresada en términos de escalas horizontales y temporales. Así, los fenómenos que dominan el espectro atmosférico de energía son aquellos que está cerca de la línea quebrada. La difusión molecular, por otro lado, es sólo importante a la izquierda de la línea contínua en figura 1.1, y por lo tanto es completamente despreciable hasta escalas de 1 mm.

Como se puede observar de la figura, hay fenómenos atmosféricos importantes en todas las escalas, por lo que no hay un quiebre significante en el espectro que separe las escalas grandes de las escalas chicas. Asimismo, hay interacciones fuertes entre los fenómenos en las diferentes escalas. No obstante, dado que los recursos computacionales son finitos los modelos numéricos tienen una resolución finita, y en general tienen una grilla que representa los fenómenos de la región gris en la figura 1.1. Los procesos no resueltos por la grilla no pueden despreciarse y deben ser parametrerizados.

En la primera parte del curso describiremos técnicas sobre cómo modelar la dinámica resuelta por la grilla; luego, se verá como introducir el efecto de las escalas no resueltas en las escalas grandes a través de la paramterización de esos fenómenos. Al día de hoy se está trabajando en mejorar tanto los formalismos numéricos de la grilla resuelta, así como la parameterización de procesos sub-grilla.

La figura 1.1 muestra dos líneas punteadas que representan las relaciones de dispersión de las ondas gravito-inerciales y de las ondas de sonido. Estas ondas tienen velocidades de cientos de metros por segundo por lo que los modelos deben usar pasos temporales muy pequeños. Por otro lado, esta ondas son energéticamente débiles comparadas con los procesos dominantes y por lo tanto es posible distorsionar su propagación sin causar mucho daño a la solución. Eso permite usar pasos temporales mas largos.

2. Ecuaciones primitivas

Las ecuaciones que gobiernan la atmósfera son

$$
\begin{aligned}
x-\textbf{momentum:}\quad & \frac{\partial u}{\partial t}+u\,\frac{\partial u}{\partial x}+v\,\frac{\partial u}{\partial y}+w\,\frac{\partial u}{\partial z}-fv= \\
& -\frac{1}{\rho_0}\,\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{A}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathcal{A}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_E\frac{\partial u}{\partial z}\right) \\
y-\textbf{momentum:}\quad & \frac{\partial v}{\partial t}+u\,\frac{\partial v}{\partial x}+v\,\frac{\partial v}{\partial y}+w\,\frac{\partial v}{\partial z}+fu= \\
& -\frac{1}{\rho_0}\,\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{A}\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathcal{A}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_E\frac{\partial v}{\partial z}\right) \\
z-\textbf{momentum:}\quad & 0\;=\;-\,\frac{\partial p}{\partial z}\;-\;\rho g \\
\textbf{continuity:}\quad & \frac{\partial u}{\partial x}\;+\;\frac{\partial v}{\partial y}\;+\;\frac{\partial w}{\partial z}\;=\;0 \\
\textbf{energy:}\quad & \frac{\partial \rho}{\partial t}+u\,\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\,\frac{\partial \rho}{\partial y}+w\,\frac{\partial \rho}{\partial z}= \\
& \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{A}\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathcal{A}\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa_E\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\;,
\end{aligned}
$$

Estas ecuaciones se denominan **ecuaciones primitivas** pero ya se han hecho algunas suposiciones sobre el comportamiento de la atmósfera. Entre ellas: 1) aproximación de Boussinesq, 2) aproximación hidrostática, 3) geoide esférico, 4) viscocidad turbulenta como forma de representar el efecto de la pequeña escala sobre la grilla, 5) aproximación de atmósfera somera pues se despreciaron los términos de Coriolis que consideran la componente horizontal de Ω así como términos métricos y sustitución de *r* por *a* (radio terrestre).

