III. VALORES PROPIOS DE MATRICES ESPECIALES

EN ESTE capítulo todas nuestras matrices son complejas.

El problema de calcular los valores propios de una matriz es en general un problema difícil: el de calcular las raíces de un polinomio sobre el campo base. Por ello son importantes los resultados que establecen la posición aproximada de los valores propios de una matriz. (Para que la noción de aproximación tenga sentido trabajaremos con la métrica euclidiana de los números complejos.) En la primera sección de este capítulo trataremos un resultado elemental de aproximación de los valores propios de una matriz: el teorema de los discos de Geršgorin. Este resultado tiene múltiples aplicaciones que iremos encontrando a lo largo de este y otros capítulos.

Los resultados de aproximación de valores propios son también importantes por otras razones. En algunos casos, por ejemplo, cuando se trata de mediciones de fenómenos naturales, se conocen sólo los valores de una matriz con un cierto margen de error; se desea entonces saber con qué margen de error pueden conocerse los valores propios de esa matriz.

En este capítulo examinaremos también el comportamiento y las propiedades de valores propios de matrices que satisfacen algunas propiedades especiales, por ejemplo, estudiaremos los valores propios de matrices simétricas, normales y hermitianas. Estas matrices aparecen de manera natural en muchos problemas y aplicaciones.

1. LOCALIZACIÓN DE VALORES PROPIOS EN EL PLANO COMPLEJO

En muchos casos es importante tener una idea de dónde se encuentran los valores propios de una matriz cuadrada A, aun si estos valores no se conocen con precisión. Por ejemplo, para demostrar que una matriz real simétrica es positiva definida nos interesa saber si los valores propios son positivos; para saber si una matriz A determina un sistema de ecuaciones diferenciales $y'(t) = Ay(t)$ estable, tendremos que saber si los valores propios de A tienen su parte real negativa.

Veremos primeramente que es posible determinar regiones del plano complejo donde los valores propios positivos de una matriz A dada están contenidos (obviamente, sin calcular los valores propios). Estas regiones resultan útiles también para estudiar la forma en que los valores propios de una matriz A cambian al ser perturbada. Esto es, si E es una matriz con norma $\|E\|$ "pequeña", ¿cuál es la relación de los valores propios de $A+E$ con los valores propios de A?

1.1. El siguiente teorema es básico no sólo por su contenido matemático sino también por ser el precursor de una serie de estudios sobre aproximación y perturbación de matrices. Es sorprendente que un teorema de esta naturaleza (y de tan sencilla demostración) apenas fuera descubierto en 1931.

Teorema (Geršgorin). *Sea $A=(a_{ij})$ una matriz $n\times n$. Para cada $1\le i\le n$ definimos el i-ésimo* radio *de A como*

$$r_i(A)=\sum_{1=j\neq i}^{n}|a_{ij}|$$

y el i-ésimo disco de Geršgorin *como*

$$D_i(A)=\{z\in \mathbf{C}: |z-a_{ii}|\le r_i(A)\}.$$

Entonces todos los valores propios de A están contenidos en estos discos, o sea,

$$\operatorname{Spec}(A)\subset\bigcup_{i=1}^{n}D_i(A).$$

Además, si para un subconjunto $L\subset\{1,\ldots,n\}$ con ℓ elementos, $\bigcup_{i\in L}D_i(A)$ es una región conexa y ajena de $\bigcup_{j\notin L}D_j(A)$, entonces $\bigcup_{i\in L}D_i(A)$ contiene exactamente ℓ valores propios de A.

Demostración: Sea λ un valor propio de A y $0\neq v=(v_1,\ldots,v_n)\in\mathbf{C}^n$ un vector que satisface $Av=\lambda v$. Elijamos un índice $i\in\{1,\ldots,n\}$ tal que $|v_i|\ge|v_j|$ para todo $1\le j\le n$. Entonces tenemos

$$\lambda v_i=(Av)_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}v_j \quad \text{y} \quad v_i(\lambda-a_{ii})=\sum_{1=j\neq i}^{n}a_{ij}v_j.$$

Obtenemos de aquí:

$$|v_i|\,|\lambda-a_{ii}|\le\sum_{1=j\neq i}^{n}|a_{ij}|\,|v_j|\le|v_i|r_i(A).$$

Como $v_i\neq 0$, entonces $\lambda\in D_i(A)$. Para la segunda parte, podemos suponer por comodidad que $\bigcup_{i=1}^{\ell}D_i(A)$ es conexa y $\left(\bigcup_{i=1}^{\ell}D_i(A)\right)\cap\left(\bigcup_{i=\ell+1}^{n}D_i(A)\right)=\emptyset$. Escribamos $A=A_0+B$ donde $A_0=\operatorname{diag}(a_{11},\ldots,a_{nn})$ y hacemos $A(\varepsilon)=A_0+\varepsilon B$ para toda $\varepsilon>0$. De esta forma $\lim_{\varepsilon\to 0}A(\varepsilon)=A_0$ y $\lim_{\varepsilon\to 1}A(\varepsilon)=A$.

Sean $\lambda_1(A(\varepsilon)),\ldots,\lambda_n(A(\varepsilon))$ los n valores propios de la matriz $A(\varepsilon)$. Estos valores como funciones en el parámetro ε son continuas en ε (ver ejercicio 4). De manera que para $1\le i\le n$, $\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_i(A(\varepsilon))=a_{ii}$ y $\lim_{\varepsilon\to 1}\lambda_i(A(\varepsilon))=\lambda_i$, donde $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}=\operatorname{Spec}(A)$.

Por otra parte $r_i(A(\varepsilon))=\sum_{1=j\neq i}^{n}\varepsilon|a_{ij}|=\varepsilon r_i(A)$. Luego, $D_i(A(\varepsilon))\subset D_i(A)$ y en particular $\bigcup_{i=1}^{\ell}D_i(A(\varepsilon))\subset\bigcup_{i=1}^{\ell}D_i(A)$ y $\left(\bigcup_{i=1}^{\ell}D_i(A(\varepsilon))\right)\cap\left(\bigcup_{i=\ell+1}^{n}D_i(a)\right)=\emptyset$.

Consideremos la curva continua $\gamma_i:[0,1]\to\mathbf{C}$, $\varepsilon\mapsto\lambda_i(A(\varepsilon))$, con $1\le i\le\ell$. Por la primera parte del teorema, $\gamma_i(\varepsilon)\in\bigcup_{i=1}^{n}D_i(A(\varepsilon))$. Como $\gamma_i(0)=a_{ii}\in\bigcup_{i=1}^{\ell}D_i(A)$ entonces $\gamma_i(\varepsilon)\in\bigcup_{i=1}^{\ell}D_i(A(\varepsilon))$ para toda $\varepsilon\in[0,1]$. En particular, $\lambda_i=\gamma_i(1)\in\bigcup_{i=1}^{\ell}D_i(A)$ y esta región contiene al menos ℓ valores propios de A.

Procediendo de manera análoga para las diferentes regiones conexas de $\bigcup_{i=\ell+1}^{n}D_i(A)$, tenemos que al menos $n-\ell$ valores propios de A están contenidos en $\bigcup_{i=\ell+1}^{n}D_i(A)$. Luego $\bigcup_{i=1}^{\ell}D_i(A)$ contiene exactamente ℓ valores propios de A. $\square$

Ejercicios

1. Sea A una matriz $n \times n$. Entonces $\operatorname{Spec}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i(A^T)$.

