Algoritmos de Aproximación

Clase 2
Teoremas fundamentales en combinatoria

Pablo Romero

Jueves 10 de agosto de 2023. Montevideo, Uruguay.

Introducción

Introducción

- Un teorema *minimax* establece que el valor óptimo de un problema de minimización es igual a otro de maximización.
- Existe una serie de teoremas minimax equivalentes que se deducen del teorema fuerte de dualidad de programación lineal.
- König, en el primer libro de teoría de grafos, establece un teorema minimax relevante en la teoría de emparejamientos.
- Estudiaremos vínculos entre emparejamientos, flujos en redes y programación lineal.
- Una valiosa bibliografía para profundizar es el libro de *Matching Theory* de Laszlo Lovasz y Michael Plummer.

Enunciados

Teorema 1 (König).
En todo grafo bipartito, el tamaño de un emparejamiento máximo es igual al de un cubrimiento de vértices de mínimo cardinal.

Teorema 2 (Ford y Fulkerson).
El flujo máximo de una red es igual a su capacidad de corte mínimo.

Corolario 1.
Si todas las capacidades de la red son enteras, entonces el flujo de cada arco es también entero.

Emparejamiento Máximo - ILP

Sea $G = (V, E)$ un grafo bipartito con $V = A \cup B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Para cada $v \in V$, sea $E_v = \{i : v \subseteq e_i\}$. Sea x_i la variable binaria que vale 1 si $e_i \in M$ o 0 en caso contrario. Podemos formular el problema de hallar el emparejamiento máximo mediante el siguiente ILP:

$$\max_{x_i} \sum_{i=1}^{|E|} x_i$$
$$s.t. \sum_{i \in E_v} x_i \leq 1, \ \forall v \in V$$
$$x_i \in \{0,1\}, \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}$$

Como este ILP tiene una cantidad finita y no vacía de soluciones factibles alcanza máximo, que llamamos M_{ILP}.

Emparejamiento Máximo - LP

Vamos a tomar una relajación del anterior ILP y expresarlo en notación matricial. Sea $A = (a_{ij})$ la matriz de incidencia de tamaño $|V| \times |E|$ tal que $a_{ij} = 1$ si y sólo si $v_i \in e_j$. Sea $\mathbf{1}_n$ la tupla con n coordenadas iguales a 1 y $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. La relajación resulta:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}} \ & \mathbf{1}_n^t \mathbf{x} \\ s.t. \ A\mathbf{x} & \leq \mathbf{1}_n \\ \mathbf{x} & \geq 0 \end{aligned}$$

Notar que la región factible es un conjunto compacto y que la función objetivo es continua. Por el Teorema de Weierstrass, alcanza un máximo, que llamaremos M_{LP}.

Problema dual

Tomemos el dual del anterior problema:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{y}} \ & \mathbf{1}_n^t \mathbf{y} \\ s.t. \ A^t \mathbf{y} &\geq \mathbf{1}_n \\ \mathbf{y} &\geq 0 \end{aligned}$$

Sea VC_{LP} su valor óptimo. Por el teorema fuerte de dualidad, $VC_{LP} = M_{LP}$. Ahora formulemos el cubrimiento de vértices:

$$\begin{aligned} \min_{y_i} \ & \sum_{i=1}^{|V|} y_i \\ s.t. \ y_i + y_j &\geq 1, \forall ij \in E \\ y_j &\in \{0,1\} \ \forall j \in \{1,2,\dots,|V|\} \end{aligned}$$

Como la región factible es finita y no vacía, alcanza mínimo VC_{ILP}. Su problema relajado es el anterior! ¿Ya probamos König?

Unimodularidad

Defінción 1.

Una matriz A de tamaño $m \times n$ es totalmente unimodular si el determinante de todas sus submatrices cuadradas es -1, 0, o 1.

Teorema 3.

Si A es totalmente unimodular y b es integral positivo entonces la región factible $R = \{x : Ax \leq b; x \geq 0\}$ es integral.

Prueba. Las coordenadas no nulas de toda solución básica factible se encuentran resolviendo los sistemas lineales $\hat{A}\hat{x} = b$, donde $\hat{A}$ consiste en una selección de filas de A de modo que no sea singular. Por la regla de Cramer, $x_i = \frac{det(\hat{A}_i)}{\det(\hat{A})}$, donde $\hat{A}_i$ reemplaza la columna i de $\hat{A}$ por b. Entonces, $\det \hat{A}_i$ es entero y como A es totalmente unimodular y $\hat{A}$ es no singular, $\hat{A} \in \{-1, 1\}$. Luego x es integral. ■

Prueba del Teorema de König

Teorema 4.