Una desventaja de usar las ecuaciones primitivas es que son muy sensibles a las condiciones iniciales. A menos que las condiciones iniciales estén balanceadas el modelo generará ondas de gravedad de gran amplitud al tratar de llegar a un equilibrio geostrófico aproximado. Esto genera ruido en la solución del modelo que dificulta la interpretación, en particular cuando se quiere usar el modelo para hacer un pronóstico del tiempo. Es común que las condiciones iniciales no estén balanceadas ya que la red de observaciones es densa en ciertas regiones continentales del hemisferio norte, mientras que es pobre en el resto del mundo. A fin de paliar este problema y evitar el ajuste incial del modelo se usa un modelo de asimilación de datos para generar unas condiciones iniciales que sean consistentes dinámicamente con las que luego será alimentado el modelo de atmósfera.

3. La aproximación cuasi-geostrófica

Los primeros modelos numéricos de predicción del tiempo usaron la aproximación cuasi-geostrófica que consiste en sustituir el viento real por el viento geostrófico excepto cuando se calcula la divergencia. La aproximación Q-G elimina las ondas de sonido y las de gravedad como soluciones de las ecuaciones de movimiento. Por ello las ecuaciones Q-G se denominan ecuaciones filtradas. Esta aproximación permite usar un paso temporal mas largo, así como eliminar el problema de balancear las condiciones iniciales.

La ecuación de vorticidad Q-G es

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} + \vec{V}_g \bullet \nabla \zeta_g + \beta v_g = -f \nabla \bullet \vec{V}$$

la cual se puede escribir, usando la ecuación de continuidad, como

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} + \vec{V}_g \bullet \nabla \zeta_g + \beta v_g = f \frac{\partial \omega}{\partial p}$$

De la última ecuación se observa que en una atmósfera cuasi-geostrófica hay solamente dos posibilidades de cambiar la vorticidad relativa de una parcela de fluido: 1) advección de vorticidad planetaria (relativa y planetaria), 2) divergencia.

4. Condiciones iniciales y de borde

Las ecuaciones primitivas contienen derivadas de primer orden en *u,v* y ρ por lo que son necesarias condiciones iniciales tri-dimensionales de cada uno de estos campos. En general, variables que necesitan condiciones iniciales se denominan variables de estado o de pronóstico. Las variables restantes (*w, p*) que no tienen derivadas temporales se denominan variables diagnósticas.

Las condiciones que deben aplicarse en las fronteras espaciales del dominio son mas difíciles de considerar. La teoría matemática de las ecuaciones en derivadas parciales muestra que el número y tipo de las condiciones de borde necesarias dependen de la naturaleza de la ecuación. La clasificación estandard distingue entre ecuaciones hiperbólicas, parabólicas y elípticas. El método de clasificación está basado en el concepto de *características* que son líneas a lo largo de las cuales se propaga la información. La geometría de esas líneas restringe cómo se propaga la información desde las fronteras hacia el dominio o desde el dominio hacia las fronteras y por lo tanto prescribe las regiones en las cuales debe especificarse las condiciones de borde para que la solución sea única en el dominio.

El conjunto de ecuaciones primitivas es mas complicado que una ecuación de segundo orden para la cual es posible clasificar los diferentes tipos y además el tipo de ecuación puede cambiar con la solución. La propagación de información en la atmósfera se realiza a través de advección y propagación de ondas que pueden entrar o salir por el mismo segmento de frontera. Por lo tanto en diferentes momentos de la solución puede necesitarse diferentes tipos de condiciones de borde. Así, no es trivial establecer el conjunto de condiciones de frontera matemáticamente correcto, y muchas veces la elección se basa puramente en argumentos físicos. El buen comportamiento de la solución se analiza a posteriori.

Por ejemplo, cuando la atmósfera es perturbada del equilibrio hidrostático, ésta se ajusta irradiando ondas acústicas internas y ondas gravitato-inerciales. Al hacer la aproximación hidrostática se filtran las ondas acústicas de las ecuaciones; mas precisamente las ondas acústicas pasan a tener velocidad infinita haciendo que el ajuste sea instantáneo. En las ecuaciones no aproximadas las ondas y la información se propagan a velocidad finita y las ecuaciones son hiperbólicas. Pero la aproximación hidrostática introduce una cierta no-localidad y eso se refleja en la aparición de un problema de frontera 1-D.