2. Muestre que la región $\left(\bigcup_{i=1}^{n} D_i(A)\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} D_i(A^T)\right)$ es en general más pequeña que $\bigcup_{i=1}^{n} D_i(A)$.

3. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$. Use el teorema de Geršgorin para mostrar que $\rho(A) \leq \min\{\max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\}$.

4. Para mostrar la dependencia continua de los ceros de un polinomio de sus coeficientes, pruebe la siguiente:

Proposición. *Sea $n \geq 1$ y $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ un polinomio con $a_n \neq 0$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe una $\delta > 0$ de forma que para todo polinomio $q(t) = b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \cdots + b_1 t + b_0$ con $b_n \neq 0$ y que satisface*

$$\max{}_i |a_i - b_i| < \delta,$$

entonces

$$\min_{\sigma} \max_{j} |\lambda_j - \mu_{\sigma(j)}| < \varepsilon,$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los ceros de $p(t)$, $\mu_1, \ldots, \mu_n$ son los ceros de $q(t)$ y σ corre sobre todas las permutaciones de $\{1, \ldots, n\}$.

1.2. Hay una manera sencilla de mejorar la región dada en el teorema de Geršgorin. Dada una matriz $A = (a_{ij})$ de tamaño $n \times n$ y una matriz invertible P del mismo tamaño, tenemos $\operatorname{Spec}(A) = \operatorname{Spec}(PAP^{-1}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i(PAP^{-1})$.

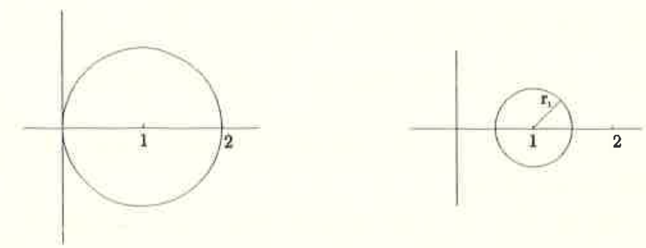
Estos discos $D_i(PAP^{-1})$ pueden ser "mejores" que los $D_i(A)$, dependiendo de cómo se elija la matriz P. Por ejemplo, veamos el siguiente:

Corolario. *Sean $p_1, \ldots, p_n$ números positivos. Entonces*

$$\operatorname{Spec}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C}: |z - a_{ii}| \leq \frac{1}{p_i} \sum_{1=j\neq i}^{n} p_j |a_{ij}| \right\}.$$

Demostración: Elíjase $P = \operatorname{diag}(p_1, \ldots, p_n)$ y véase que $r_i(PAP^{-1}) = \frac{1}{p_i} \sum_{1=j\neq i}^{n} p_j |a_{ij}|$. □

Por ejemplo, si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, encontramos que $r_1(A) = 1$ y $r_2(A) = 0$, de manera que los valores propios caen en el disco $D_1(A)$:



Eligiendo $p_1, p_2 > 0$ y $P = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix}$ podemos hacer $r_1(PAP^{-1}) = \frac{p_2}{p_1}$ y $r_2(PAP^{-1}) = 0$. Haciendo p_1 mucho más grande que p_2, concluimos que 1 y 2 son valores propios de A.

Ejercicios

1. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

Calcule los discos de Geršgorin de A. Calcule también los discos de diferentes matrices PAP^{-1} y trate de dar una buena estimación de los valores propios.

Calcule después los valores propios de A y compárelos con su estimación.

2. Con base en el teorema de Geršgorin demuestre que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

es invertible.

3. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$. Sea $R_i(A) = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$. Entonces

$$\operatorname{rg} A \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_{ii}|}{R_i(A)} \text{ (suponiendo que } 0/0 = 0).$$

[*Ayuda:* Multiplique por escalares convenientes los renglones —sin cambiar el rango— de manera que se pueda suponer que $a_{ii} \geq 0$ y $R_i(A) \in \{0,1\}$. Luego, hay que demostrar que $\operatorname{rg} A \geq \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Para ello observe que los valores propios de A están en el círculo unitario.]

1.3. Hay muchas aplicaciones inmediatas del teorema de Geršgorin. Veamos algunas de ellas:

(a) Una matriz $A = (a_{ij})$ de tamaño $n \times n$ que satisface

$$|a_{ii}| > \sum_{1=j\neq i}^{n} |a_{ij}| = r_i(A), \text{ para toda } 1 \leq i \leq n,$$

es invertible.

Demostración: En efecto, $0 \notin D_i(A)$. Luego 0 no es valor propio de A y A es invertible. □

(b) Si una matriz $A = (a_{ij})$ con discos de Geršgorin satisface

$$D_i(A) \cap D_j(A) = \emptyset, \text{ si } i \neq j,$$

entonces A es diagonalizable.

Demostración: Cada disco es una componente conexa de $\bigcup_{i=1}^{n} D_i(A)$ y por tanto contiene un valor propio. Así, A tiene n valores propios diferentes. □

(c) Sea $A = (a_{ij})$ una matriz real con $a_{ij} \geq 0$ para $i \neq j$.

Supongamos que $Av < 0$ para algún vector $v = (v_1, \ldots, v_n)^T$ con $v_i > 0$. Entonces A determina un sistema $y'(t) = Ay(t)$ estable.

Demostración: La matriz $P = \operatorname{diag}(v_1, \ldots, v_n)$ es invertible, entonces $\operatorname{Spec}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i(P^{-1}AP)$ y $P^{-1}AP = (b_{ij})$ satisface $b_{ij} = v_i^{-1} a_{ij} v_j$.

Como $Av < 0$, entonces $a_{ii} < 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Además

$$\begin{aligned} r_i(P^{-1}AP) &= \sum_{1=j\neq i}^{n} |b_{ij}| = \frac{1}{v_i} \sum_{1=j\neq i}^{n} |a_{ij}| v_j \\ &= \frac{1}{v_i} \sum_{1=j\neq i}^{n} a_{ij} v_j = \frac{1}{v_i}((Av)_i - a_{ii} v_i) < -a_{ii}. \end{aligned}$$

Entonces $D_i(P^{-1}AP) \subset \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re}(z) < 0\}$. Por lo tanto, A determina un sistema estable. □

Ejercicio: De una demostración alternativa del Lema (II.1.2): una matriz diagonal dominante es invertible. Un caso especial de este resultado es la afirmación anterior (a).

1.4. Una matriz real A de tamaño $n \times n$ se llama *estocástica* si $a_{ij} \geq 0$ para $1 \leq i, j \leq n$ y $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ para $i = 1, \ldots, n$.

Las matrices estocásticas se encuentran en muchas aplicaciones. Las estudiaremos con más detenimiento en el capítulo IV. Aquí veremos solamente algunas de sus propiedades que se siguen fácilmente del Teorema de Geršgorin.