Sea $G = (V, E)$ un grafo bipartito y sea $M_G = (m_{ij})$ la matriz de tamaño $|V| \times |E|$ tal que $m_{ij} = 1$ si $\{i, j\} \in E$ o $m_{ij} = 0$ en caso contrario. Entonces, M es totalmente unimodular.

Ejercicio 1

Demostrar el Teorema 4. Dar un grafo G tal que M_G no es TUM.

Prueba. (del Teorema de König). Probemos que $M_{ILP} = VC_{ILP}$. Por las relajaciones antes presentadas, $M_{LP} \geq M_{ILP}$ y $VC_{LP} \leq VC_{ILP}$. Por el Teorema de Poincaré, tanto A^t como A son totalmente unimodulares. Luego, por el Teorema de integralidad se sigue que $VC_{LP} = VC_{ILP}$, y que $M_{LP} = M_{ILP}$. Por el teorema fuerte de dualidad, tenemos que $M_{LP} = VC_{LP}$, y por transitiva concluimos que $M_{ILP} = VC_{ILP}$, como queríamos demostrar. ∎

Otros teoremas minimax

El teorema de König es equivalente a otros teoremas minimax.

Teorema 5 (Menger).

Sea $G = (V, E)$ un grafo y sean s y t dos vértices de V. Entonces, la cantidad máxima de caminos vértice-disjuntos entre s y t es igual al tamaño del menor subconjunto de vértices de $V - s - t$ que separa a s de t.

König probó en su libro que de su teorema se deriva el teorema de Menger. De hecho, los dos teoremas anteriores son también equivalentes a los teoremas de Dilworth, Hall y Birkhoff von Neumann. Mostraremos a continuación que el teorema de Menger implica el de König. Esto provee un vínculo entre la teoría de flujos en redes y de emparejamientos.

Otra prueba del Teorema de König

Teorema 6.

El Teorema de Menger implica el Teorema de König.

Prueba. Sea $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito. Sea G' el grafo obtenido de G tras agregar dos vértices s y t y todas las aristas sA y tB. Hay una biyección entre los emparejamientos $\{a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_r b_r\}$ de G y los caminos disjuntos de s a t en G', dados por $\{sa_1 b_1 t, sa_2 b_2 t, \ldots, sa_r b_r t\}$. Además, todo cubrimiento de vértices S de G separa a s de t en G', pues $G' - S$ no tiene aristas entre A y B. A partir de lo anterior, el tamaño de un emparejamiento máximo en G es igual la cantidad máxima de caminos disjuntos entre s y t en G'. Además, el tamaño de un cubrimiento de vértices de mínimo cardinal en G es igual al tamaño del menor subconjunto de vértices que separa a s de t en G'. El resultado se sigue de aplicar el Teorema de Menger al grafo G'. ■

Cubrimientos y emparejamientos en no bipartitos

El teorema de König vale para bipartitos. ¿Qué ocurre en grafos en general? Sea $\nu(G)$ el tamaño de un emparejamiento máximo en G y $\tau(G)$ el tamaño de un cubrimiento de vértice de mínimo cardinal.

Teorema 7.

En todo grafo G se cumple que $\nu(G) \leq \tau(G)$.

Prueba. Probaremos algo más fuerte: dado un emparejamiento de aristas M de G y un cubrimiento de vértices S de G cualesquiera, se cumple que $|M| \leq |S|$. De hecho, si la arista uv pertenece a M entonces, como S es un cubrimiento, necesariamente $u \in S$ o $v \in S$. Además, ese vértice u o v no va a cubrir ninguna otra arista de M, porque las aristas de M no tienen vértices en común. Luego $|M| \leq |S|$. Tomando máximo sobre cardinal de M y mínimo sobre el de S se concluye la desigualdad. ■

Comentarios

Comentarios

- Varios teoremas minimax se derivan de programación lineal, y son fuente de inspiración para obtener algoritmos de aproximación.
- En general no es cierto que $\nu(G) = \tau(G)$. En efecto, $\nu(C_3) = 1$, mientras que $\tau(C_3) = 2$.
- Existen algoritmos eficientes para determinar exactamente $\nu(G)$. En cambio, no se conocen algoritmos eficientes para hallar $\tau(G)$.
- La desigualdad $\nu(G) \leq \tau(G)$ nos va a dar pauta para construir un algoritmo de aproximación para hallar $\tau(G)$.