Ideas similares se aplican al balance geostrófico. La atmósfera se ajusta irradiando ondas gravito-inerciales. La aproximación Q-G filtra estas ondas, o equivalentemente, le asigna una velocidad infinita de tal forma que el ajuste es instantáneo. La no-localidad aparece matemáticamente en la aparición de una ecuación elíptica que debe ser resuelta para calcular la tendencia del campo de pronóstico, en este caso de la vorticidad potencial.

De cualquier manera es posible definir una serie de condiciones de borde que debe cumplir la atmósfera. Por ejemplo, la atmósfera no puede atravesar el suelo o una montaña. Esta **condición cinemática** (pues sólo considera velocidades) se expresa de forma que la velocidad debe ser tangente a la superficie, y se impone haciendo que la superficie sea una frontera material del fluido, que no sea atravesado por el aire y que no se mueva

$$\frac{d}{dt}(z-b) \;=\; 0,$$

donde *b* es la topografía (ver figura 1.2) y se puede reescribir como

$$w = u\frac{\partial b}{\partial x} + v\frac{\partial b}{\partial y}$$

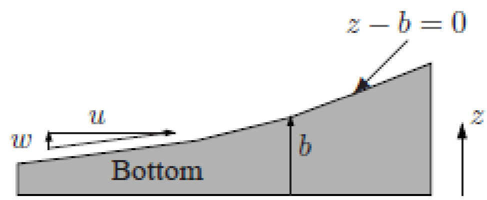

Figura 1.2 – Condiciones de borde en superficie.

Puesto que la atmósfera es viscosa está sujeta a fricciones internas y las parcelas de atmósfera quedarían adheridas a la superficie. Por lo tanto su velocidad debe ser nula. Esta es una **condición dinámica** pues toma en cuenta fuerzas. Otra condición dinámica, por ejemplo, es que en la interfase aire-agua es necesario imponer un balance de presiones ($p_{atm}=p_{ocn}$).

En las ecuaciones que gobiernan la evolución de la temperatura o la densidad es posible imponer el valor de la variable, su gradient o una combinación. En situaciones es posible conocer el valor de la variable (por ej. de TSM a través de medidas de satélite) por lo que es natural usar eso de condiciones de frontera (condicion de Dirichlet). Otras veces se impone el gradiente (condiciones de Neumann) cuando se quiere imponer el flujo difusivo de alguna cantidad (calor, masa) y está asociado a la prescripción de interacmbios turbulentos aire-agua. Condiciones mixtas (de Cauchy) se usan cuando se quiere imponer el flujo difusivo y advectivo.

Si bien la atmósfera no tiene una frontera superior definida, por razones prácticas los modelos deben imponer una frontera en algún nivel. Cuando la coordenada vertical es la altura se impone que la velocidad vertical sea nula en el último nivel del modelo. Si la coordenada vertical es la presión se impone dp/dt=0, o sea que no haya flujo de masa, en un cierto nivel de presión que muchas veces se elige como aquel con p=0.

4. Clasificación de ecuaciones en derivadas parciales por características

En la sección anterior notamos que las ecuaciones que gobiernan la atmósfera pueden clasificarse en diferentes tipos dependiendo de las aproximaciones realizadas. Por ello, es instructivo estudiar los diferentes tipos de ecuaciones en derivadas parciales para saber cómo se relaciona la frontera con el dominio.

Recordemos: el orden de una ecuación diferencial está dado por la derivada parcial de mayor orden.

Una ecuación diferencial es lineal si no tiene productos o potencias de las variables o sus derivadas. La teoría matemática de ecuaciones lineales puede, bajo ciertas hipótesis, extenderse a ecuaciones cuasi-lineales, que son un subconjunto de EDP no-lineales. Una ecuación diferencial es cuasi-lineal si no contiene potencias o productos de las derivadas parciales de mayor orden. Un ejemplo de ecuación cuasi-lineal es la ecuación de vorticidad para un flujo 2-D no divergente:

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} = 0, \tag{1.1}$$

donde ψ es la función corriente.

La forma general de una ecuación cuasi-lineal de segundo orden, con dos variables independientes *x* e *y*, es

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + H = 0 \tag{1.2}$$

donde A, B, C y H son funciones de x, y, u, $\partial u/\partial x$ y $\partial u/\partial y$. La ecuación anterior puede clasificarse en tres categorías según

EDP elíptica: $B^2 - 4AC < 0$
EDP parabólica: $B^2 - 4AC = 0$
EDP hiperbólica: $B^2 - 4AC > 0$.