Teorema. *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz estocástica. Entonces:*

a) *$1 = \rho(A)$ es un valor propio de A.*

b) *Supongamos además que $a_{ii} > 0$ para toda $1 \leq i \leq n$. Entonces, 1 es el único valor propio con norma 1 y $\lim_{s\to 0} A^s$ existe.*

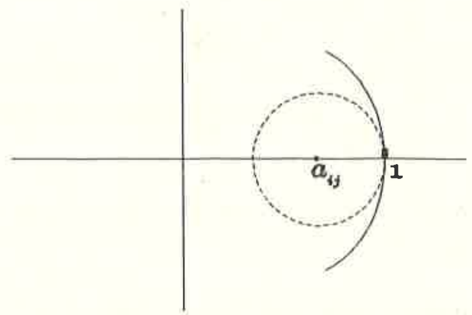
Demostración: Consideremos el vector

$$e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto $Ae = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right)_i = e$. Entonces $1 \leq \rho(A)$ y 1 es un valor propio de A.

Sea λ un valor propio de A. Supongamos que $\lambda \in D_i(A)$, entonces

$$|\lambda - a_{ii}| \le r_i(A) = \sum_{1=j\neq i}^{n} a_{ij} = 1 - a_{ii}.$$



Como podemos ver en la figura, $D_i(A)$ está contenido en el círculo unitario. De aquí se sigue que $\rho(A) \le 1$.

Si además $a_{ii} > 0$, entonces $D_i(A) \cap \{v \in \mathbf{C} : |v| = 1\} = \{1\}$ y 1 es el único valor propio con norma 1. Para probar que en este caso también $\lim_{s\to\infty} A^s$ existe, tendremos que demostrar que en la forma de Jordan $J = \bigoplus_{i=1}^{s} J_{n_i}(\lambda_i)$ de A, si $\lambda_i = 1$, entonces $n_i = 1$ $(1 \le i \le s)$. En efecto, sea T invertible tal que $J = TAT^{-1}$, de modo que $J^m = TA^mT^{-1}$ para $m \ge 1$.

Escribamos $A^m = \left(a_{ij}^{(m)}\right)$ y verifiquemos que A^m es estocástica. Como esto es cierto para $m = 1$, podemos suponer inductivamente que A^{m-1} es estocástica, entonces calculamos para A^m:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(m)} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}^{(m-1)} a_{\ell j} = \sum_{\ell=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{\ell j}\right) a_{i\ell}^{(m-1)}\\ &= \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}^{(m-1)} = 1, \quad 1 \le i \le n.\end{aligned}$$

Lo cual implica que $\|J^m\| \le \|T\|\,\|T^{-1}\|$ para toda $m \ge 1$. Si $\left(J_{n_1}(1)\right)^m = \left(b_{ij}^{(m)}\right)$ y $n_1 > 1$, entonces $b_{12}^{(m)} = m$ y sería imposible

mantener la cota constante que obtuvimos antes. Luego $n_i = 1$ para toda $\lambda_i = 1$, como deseábamos probar. □

Ejercicios: En el capítulo IV tratamos con mayor detenimiento las matrices estocásticas. Tome algunos de los enunciados de teoremas de ese capítulo y trate de demostrarlos (sin ver la demostración que ahí se ofrece).

1.5 El siguiente resultado, generalización del teorema de Geršgorin, determina regiones más precisas que contienen los valores propios de una matriz dada.

Proposición. *Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ y supongamos que $AP = PD$, donde P es una matriz de tamaño $n \times m$ y $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_m)$ es una matriz diagonal de tamaño $m \times m$. Entonces todo valor propio de A diferente de $d_1, \ldots, d_m$ está contenido en la unión de los discos $D_i(E)$, $i = 1, \ldots, n$, donde E es una matriz de la forma*

$$E = A + PG$$

y G es una matriz cualquiera de tamaño $m \times n$.

Demostración: Tomemos una matriz G de tamaño $m \times n$ y definamos las matrices

$$E = A + PG$$
$$J = D + GP.$$

Tenemos entonces,

$$EP = (A + PG)P = P(D + GP) = PJ,$$
$$\begin{bmatrix} D & G \\ 0 & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ P & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J & G \\ 0 & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ -P & I \end{bmatrix},$$

donde I es la matriz identidad de tamaño correspondiente.

Obtenemos la siguiente fórmula para los polinomios característicos de las matrices implicadas:

$$\chi_J(t)\chi_A(t) = \chi_D(t)\chi_E(t).$$

Luego, todo valor propio de A es una de las $d_1, \ldots, d_m$ o bien es un valor propio de E. Una aplicación directa del teorema de Geršgorin nos da el resultado. □

Ejercicios

1. Muestre la primera parte del Teorema de Geršgorin como una consecuencia del resultado anterior.

2. Muestre un ejemplo de una matriz A para la cual las regiones dadas por la Proposición (1.5) sean mejores estrictamente que las dadas por el Teorema de Geršgorin para la posición de sus valores propios.

3. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz estocástica de tamaño $n \times n$ tal que $a_{ii} > 0$. Por (1.4), 1 es un valor propio simple de A. Calcule una cota superior menor que 1 para los otros valores propios de A (como función de las entradas a_{ij}, por supuesto).

2. Matrices normales y matrices hermitianas

Para una matriz invertible S hemos considerado parejas de matrices similares A, SAS^{-1}. La noción de similitud encierra una dificultad particular, el hecho de que es necesario calcular matrices inversas S^{-1}. Para ciertas matrices este problema se simplifica: una *matriz unitaria* S satisface que $S^{-1} = S^*$, donde S^* es la matriz adjunta hermitiana de S. No sólo es más sencillo el estudio de similaridad por medio de matrices unitarias, sino que las clases de equivalencia así obtenidas son también interesantes. Estudiaremos en esta sección una clase de matrices que comprende a las matrices unitarias, las llamadas *matrices normales*. Consideraremos también la importante clase de matrices S tales que $S = S^*$, llamadas *matrices hermitianas*. En particular examinaremos algunas características especiales del comportamiento de los valores propios de las matrices normales y hermitianas.

2.1. Una clase importante de matrices son las matrices normales.

Una matriz A de tamaño $n \times n$ se llama *normal* si $A^*A = AA^*$, donde A^* es la matriz *adjunta hermitiana* de A, esto es, si $A = (a_{ij})$, entonces $A^* = (b_{ij})$ con $b_{ij} = \bar{a}_{ji}$.

Ejemplos

a) La matriz I_n es normal.

b) Si $U^*U = I_n$, entonces $UU^* = I_n = U^*U$ y U es normal. Una matriz U que satisface la condición $U^*U = I_n$ se llama *unitaria.*

c) Si $A^* = A$, entonces $A^*A = AA^*$ trivialmente y A es normal. Una matriz A con la propiedad $A^* = A$ se llama *hermitiana.*

d) La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ es normal, pero no es ni unitaria ni hermitiana.

Ejercicios

1. Caracterice las matrices normales 2×2 en términos de los valores de sus entradas. Haga lo mismo para las matrices unitarias y las hermitianas.

2. Proporcione ejemplos de matrices 2×2 reales y no normales.

2.2. Comenzaremos por considerar más detenidamente la clase de las matrices unitarias.

Recordemos que un conjunto de vectores $\{v_1, \ldots, v_k\} \subset \mathbf{C}^n$ se llama ortonormal si para $1 \le i < j \le k$ tenemos $v_i^* v_j = 0$ y $v_i^* v_i = \|v_i\|^2 = 1$. Claramente un conjunto $\{v_1, \ldots, v_k\}$ ortonormal en $\mathbf{C}^n$ es linealmente independiente. En efecto, si $\sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i = 0$ es una combinación lineal, para $1 \le j \le n$, $0 = v_j^* \left(\sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i \right) = \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_j^* v_i = \mu_j$.

