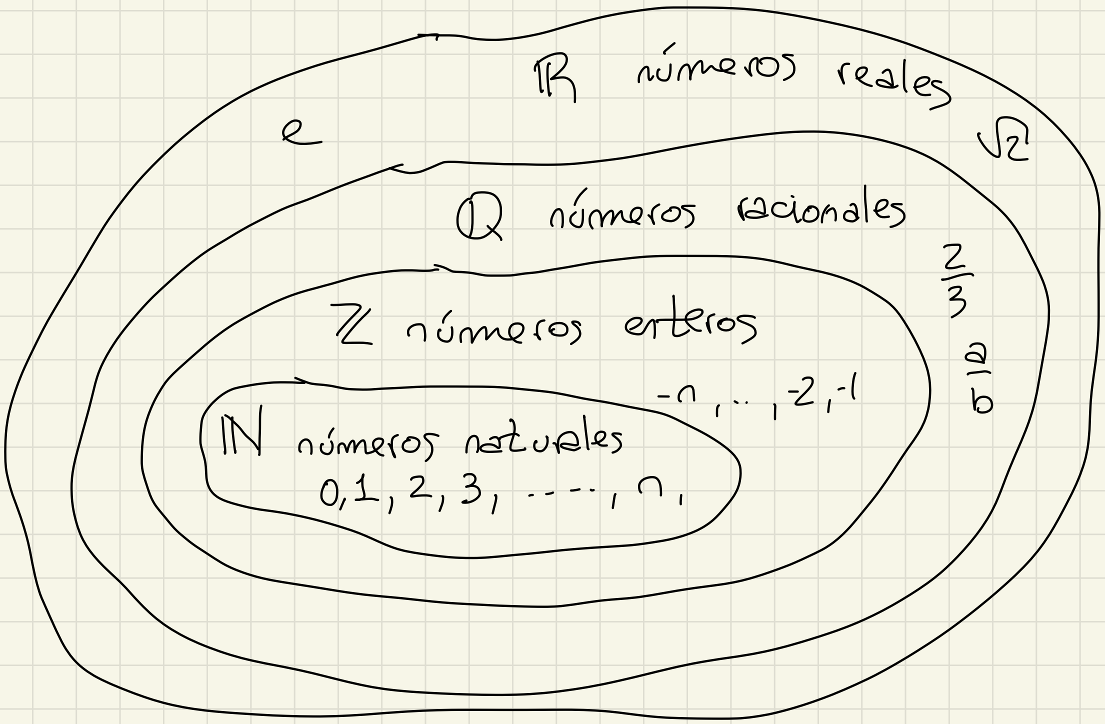
Clase 1:

Números complejos

CDIVV - 2023 - 2sem

Eugenia Ellis

Números complejos



- En los números naturales teneмos una suma y un producto

  $\boxed{\mathbb{N}}$

- En los números enteros tenemos una suma y un producto y todo número entero tiene un opuesto.

  $\boxed{\mathbb{Z}}$

- En los números racionales teneмos una

$\boxed{\mathbb{Q}}$ suma y un producto y todo número racional tiene opuesto y todo número racional $\neq 0$ tiene inverso

- En los números reales tenemos una suma

$\boxed{\mathbb{R}}$ y un producto y todo número real tiene opuesto y todo número real $\neq 0$ tiene inverso.

$\mathbb{R}$ satisface el Axioma de completitud

> Si $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente y no vacío, entonces A tiene supremo en $\mathbb{R}$

Ejemplo: $A = \{ (1+\frac{1}{n})^n : n \in \mathbb{N}^* \} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

Ejercicio: Probar que A esta acotado

A esta acotado superiormente y es no vacío

$\Rightarrow$ A tiene supremo en $\mathbb{R}$ y es e

$\mathbb{R}$ satisface el axioma de completitud.

el número de euler

Números complejos. $\mathbb{C}$

Definición: Un par ordenado de números reales.

(a,b) $\quad a,b \in \mathbb{R}$ con la siguiente suma

$$(a,b) + (c,d) = (a+c,\ b+d)$$

suma de números complejos

suma de números reales

y el siguiente producto

$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd,\ ad + bc)$$

producto de números complejos

producto de números reales.