Esta clasificación puede entenderse en términos de las curvas características de las ecuaciones en derivadas parciales. Características son curvas a lo largo de las cuales las ecuaciones solo tienen diferenciales totales, o sea, la EDP se convierten en EDO.

4.1 Ecuaciones hiperbólicas de primer orden

Muchos tipos de ondas pueden ser descritas matemáticamente como soluciones de EDP hiperbólicas. Una EDP hiperbólica de primer orden en dos variables independientes tiene la forma general

$$A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} = C \tag{1.3}$$

donde A, B y C dependen de (x,y,u). Esta ecuación es hiperbólica pues existe una familia de curvas características en el plano x-t a lo largo de la cual la solución puede ser determinada integrando EDO. Estas curvas características tienen una dirección dada por

$$\frac{dx}{dt} = \frac{B}{A} \tag{1.4}$$

(ver figura 1.3). A lo largo de esta característica la ecuación original se reduce a

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{C}{A} \\ \frac{du}{dx} &= \frac{C}{B} \end{aligned} \tag{1.5}$$

La solución a (1.4) se encuentra integrando (1.5) como EDO a lo largo de la grilla definida por (1.4), con la condición de que los datos iniciales son dados en una línea no-característica. En general, se determina las condiciones iniciales de u en t=0. Toda perturbación de la distribución de u en el punto (x0,t0) se trasladará a la velocidad dx/dt=B/A.

La evolución de la solución es particularmente simple cuando C=0 y B/A=c (constante), en cuyo caso la ecuación (1.3) se reduce a

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{1.6}$$

Si u(x,0)=f(x) la solución de (1.6) es f(x-ct), implicando que la perturbación inicial en u se traslada sin distorción a velocidad uniforme c. Notar que (1.6) es una ecuación de advección, pero también se puede interpretar como la ecuación que describe la propagación de una onda en una sola dirección.

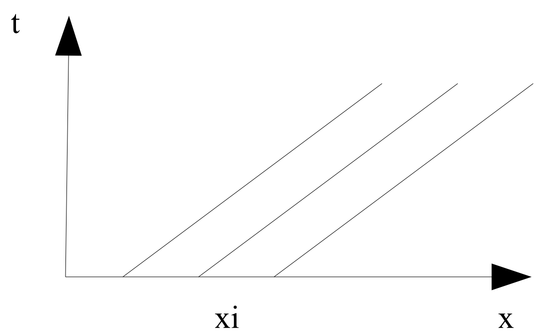

Figura 1.3 – Características de una EDP hiperbólica de 1er orden. La pendiente de las rectas es A/B.

4.2 Ecuaciones de segundo orden

El mismo concepto de direcciones características puede ser usado para las EDPs de segundo orden en dos variables independientes dada por (1.2). O sea, es posible encontrar para cada punto del dominio dos direcciones a lo largo de las cuales (1.2) puede ser integrada considerando diferenciales totales. La existencia de esas direcciones características está relacionada directamente con el tipo de EDP.

Introducimos la siguiente notación

$$P=\frac{\partial u}{\partial x}, Q=\frac{\partial u}{\partial y}, R=\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}, S=\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, T=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1.7}$$

Sea una curva K en el interior del dominio en la cual P,Q,R,S,T y u satisfacen (1.7). A lo largo de una tangente de K los diferenciales de P y Q satisfacen

$$dP = Rdx + Sdy \tag{1.8}$$

$$dQ = Sdx + Tdy \tag{1.9}$$

y (1.2) puede ser reescrita como

$$AR+BS+CT+H=0 \tag{1.10}$$

En (1.8) y (1.9) dy/dx define la pendiente de la tangente a K. Usando (1.8) y (1.9), R y T pueden ser eliminados de (1.10) resultando en

$$S[A(\frac{dy}{dx})^2 - B(\frac{dy}{dx})+C]-[A(\frac{dP}{dx})+H]\frac{dy}{dx}+\frac{CdQ}{dx}=0 \tag{1.11}$$