Teorema. *Sea U una matriz $n \times n$. Entonces son equivalentes:*

a) *U es unitaria.*

b) *U es no singular y $U^* = U^{-1}$.*

c) *U^* es unitaria.*

d) *Las columnas de U forman un conjunto ortonormal.*

e) *Los renglones de U forman un conjunto ortonormal.*

f) *Para cada $v \in \mathbf{C}^n$, $\|Uv\| = \|v\|$.*

Demostración: (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (a) son claras. Similarmente (a) $\Leftrightarrow$ (e) es también clara.

(a) $\Rightarrow$ (f): Sea $v \in \mathbf{C}^n$, si U es unitaria, entonces

$$\|Uv\|^2 = (Uv)^*Uv = v^*U^*Uv = v^*v = \|v\|^2.$$

Para el converso. Primero consideramos el caso 2×2. Llamemos $A = U^*U$ y $A = (a_{ij})$. Consideremos el vector $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces $a_{11} = v^*Av = \|Uv\|^2 = \|v\|^2 = 1$. Usando el vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ obtenemos similarmente que $a_{22} = 1$. Entonces $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ \bar{a} & 1 \end{pmatrix}$. Utilicemos ahora el vector $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Entonces $2 + (a + \bar{a}) = v^* A v = 2$. Luego $\operatorname{Re}(a) = 0$. Similarmente usando el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ obtenemos que $\operatorname{Im}(a) = 0$. Luego $a = 0$ y $A = I_2$ como deseábamos probar. Para una matriz arbitraria U y cualesquiera dos entradas $1 \leq i < j \leq n$, llamamos $A^{(i,j)}$ a la restricción de $A = U^*U$ a la matriz 2×2 con entradas

$$A^{(i,j)} = \begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix}.$$

El procedimiento anterior muestra que $A^{(i,j)} = I_2$. Luego $A = I_n$. Lo que concluye la demostración. □

Ejemplos

Si una matriz unitaria U con entradas reales satisface $U^T U = I_n$, decimos entonces que U es *ortogonal.*

a) Para $n = 2$, $\Theta \in \mathbf{R}$, la matriz

$$T(\Theta) = \begin{bmatrix} \cos\Theta & \operatorname{sen}\Theta \\ -\operatorname{sen}\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix}$$

es real ortogonal.

b) Si U es real ortogonal 2×2, entonces existe $\Theta \in \mathbf{R}$ tal que $U = T(\Theta)$ o bien

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} T(\Theta).$$

Si U no es de la forma $T(\Theta)$, también existe $\xi \in \mathbf{R}$ tal que

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} T(\xi).$$

Ejercicios

1. Demuestre las afirmaciones (a) y (b) del ejemplo anterior.

2. Explique la relación entre Θ y ξ en caso de que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} T(\Theta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} T(\xi)$$

es una matriz real ortogonal.

3. El conjunto $\mathcal{U}$ de matrices unitarias de tamaño $n \times n$ constituye un *grupo compacto.* Para ello muestre lo siguiente:

i) $I_n \in \mathcal{U}$; si $U, V \in \mathcal{U}$, entonces $UV \in \mathcal{U}$; si $U \in \mathcal{U}$, entonces $U^{-1} \in \mathcal{U}$.

ii) Consideremos $\mathcal{U}$ como subconjunto de $\mathbf{C}^{n^2}$. Para cada $U = (u_{ij})$ se tiene $|u_{ij}| \leq 1$, luego $\mathcal{U}$ es acotado en $\mathbf{C}^{n^2}$.

iii) Si $(U_m)_m$ es una sucesión en $\mathcal{U}$ tal que $V = \lim_{m \to \infty} U_m$, entonces $V \in \mathcal{U}$. Luego $\mathcal{U}$ es cerrado y acotado en la topología usual de $\mathbf{C}^{n^2}$.

2.3. Se dice que dos matrices A y B son *unitariamente equivalentes* si existe una matriz unitaria U tal que $B = UAU^*$.

Observemos que la equivalencia unitaria es una relación de equivalencia que parte al conjunto de matrices en clases más pequeñas que las determinadas por similaridad. Es decir, esta partición es más fina y es de esperarse que dos elementos en la última clase "se parezcan" mucho.

Lema. *Sean $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ dos matrices unitariamente equivalentes. Entonces* $\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} |b_{ij}|^2$.

Demostración: Observemos primero que el invariante en cuestión puede obtenerse de la siguiente manera:

$$\operatorname{tr} A^*A = \sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|^2.$$

Luego debemos calcular $\operatorname{tr} B^*B$ para $B = U^*AU$ con U matriz unitaria. Se tiene,

$$\operatorname{tr} B^*B = \operatorname{tr} U^*A^*UU^*AU = \operatorname{tr} U^*A^*AU = \operatorname{tr} U^{-1}(A^*A)U = \operatorname{tr} A^*A.$$

□

2.4. El siguiente resultado nos dice que una matriz arbitraria A puede llevarse por equivalencia unitaria a una matriz triangular superior T, $U^*AU = T$. Comparemos este resultado con el teorema de la forma canónica de Jordan: por un lado el teorema de Jordan nos asegura que podemos llevar a A por conjugación $P^{-1}AP = J$ a una matriz de Jordan J, pero no sabemos nada de P (salvo que es invertible); por otro lado T sólo es triangular, pero U es unitaria, una condición mucho más fuerte que ser simplemente invertible. La diferencia esencial en favor de la forma de Jordan está en la unicidad de la matriz J; sin embargo, las *formas de Schur* T de A nos serán de utilidad.

Teorema (Schur). *Sea A una matriz $n \times n$ con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Existe entonces una matriz unitaria U tal que $U^*AU = T$ es una matriz triangular superior con valores en la diagonal $t_{ii} = \lambda_i$, $i = 1, \ldots, n$.*

Demostración: Consideremos un vector propio $x^{(1)}$, tal que $Ax^{(1)} = \lambda_1 x^{(1)}$ y $\|x^{(1)}\| = 1$. Podemos completar a una base ortonormal $\{x^{(1)}, y_2, \ldots, y_n\}$ de $\mathbf{C}^n$. Definamos U_1 como la matriz cuya primera columna es $x^{(1)}$, segunda $y_2, \ldots$, n-ésima columna es y_n; escribimos

$$U_1 = [x^{(1)}, y_2, \ldots, y_n].$$

Por (2.2), U_1 es unitaria. Entonces

$$U_1^* A U_1 = U_1^*[Ax^{(1)}, Ay_2, \ldots, Ay_n] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}.$$

donde A_1 es una matriz de tamaño $(n-1) \times (n-1)$ y con valores propios $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Por inducción sobre el tamaño de la matriz podemos suponer que existe una matriz unitaria U_2 de tamaño $(n-1)\times(n-1)$ de modo que $U_2^* A_1 U_2 = T_1$ es una matriz triangular superior con entradas diagonales $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Definimos V_2 como la matriz unitaria

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix}.$$

La matriz $U_1 V_2$ es unitaria. Calculamos:

$$V_2^* U_1^* A U_1 V_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & T_1 \end{bmatrix},$$

que es una matriz con la forma deseada. □

Ejercicios

1. Calcule una forma de Schur para cada una de las siguientes matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Demuestre que puede haber varias formas de Schur para una matriz A.