$(0,1)\cdot(0,1) = (0-1, 0+0) = (-1,0)$

Los números reales $\mathbb{R}$ no estan incluidos dentro de $\mathbb{C}$. Pero podemos identificar los complejos de la forma $(a,0)$ con los números reales.

$$(a,0)+(c,0) = (a+c,0)$$

$$(a,0)\cdot(c,0) = (ac, 0)$$

Notación binómica de los números complejos

$z=(a,b) = a+bi$ ⤳ $\boxed{i=(0,1)}$

$Re(z) = a$ ⤳ parte real de z

$Im(z) = b$ ⤳ parte imaginaria de z

$$(a+bi)+(c+di) = a+c+(b+d)i$$

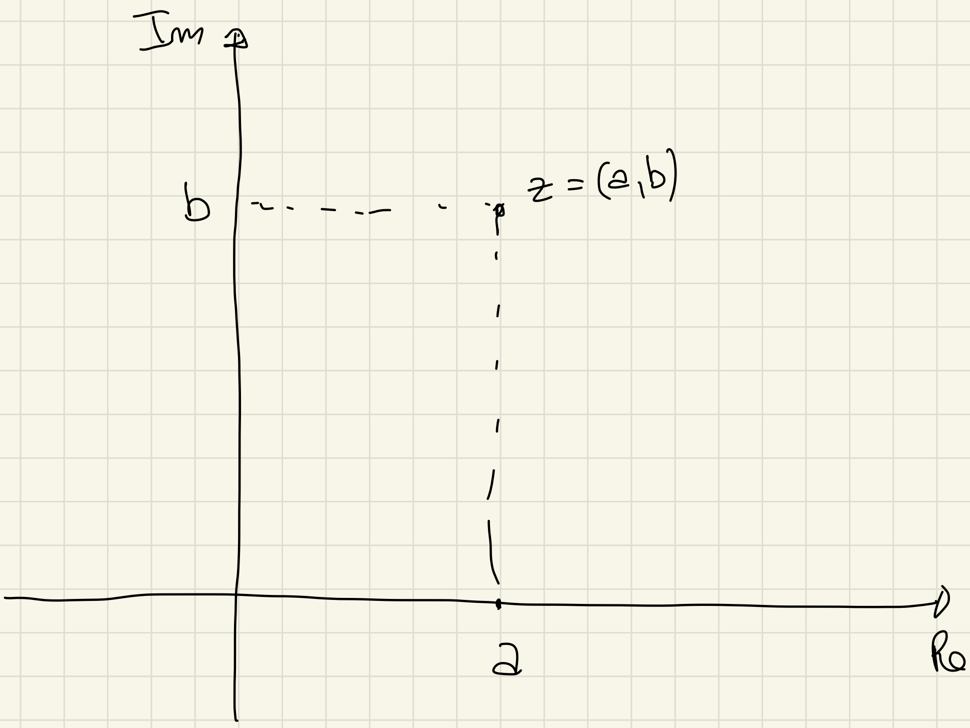
$$(a+bi)(c+di) = ac + bci + adi + bdi^2$$