Si dy/dx se elige tal que

$$[A(\frac{dy}{dx})^2 - B(\frac{dy}{dx})+C]=0 \tag{1.12}$$

entonces (1.11) se reduce a

$$[A(\frac{dP}{dx})+H]\frac{dy}{dx}+\frac{CdQ}{dx}=0 \tag{1.13}$$

Las dos soluciones de (1.12) definen las direcciones características para las cuales vale (1.13). De (1.12) está claro que si (1.2) es:

I) hiperbólica, $B^2 - 4AC > 0$, existen dos raíces reales
II) parabólica, $B^2 - 4AC=0$, existe una raiz real
III) elíptica, $B^2 - 4AC <0$, las características son complejas.

Por lo tanto, la consideración del discriminante, B^2-4AC, determina el tipo de EDP y la naturaleza de las características.

4.3 Generalizaciones

Extender el estudio de características para mas de dos variables no es muy útil. En m dimensiones es necesario considerar superficies de dimensión (m-1). No obstante, examinando los coeficientes que multiplican las derivadas de mayor orden puede, en principio, proveer información.

Para una EDP de N variables independientes

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} a_{jk}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}+H=0 \qquad (1.14)$$

los autovalores λ de la matriz A determina los tipos de EDPs:

I) Si existe un λ=0, la EDP es parabólica
II) Si todos los autovalores son diferentes de cero y del mismo signo, la EDP es elíptica
III) Si todos los autovalores son diferentes de cero y todos menos uno son del mismo signo, la EDP es hiperbólica.

Para un sistema de n EDPs de primer orden en dos variables independientes x e y,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x}+b_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial y}+e_{ij}=0,\quad i=1,\ldots,n \qquad (1.15)$$

la ecuación característica está dada por

$$[A(\frac{dy}{dx})-B]L=0 \qquad (1.16)$$

donde A es la matriz de coeficientes asociada con la derivada en x y B es la asociada con la derivada en y. L es la matriz de autovectores. El caracter del sistema de ecuaciones depende de la solución de

$$det[A(\frac{dy}{dx})-B]=0 \qquad (1.17)$$

I) Si hay n raíces reales el sistema es hiperbólico
II) Si hay m raíces reales, 1<= m <= n-1, y no existen ra'ices complejas, el sistema es parabólico
III) Si no existen raíces reales el sistema es elíptico.

Para sistemas de ecuaciones grandes algunas raíces pueden ser complejas y otras reales lo cual da un sistema mezclado. La división mas importante es entre EDPs elípticas y no elípticas pues las EDPs elípticas no permiten comportamiento temporal. Por lo tanto el sistema de ecuaciones se asumirá elíptico si existe alguna raíz compleja.

Para sistema de más de dos variables independientes es posible generalizar parcialmente (1.17) de la siguiente manera. Un sistema de n ecuaciones de primer orden en 3 variables independientes puede ser escrito como

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x}+b_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial y}+c_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial z}+e_{ij}=0,\ \ i=1,\ldots,n \qquad (1.18)$$

que da lugar al polinomio de orden n característico

$$det[A\lambda_x+B\lambda_y+C\lambda_z]=0 \qquad (1.19)$$

donde λx, λy, λz definen la dirección normal a la superficie en (x,y,z). La ecuación (1.19) generaliza (1.17) y da la condición de superficie característica, que debe tener raíces reales. Si se obtienen n raíces reales el sistema es hiperbólico.

4.4 EDPs hiperbólicas

Como vimos mas arriba el ejemplo mas simple de EDP hiperbólica es la ecuación que gobierna el transporte o advección de una cantidad conservativa q (por ejemplo, vorticidad potencial)

$$\frac{\partial q}{\partial t}+u\frac{\partial q}{\partial x}+v\frac{\partial q}{\partial y}=0 \qquad (1.20)$$

La ecuacion de advección, además de describir procesos de gran importancia en la atmósfera, provee un marco simple para analizar analíticamente los algoritmos numéricos.