3. Muestre el teorema de Cayley-Hamilton a partir del teorema de Schur (y por supuesto, ¡sin suponer el teorema de Jordan!).

2.5. Decimos que la matriz A es *unitariamente diagonalizable* si existe una matriz unitaria U tal que U^*AU es diagonal.

Teorema. *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de tamaño $n \times n$ con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *A es normal.*

b) *A es unitariamente diagonalizable.*

c) *Se satisface* $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$.

d) *$\mathbf{C}^n$ acepta una base ortonormal de vectores propios de A.*

Demostración: Sea U una matriz unitaria tal que $T = U^*AU$ tiene la forma dada por el teorema (2.4).

(a) $\Rightarrow$ (b): Como A es normal, también T lo es. En efecto,

$$T^*T = U^*A^*UU^*AU = U^*A^*AU = U^*AA^*U = TT^*.$$

Supongamos que $T = (t_{ij})$; calculando la entrada $(1,1)$ de $T^*T = TT^*$, obtenemos

$$|t_{11}|^2 = \bar{t}_{11} t_{11} = t_{11}\bar{t}_{11} + \sum_{j=2}^{n} t_{1j}\bar{t}_{1j} = |t_{11}|^2 + \sum_{j=2}^{n} |t_{1j}|^2.$$

De aquí que $t_{1j} = 0$ para $j = 2, \ldots, n$. Similarmente, calculando la entrada (2,2) obtenemos:

$$|t_{22}|^2 = t_{22}\,\bar{t}_{22} = t_{22}\,\bar{t}_{22} + \sum_{j=3}^{n} t_{2j}\,\bar{t}_{2j} = |t_{22}|^2 + \sum_{j=3}^{n} |t_{2j}|^2,$$

de modo que $t_{2j} = 0$ para $j = 3, \ldots, n$ y ya teníamos $t_{21} = 0$. Continuando de esta manera, llegamos a que T es diagonal, como deseábamos probar.

(b) $\Rightarrow$ (a): Si T es diagonal, entonces T es normal. Luego $A = UTU^*$ es también normal.

(b) $\Leftrightarrow$ (c): Se sigue de (2.3).

(b) $\Rightarrow$ (d): Si $AU = UT$ con $U = [u_1, \ldots, u_n]$ como matriz unitaria y $T = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, entonces $Au_i = \lambda_i u_i$, $i = 1, \ldots, n$ y $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base ortogonal del espacio $\mathbf{C}^n$. El converso es claro. □

2.6. Pasemos ahora a considerar con cuidado el principal objeto de estudio de esta sección: las *matrices hermitianas*. Pongamos primeramente juntas algunas de las cosas que ya sabemos.

Teorema (espectral de las matrices hermitianas). *Sea A una matriz hermitiana. Entonces:*

a) *Todos sus valores propios son reales.*

b) *A es unitariamente diagonalizable.*

Demostración: Como A es hermitiana, entonces es normal. Luego, por (2.5), A es unitariamente diagonalizable. Digamos que $U^*AU = D$ con U unitaria y D diagonal. Entonces

$$D^* = (U^*AU)^* = U^*A^*U = U^*AU = D,$$

de donde se sigue que las entradas diagonales de D (=valores propios de A) son números reales. □

Ejemplos y ejercicios

1. Sea $A \in M_n$. Las siguientes matrices son hermitianas: $A + A^*$, AA^*, A^*A.

2. Sea $f : D \to \mathbf{R}$ una función dos veces diferenciable definida en un dominio D en $\mathbf{R}^n$. La matriz real

$$H(x) = (h_{ij}) = \left[\delta^2 f(x)/\delta x_i \delta x_j\right]$$

se llama el *hessiano* de f. Es una función de x y desempeña un papel importante en la determinación de máximos y mínimos de funciones. Muestre que el valor $H(x)$ del hessiano de f en un punto x es una matriz simétrica.

3. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de tamaño $n \times n$.

a) Supongamos que A es una matriz real. Asociada a A, podemos definir la forma bilineal $Q(x, y) = y^T Ax$, $x, y \in \mathbf{R}^n$. Entonces la forma bilineal Q es simétrica; es decir, $Q(x, y) = Q(y, x)$, si y solamente si, $A = A^T$.

b) Supongamos que A es una matriz compleja. La forma compleja $H(x, y) = y^*Ax$ es una forma sesquilineal, esto es, H es lineal en la primera variable y "conjugada-lineal" en la segunda variable. Formalmente, $H(ax, by) = a\bar{b}H(x, y)$.

La forma H satisface $H(x, y) = \overline{H(y, x)}$ si y solamente si la matriz A es hermitiana. En este caso obtenemos una forma cuadrática $q : \mathbf{C}^n \to \mathbf{R}$, $q(x) = H(x, x)$ con valores reales.

2.7. Podemos caracterizar las matrices hermitianas de las siguientes maneras.

Teorema. *Sea A una matriz $n \times n$. Son equivalentes:*

a) *A es hermitiana.*

b) *Para cada vector $x \in \mathbf{C}^n$, x^*Ax es real*

c) *A es normal y todos los valores propios de A son reales.*

Demostración: (a) $\Rightarrow$ (b): Sea $x \in \mathbf{C}^n$, el conjugado complejo del número x^*Ax es:

$$(x^*Ax)^* = x^*A^*x = x^*Ax = x^*Ax,$$

o sea, x^*Ax es real.

(b) $\Rightarrow$ (a): Para dos vectores $x, y \in \mathbf{C}^n$ tenemos $(x + y)^*A(x + y) = (x + y)^*A^*(x + y)$ es real. Luego,

$$x^*Ax + x^*Ay + y^*Ax + y^*Ay = x^*A^*x + x^*A^*y + y^*A^*x + y^*A^*y.$$

De donde
$$x^*Ay + y^*Ax = x^*A^*y + y^*A^*x$$
es un número real.

Consideremos $A = (a_{st})$ con entradas $a_{kj} = c + id$, $a_{jk} = c' + id'$. Deseamos demostrar que $c = c'$ y $d = -d'$. En la ecuación anterior hagamos $x = e_k$, $y = e_j$, y obtenemos:

$$(c + c') + (d + d')i = (c + c') - (d + d')i \text{ es real,}$$

luego $d = -d'$. Para $x = i_{e_k}$, $y = e_j$, obtenemos:

$$(d - d') + (c - c')i = (d - d') + (c - c')i \text{ es real,}$$

de donde $c = c'$.

(a) $\Rightarrow$ (c) es (2.6).

(c) $\Rightarrow$ (b): Si A es normal, por (2.5) podemos encontrar una matriz unitaria U de manera que $U^*AU = D = \text{diag}\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ con $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ reales.

Tomemos un vector $x \in \mathbf{C}^n$, definamos $(y_1, \ldots, y_n)^T = y = U^*x$. Luego,

$$\begin{aligned} x^*Ax &= (x^*U)U^*AU(U^*x) \\ &= (x^*U)D(U^*x) = y^* \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |y_i|^2. \end{aligned}$$

que es un número real. □

Ejercicios

1. Si $A \in M_n$ es hermitiana y $S \in M_n$, entonces SAS^* es también hermitiana. ¿Es SAS^{-1} hermitiana?

2. Sea $A \in M_n$. Consideremos los valores absolutos de la forma cuadrática asociada a la matriz hermitiana $A + A^*$, esto es, $f_A(x) = |H(x, x)|$, donde $H(x, y) = x^T(A + A^*)y$.

a) Muestre que los valores de f_A no determinan a la matriz A.

b) Los valores de f_A casi determinan a la matriz A, en el siguiente sentido. Supongamos que $A, B \in M_n$ satisfacen $f_A(x) = f_B(x)$ para toda $x \in \mathbf{C}^n$, entonces $A = e^{i\theta}B$ para alguna $\theta \in \mathbf{R}$.