distributiva

$$\boxed{i^2=-1}$$

$$= ac - bd + (bc + ad)i$$

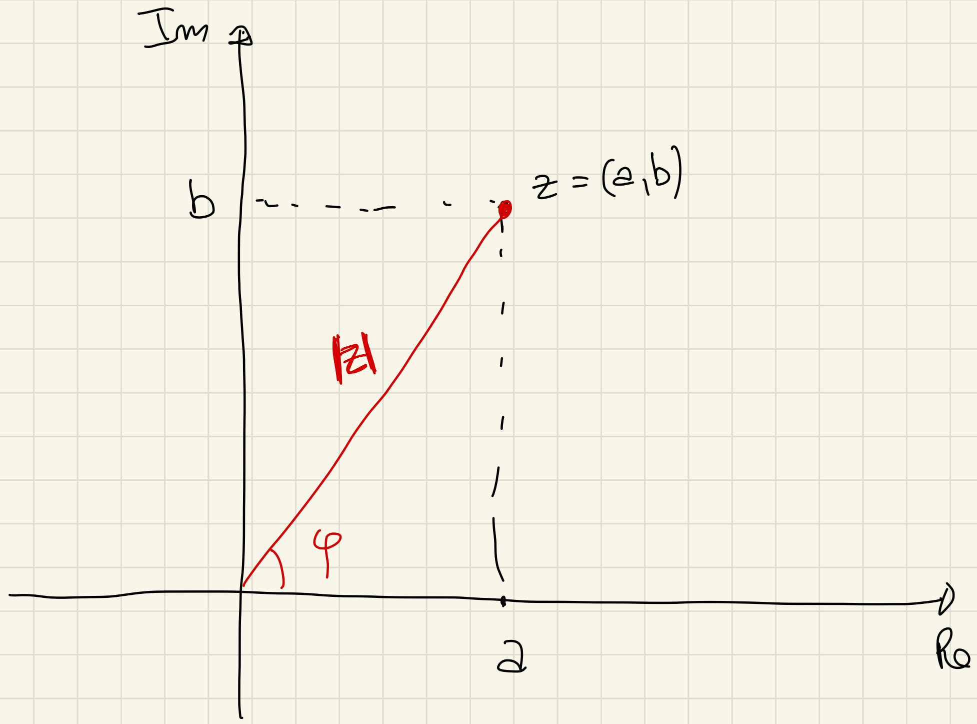
$$(a,b)\,(c,d) = (ac - bd,\ bc + ad)$$



$$z = a + bi$$

Ejercicio: Si $z = a + bi$ probar que $-a - bi$ es opuesto de z y si $z \neq 0$ entonces $\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$ es inverso de z

Notación polar de los números complejos



<u>Def:</u> Si $z=a+bi$ el módulo de z es la distancia de (a,b) al origen $\sqrt{a^2+b^2}$ y lo denotamos por $|z|$

El ángulo φ, que es el ángulo que forma el vector (a,b) con el eje real es el argumento de z.

$$\boxed{z = a + bi}$$

notación binomica

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = b/a$$

$$\boxed{\varphi = \operatorname{arctg} b/a}.$$

notación polar

$$a = |z| \cos \varphi$$

$$b = |z| \operatorname{sen} \varphi.$$

$|z|$ módulo de z

φ argumento de z.

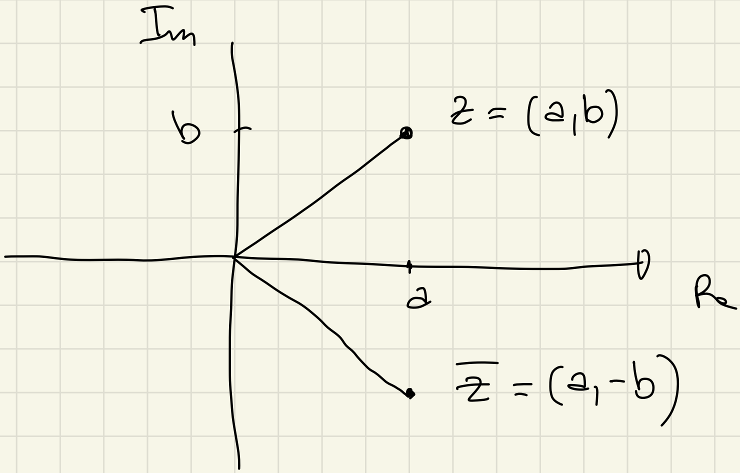
$$\boxed{z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)}$$

notación binomica usando el módulo y el argumento de z.

Conjugación de complejos

Si $z = a+bi$ definimos el complejo conjugado como

$$\overline{z} = a - bi$$



Propiedades: (módulo) $z, w \in \mathbb{C}$

1) $|z| \geq 0$ y $|z| = 0 \iff z = 0$
2) $|Re(z)| \leq |z|$ $\quad |Im(z)| \leq |z|$
3) $|zw| = |z||w|$ $\quad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$
4) $|z+w| \leq |z| + |w|$

Propiedades: (conjugación)

$z, w \in \mathbb{C}$

1) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

2) $\overline{zw} = \overline{z} . \overline{w}$

3) $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$

4) $z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$

5) $\overline{\overline{z}} = z$

6) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

muy útil

$$z = \frac{3+2i}{1-i} = \frac{(3+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3+2i+3i+2i^2}{|1-i|^2}$$

$$= \frac{3-2+5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$z = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$|1-i|^2 = \left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$