Para las EDPs hiperbólicas es posible usar las direcciones características para desarrollar una grilla computacional en la cual valen las condiciones de compatibilidad (ej, ecuación 1.11). Hoy día esta metodología ya no se usa.

El otro ejemplo de EDP hiperbólica (en este caso de segundo orden) es la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \qquad (1.21)$$

Para condiciones iniciales u(x,0)=sinπx, ∂u/∂x=0 y condiciones de frontera u(0,t)=u(1,t)=0, (1.21) tiene la solución exacta u(x,t)=sinπxcosπt.

Las EDPs hiperbólicas producen características reales. Para la ecuación de ondas (1.21) las direcciones características están dadas por dx/dt=+-1. En el plano (x,t) las características a través de un punto P se muestran en la figura 1.4.

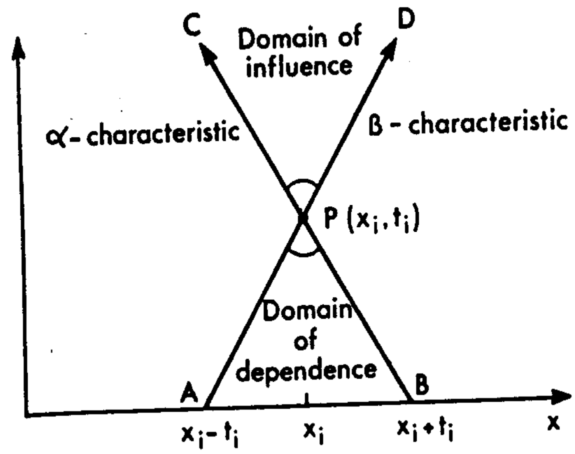

Figura 1.4 – Características de la ecuación de ondas.

Notar que en las ecuaciones hiperbólicas no hay mecanismos de disipación presentes. Una perturbación a la solución u en P puede solamente influenciar el resto de la solución en el dominio CPD. Al mismo tiempo, la solución en P es influenciada por perturbaciones en el dominio APB solamente. Si se especifican condiciones iniciales en t=0, por ejemplo en AB, es suficiente para determinar la solución en P (única).

La no existencia de mecanismos de disipación en EDPs hiperbólicas implica que si en las condiciones iniciales o en las de borde existe una discontinuidad estas serán transmitidas al interior del dominio a lo largo de las características sin atenuación en ecuaciones lineales.

4.5 EDPs parabólicas

Estas ecuaciones ocurren cuando los problemas de propagación incluyen mecanismos disipativos. El ejemplo clásico es la ecuación de difusión

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1.22)$$

Para condiciones iniciales u=sinπx y condiciones de borde u(0,t)=u(1,t)=0 (1.22) tiene la solución exacta

$$u(x,t)=\sin \pi x\, e^{-\pi^2 t} \quad .$$

La interpretación de (1.22) en la forma de (1.2) con y=t indica que A=1, B=C=0 y por lo tanto (1.22) es parabólica. Solución de (1.12) indica que esta ecuación tiene una única dirección característica definida por dt/dx=0. La figura 1.5 muestra un dominio computacional típico.

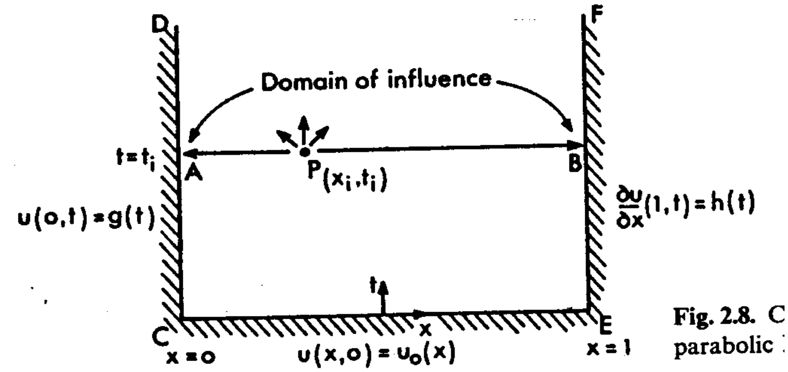

Figura 1.5 – Dominio computacional de la ecuación de difusión.