3. Una matriz hermitiana A se llama *positiva definida* si $x^*Ax > 0$ para todo vector $0 \neq x \in \mathbf{C}^n$. Demuestre que son equivalentes:

a) A es positiva definida.

b) Todos los valores propios de A son reales positivos.

4. Sea $A \in M_n(\mathbf{C})$ una matriz hermitiana positiva definida. Consideremos el conjunto de puntos E_A en $\mathbf{R}^n$ definido por aquellos vectores x con $x^TAx = 1$. Demuestre lo siguiente:

i) E_A es un elipsoide (llamado el *elipsoide de* A).

ii) Demuestre que las longitudes de los semiejes de E_A son $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}$, donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de A.

[*Ayuda:* Por (2.6) A es unitariamente diagonalizable. Digamos que $D = U^*AU$ es diagonal y U es unitaria. Luego, $E_A = UE_D$.]

5. Demuestre que una matriz hermitiana A es positiva definida si y solamente si existe una matriz hermitiana B positiva definida tal que $B^2 = A$.

2.8. Sobre una matriz arbitraria A poco se puede decir de sus valores propios aparte de que son raíces del polinomio característico $\chi_A(t) = 0$. Para las matrices hermitianas, los valores propios se pueden calcular como resultado de resolver problemas de "optimización".

Sea A una matriz hermitiana de tamaño $n \times n$. Como sus valores propios son reales, podemos ordenarlos en una sucesión creciente:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_n.$$

Probaremos primero un teorema sencillo que caracteriza los valores extremos λ_1 y λ_n. Este teorema lleva el nombre de dos físicos ingleses.

Teorema (Rayleigh-Ritz). *Sea A una matriz hermitiana con valores propios $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_n$. Entonces*

$$\lambda_1 = \min\{x^*Ax : \|x\| = 1\}$$
$$\lambda_n = \max\{x^*Ax : \|x\| = 1\}.$$

En particular, $\text{Spec}\, A \subset [\lambda_1, \lambda_n] = \{x^*Ax : \|x\| = 1\}$.

Demostración: Como A es hermitiana, podemos encontrar una matriz unitaria U tal que $A = UDU^*$ con $D = \text{diag}\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Según calculamos en (2.7),

$$x^*Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |(U^*x)_i|^2.$$

Como U es unitaria, podemos usar (2.2) para obtener:

$$\lambda_1 x^*x = \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} |(U^*x)_i|^2 \leq x^*Ax \leq \lambda_n \sum_{i=1}^{n} |(U^*x)_i|^2 = \lambda_n x^*x.$$

Si $\|x\|^2 = 1$, obtenemos $\lambda_1 \leq x^*Ax \leq \lambda_n$.

Si x_1 es vector propio de A con $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ y $\|x_1\| = 1$, tenemos

$$\lambda_1 = \lambda_1 x_1^* x_1 = x_1^* A x_1.$$

Luego $\lambda_1 = \min\{x^*Ax : \|x\|^2 = 1\}$. Similarmente, $\lambda_n = \max\{x^*Ax : \|x\|^2 = 1\}$.

Como $q: \mathbf{C}^n \to \mathbf{R}$, $x \to x^*Ax$ es continua y $\{x \in \mathbf{C} : \|x\|^2 = 1\}$ es compacto y conexo, la imagen $\{x^*Ax : \|x\|^2 = 1\}$ es un intervalo cerrado de $\mathbf{R}$; necesariamente, éste es el intervalo $[\lambda_1, \lambda_n]$. □

Ejercicios

1. Sea A una matriz hermitiana $n \times n$. Sea $x \in \mathbf{C}^n$ un vector con $\|x\|^2 = 1$ y sea $\alpha = x^*Ax$. Al menos un valor propio de A se encuentra en $(-\infty, \alpha]$ y al menos uno en $[\alpha, \infty)$.

2. Sea A una matriz positiva definida con valores propios $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_n$. Como en (2.7), sea E_A el elipsoide asociado a A. Sea $B(\epsilon)$ la bola con centro en 0 y radio ϵ. Demuestre que:

   i) Se cumple $B\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right) \subset E_A \subset B\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)$.

   ii) Deduzca el teorema de Rayleigh-Ritz a partir de la observación (i).

2.9. ¿Qué se puede decir de los demás valores propios de las matrices hermitianas? El siguiente teorema nos da una respuesta. Éste es el primero de varios teoremas de "mini-max" que encontraremos en este libro.

Teorema (Courant-Fischer). *Sea A una matriz hermitiana con valores propios $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_n$. Sea $k \in \{1, \ldots, n\}$, entonces*

$$\lambda_k = \min_{w_1,\ldots,w_{n-k} \in \mathbf{C}^n} \; \max_{\substack{0 \neq x \in \mathbf{C}^n \\ x \perp w_1,\ldots,w_{n-k}}} \frac{x^*Ax}{x^*x}$$

y también

$$\lambda_k = \max_{w_1,\ldots,w_{k-1} \in \mathbf{C}^n} \; \min_{\substack{0 \neq x \in \mathbf{C}^n \\ x \perp w_1,\ldots,w_{k-1}}} \frac{x^*Ax}{x^*x}.$$

Aquí decimos que dos vectores x, w son ortogonales ($x \perp w$) si $x^*w = 0$. Observemos también que si $k = n$ o $k = 1$ obtenemos simplemente el teorema de Rayleigh-Ritz.

Demostración: Mostraremos solamente la primera fórmula, la segunda es análoga. Escribamos $A = UDU^*$ con U unitaria y $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Para $k = n$ ya conocemos el resultado, luego tomemos $1 \leq k < n$.

Si $0 \neq x \in \mathbf{C}^n$, $\frac{x^*Ax}{x^*x} = \frac{y^*Dy}{y^*y}$, con $y = U^*x$. Luego, dadas $w_1, \ldots, w_{n-k} \in \mathbf{C}^n$,

$$\max_{\substack{0 \neq x \in \mathbf{C}^n \\ x \perp w_1,\ldots,w_{n-k}}} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \max_{\substack{0 \neq y \in \mathbf{C}^n \\ y \perp U^*w_1,\ldots,U^*w_{n-k}}} \frac{y^*D_y}{y^*y}$$

$$= \max_{\substack{\|y\|=1 \\ y \perp U^*w_1,\ldots,U^*w_{n-k}}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |y_i|^2$$

$$\geq \max_{\substack{\|y\|=1 \\ y \perp U^*w_1,\ldots,U^*w_{n-k} \\ y_1 = \cdots = y_{k-1} = 0}} \sum_{i=k}^{n} \lambda_i |y_i|^2 \geq \lambda_k.$$

Luego $\displaystyle \min_{w_1,\ldots,w_{n-k} \in \mathbf{C}^n} \; \max_{\substack{0 \neq x \in \mathbf{C}^n \\ x \perp w_1,\ldots,w_{n-k}}} \frac{x^*A^*}{x^*x} \geq \lambda_k$.

Por otra parte, por (2.5), podemos elegir una base $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ortogonal de $\mathbf{C}^n$ formada por vectores propios de A, de manera que $Ax_i = \lambda_i x_i$. El vector $x_k \perp x_1, \ldots, x_{k-1}$ y

$$\frac{x_k^* A x_k}{x_k^* x_k} = \lambda_k.$$

Luego, se alcanza la igualdad deseada. □

Ejercicios

1. Muestre que la hipótesis "A es hermitiana" es esencial en (2.9). Por ejemplo, considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

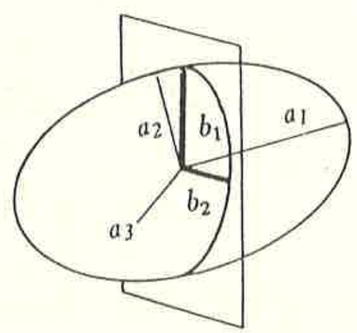
2. ¿Qué puede deducirse del hecho de que $\lambda_k = \lambda_{k+1}$ para dos valores propios consecutivos de una matriz hermitiana?

3. Sea A una matriz hermitiana positiva definida con valores propios $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$. Consideremos el elipsoide E_A con semiejes $a_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \geq a_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \geq \ldots \geq a_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}$. Entonces:

i) Sea H el hiperplano en $\mathbf{R}^n$ generado por los vectores $w_1, \ldots, w_k$. Entonces la intersección E' de E_A con H es un elipsoide en H. Sea b_i la longitud del semieje del elipsoide E' en la dirección w_i; podemos suponer que $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_k$. Entonces se tiene:

$$a_1 \geq b_1, a_2 \geq b_2, \ldots, a_k \geq b_k.$$

Por ejemplo, para $n = 3$ y $k = 2$, podemos ilustrar este hecho como sigue:



ii) Deduzca el Teorema de Courant-Fischer mediante (i).

2.10. Como consecuencia del teorema de Courant-Fischer mostraremos cómo se comportan los valores propios de una submatriz principal de una matriz hermitiana A respecto a los valores propios de A. Este resultado se conoce como el teorema de los valores propios entrelazados.

Teorema. *Sea A_0 una matriz hermitiana de tamaño $n \times n$. Sea $y \in \mathbf{C}^n$ un vector dado y a un número real. Formemos la matriz hermitiana*

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & y \\ y^* & a \end{bmatrix}.$$

Sean $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \lambda_{n+1}$ los valores propios de A y $\lambda_1^0 \leq \lambda_2^0 \leq \ldots \leq \lambda_n^0$ los valores propios de A_0. Entonces tenemos

$$\lambda_1 \leq \lambda_1^0 \leq \lambda_2 \leq \lambda_2^0 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \lambda_n^0 \leq \lambda_{n+1}.$$

Demostración: Tomemos $1 \leq k \leq n$. Probaremos primeramente que $\lambda_k^0 \leq \lambda_{k+1}$. Para ello tomemos un vector $\hat{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{n+1}$ con $x \in \mathbf{C}^n$, $\xi \in \mathbf{C}$.

Llamamos $\hat{w}_i = \binom{w_i}{\xi_i} \in \mathbf{C}^{n+1}$ con $\hat{w}_i \perp \hat{x}$, $i = 1, \ldots, n-k$. Si tenemos que también $\hat{x} \perp e_{n+1}$, entonces

$$0 = \hat{x}^* e_{n+1} = (x^*, \bar{\xi}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{\xi}, \qquad \xi = 0.$$

De donde

$$0 = \hat{x}^* \hat{w}_i = (x^*, 0) \begin{pmatrix} w_i \\ \xi_i \end{pmatrix} = x^* w_i, w_i \perp x, \qquad i = 1, \ldots, n-k.$$

Entonces por (2.9)

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1} &= \min_{\hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{(n+1)-(k+1)} \in \mathbf{C}^{n+1}} \max_{\substack{0 \neq \hat{x} \\ \hat{x} \perp \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{n-k}}} \frac{\hat{x}^* A \hat{x}}{\hat{x}^* \hat{x}} \\ &\geq \min_{\hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{n-k} \in \mathbf{C}^{n+1}} \max_{\substack{0 \neq \hat{x} \\ \hat{x} \perp \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{n-k}, e_{n+1}}} \frac{\hat{x}^* A \hat{x}}{\hat{x}^* \hat{x}} \\ &= \min_{w_1, \ldots, w_{n-k} \in \mathbf{C}^n} \max_{\substack{0 \neq x \\ x \perp w_1, \ldots, w_{n-k}}} \frac{x^* A_0 x}{x^* x} = \lambda_k^0. \end{aligned}$$

Para el último paso observemos que

$$(x^*, 0)\begin{bmatrix} A_0 & y \\ y^* & a \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = x^* A_0 x.$$

Similarmente

$$\begin{aligned}
\lambda_k &= \max_{\hat{w}_1,\ldots,\hat{w}_{k-1}\in\mathbf{C}^{n+1}} \min_{\substack{0\neq\hat{x}\in\mathbf{C}^{n+1}\\ \hat{x}\perp\hat{w}_1,\ldots,\hat{w}_{k-1}}} \frac{\hat{x}^* A\hat{x}}{\hat{x}^*\hat{x}} \\
&\leq \max_{\hat{w}_1,\ldots,\hat{w}_{k-1}\in\mathbf{C}^{n+1}} \min_{\substack{0\neq\hat{x}\in\mathbf{C}^{n+1}\\ \hat{x}\perp\hat{w}_1,\ldots,\hat{w}_{k-1},e_{n+1}}} \frac{\hat{x}^* A\hat{x}}{\hat{x}^*\hat{x}} \\
&= \max_{w_1,\ldots,w_{k-1}\in\mathbf{C}^{n+1}} \min_{\substack{0\neq x\in\mathbf{C}^{n}\\ x\perp w_1,\ldots,w_{k-1}}} \frac{x^* A_x}{x^* x} = \lambda_k^0.
\end{aligned}$$

□

Ejercicios

1. Sea A una matriz hermitiana de tamaño $n \times n$, y sea r un entero con $1 \leq r \leq n$. Sea A_r una submatriz principal de A de tamaño $r \times r$ (es decir, A_r se obtiene de A eliminando $n-r$ columnas y los correspondientes $n-r$ renglones). Si suponemos que

$$\lambda_1(A) \leq \cdots \leq \lambda_n(A)$$
$$\lambda_1(A_r) \leq \cdots \leq \lambda_r(A_r)$$

son los valores propios de las matrices A y A_r respectivamente. Entonces

$$\lambda_k(A) \leq \lambda_k(A_r) \leq \lambda_{k+n-r}(A),$$

para cada entero $1 \leq k \leq r$.

2. Sea $A \in M_n$ una matriz hermitiana y r un entero entre 1 y n. Muestre que

$$\lambda_1(A) + \ldots + \lambda_r(A) = \min \operatorname{tr} U^* A U,$$

donde U corre sobre todas las matrices de tamaño $n \times r$ que satisfacen $U^*U = I \in M_r$.

¿Cuál es el valor de la suma $\lambda_{n-r+1} + \ldots + \lambda_n$?

3. ¿Cuándo se da la igualdad $\lambda_1 = \lambda_1^0$?