Problemas con EDPs parabólicas tienen soluciones que marchan hacia delante en el tiempo pero son difusas en el espacio. Por lo tanto una perturbación a la solución introducida en P puede influenciar cualquier parte del dominio computacional para t>=ti (figura 1.5). No obstante, la magnitud de la perturbación se atenúa rápidamente al alejarse de P.

La incorporación de un mecanismo de disipación implica que aún si las condiciones iniciales incluyen una discontinuidad, la solución en el interior será siempre contínua. EDPs en mas de una dirección que son parabólicas se vuelven elípticas en el estado estacionario (si existe).

4.6 EDPs elípticas

En dinámica de fluídos las EDPs elípticas se asocian con problemas estacionarios. La forma mas simple de EDP elíptica es la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}=0 \tag{1.23}$$

que gobierna un flujo potencial incompresible.

La ecuación de Poisson para encontrar la función corriente a partir de la vorticidad, en un flujo bidimensional rotacional es tambien una EDP elíptica.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}=\zeta$$

La ecuación de Navier-Stokes estacionaria es una EDP elíptica.

Para el caso general de una EDPs de segundo orden elíptica las curvas características son complejas y no pueden mostrarse en el dominio computacional, por lo que no son útiles.

La característica mas importante de las EDPs elípticas es que una perturbación introducida en un punto interior P, como se muestra en la figura 1.6, influencia todos los otros puntos del dominio computacional (aunque lejos de P la influencia será chica). Esto implica que al buscar soluciones computacionales a problema elípticos es necesario considerar el dominio global. En los casos de EDPs hiperbólicas y parabólicas eso no es necesario y se pueden resolver marchando progresivamente en el tiempo partiendo desde las condiciones iniciales.

Discontinuidades en condiciones de frontera en EDPs elípticas serán suavizadas en el interior. La abilidad para influenciar todos los otros puntos del dominio desde un punto interior implica que condiciones de borde son requeridas en todas las fronteras.

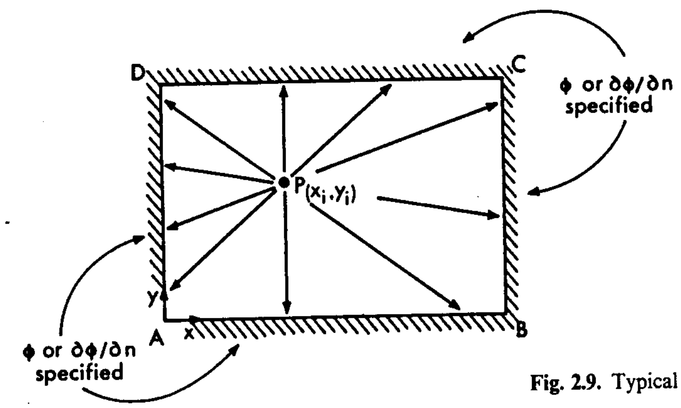

Figura 1.6 – Dominio típico de una ecuación elíptica.

4.7 Resumen

Para resumir, en el caso de ecuaciones hiperbólicas y parabólicas uno quiere determinar la evolución de la solución en el tiempo con cierto grado de precisión; en el caso de ecuaciones elípticas uno quiere encontrar la solución imponiendo condiciones en la frontera. En este último caso no se puede integrar “desde la frontera” de la misma forma que se integra “desde las condiciones iniciales” para ecuaciones hiperbólicas, sino que es necesario que el algoritmo converja a la solución correcta en todos lados al mismo tiempo.

Entonces, desde el punto de vista computacional, la distinción mas importante es entre resolver un problema de condiciones iniciales, y un problema de condiciones de borde. La subclasificación entre problemas de condiciones iniciales hiperbólicos y parabólicos es secundaria pues en general se tienen sistemas mixtos. En el caso de problemas de condiciones iniciales la principal preocupación es la estabilidad del algoritmo, mientras que en el caso de problemas de condiciones de borde uno debe enfocar en la eficiencia ya que su resolución implica generalmente resolver un gran número de ecuaciones algebraicas en forma simultánea.

Bibliografía principal

– Computational Techniques for Fluid Dynamics 1, Fletcher.