4. Interprete el Teorema (2.10) para una matriz positiva definida A con base en el elipsoide E_A.

2.11. Otra consecuencia del Teorema de Courant-Fischer es la posibilidad de comparar los valores propios de $A+B$ con valores propios de A. Como veremos, esto tiene importantes aplicaciones prácticas. Podemos pensar que la matriz hermitiana A es "perturbada" para construir $A + \Delta A$: ¿cómo son perturbados los valores propios?

Teorema (Weyl). *Sean A y B dos matrices hermitianas de tamaño $n \times n$. Sean $\lambda_i(A), \lambda_i(B), \lambda_i(A+B)$ los valores propios de A, B y $A+B$ respectivamente escritos en orden creciente. Para cada $k = 1, 2, \ldots, n$ tenemos*

$$\lambda_k(A) + \lambda_1(B) \leq \lambda_k(A+B) \leq \lambda_k(A) + \lambda_n(B).$$

Demostración: Para cada $0 \neq x \in \mathbf{C}^n$, tenemos que

$$\lambda_1(B) \leq \frac{x^* B x}{x^* x} \leq \lambda_n(B).$$

Luego, a partir de (2.9),

$$\begin{aligned}
\lambda_k(A+B) &= \min_{w_1,\ldots,w_{n-k}\in\mathbf{C}^n} \max_{\substack{0\neq x\in\mathbf{C}^n\\ x\perp w_1,\ldots,w_{n-k}}} \frac{x^*(A+B)x}{x^* x} \\
&\geq \min_{w_1,\ldots,w_{n-k}\in\mathbf{C}^n} \max_{\substack{0\neq x\in\mathbf{C}^n\\ x\perp w_1,\ldots,w_{n-k}}} \left(\frac{x^* A x}{x^* x} + \lambda_1(B)\right) \\
&= \lambda_k(A) + \lambda_1(B).
\end{aligned}$$

De manera similar se obtiene la otra cota. □

Ejercicios

1. Muestre que las desigualdades del Teorema de Weyl no necesariamente son ciertas cuando las matrices A y B no son hermitianas.

2. Sean $A, B \in M_n$ dos matrices hermitianas tales que $A - B$ tiene sólo valores propios no negativos. Pruebe que entonces $\lambda_k(A) \geq \lambda_k(B)$ para toda $k = 1, \ldots, n$.

3. Descomposición en valores singulares

Hemos visto antes la forma de Schur y algunas de sus aplicaciones. Obtendremos ahora una descomposición de una matriz usando también, de matrices unitarias. Esta descomposición será válida no sólo para matrices cuadradas, sino también para matrices rectangulares.

3.1. Sea A una matriz de tamaño $p \times q$. Una descomposición

$$A = UDV^*,$$

donde U es una matriz unitaria de tamaño $p \times p$, V es también unitaria, pero de tamaño $q \times q$ y $D = (d_{ij})$ diagonal, en el sentido de que $d_{ij} = 0$ si $i \neq j$, con $d_{ii} = \sigma_i$ real no negativo, se llama una *descomposición en valores singulares*. Los números σ_i se denominarán los *valores singulares* de A.

Supongamos que $A = UDV^*$ es una descomposición en valores singulares, entonces tenemos

$$AV = UD$$

y haciendo $V = [v_1, \ldots, v_q]$ y $U = [u_1, \ldots, u_p]$, donde v_i es la i-ésima columna de V, y u_i la de U, obtenemos también

$$Av_i = \sigma_i u_i \text{ para } 1 \leq i \leq \min\{p, q\}.$$

Ahora calculamos A^*A:

$$A^*A = VD^*U^*UDV^* = VD^*DV^* \quad \text{y} \quad (A^*A)V = V(D^*D).$$

Obtenemos que V es la matriz unitaria formada con los vectores propios de la matriz normal A^*A (normal: $(A^*A)^*(A^*A) = A^*AA^*A = (A^*A)(A^*A)^*$). Los valores propios de A^*A son de la forma σ_i^2 o bien 0. Similarmente, calculando AA^* obtenemos que U es la matriz unitaria formada con los vectores propios de la matriz normal AA^* y los valores propios de AA^* son de la forma σ_i^2 o 0.

Ejercicio: Si U y V son matrices unitarias, entonces los valores singulares de A y de UAV^* son los mismos.

3.2. Teorema. *Sea A una matriz $p \times q$. Entonces existe una descomposición*

$$A = UDV^*$$

en valores singulares. La matriz $D = (d_{ij})$ tiene $d_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $d_{ii} = \sigma_i \geq 0$, con $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_s$, con $s = \min\{p, q\}$. Se tiene también

$$\operatorname{Spec} AA^* = \operatorname{Spec} A^*A = \begin{cases} \{\sigma_i^2 : i = 1, \ldots, s\} \cup \{0\} & si\ p \neq q \\ \{\sigma_i^2 : i = 1, \ldots, s\} & si\ p = q. \end{cases}$$

Demostración: Podemos suponer que $p \geq q$ y $A \neq 0$ (si $A = 0$, hacemos $D = 0$). La matriz A^*A es hermitiana y distinta de cero (ya que $\operatorname{tr} A^*A = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 > 0$, donde $A = (a_{ij})$). Entonces A^*A tiene al menos un valor propio no cero. Si λ es cualquier valor propio de A^*A con

$$\lambda v = A^*Av, \quad \|v\| = 1,$$

se tiene $\lambda\|v\|^2 = v^*\lambda v = v^*A^*Av = \|Av\|^2$ y $\lambda \geq 0$. O sea, todos los valores propios de A^*A son reales no negativos.

Sea $0 < \lambda_1$ el mayor valor propio de A^*A y $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}$. Sea v_1 un vector propio de A^*A, con

$$A^*Av_1 = \lambda_1 v_1 \quad \text{y} \quad \|v_1\| = 1.$$

Podemos completar una matriz $q \times q$, $V_1 = [v_1, V_0]$ unitaria, cuyas columnas son vectores propios de A^*A.

Definamos $u_1 = \frac{1}{\sigma_1} Av_1$, de manera que $\|u_1\|^2 = \frac{1}{\lambda_1} v_1^* A^* A v_1 = 1$. Completamos a una matriz unitaria $U_1 = [u_1, U_0]$ de tamaño $p \times p$.

Calculemos

$$A' = U_1^* A V_1 = [u_1, U_0]^* A [v_1, V_0] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & U_0^* A V_0 \end{bmatrix},$$

donde $A_0 = U_0^* A V_0$ es una matriz $(p-1) \times (q-1)$. Por hipótesis de inducción, obtenemos matrices P_0 y Q_0 unitarias tales que

$$A_0 = P_0 D_0 Q_0^*, \quad \text{con} \quad D_0 = (d_{ij}),\ d_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j,$$

y $d_{ii} = \sigma_i \geq 0$ como deseamos. Entonces

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_0 \end{bmatrix}^* U_1^* A V_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & D_0 \end{bmatrix},$$

y se obtiene la descomposición en valores singulares. □

Ejercicios

1. ¿Cuál es la descomposición en valores singulares de una matriz A de tamaño $1 \times q$ obtenida como en la demostración del teorema? ¿Es esta descomposición única?
2. Sea A una matriz de tamaño $p \times q$ dada. Para cada $\epsilon > 0$ existe una matriz A_ϵ de tamaño $p \times q$ con valores singulares diferentes, dos a dos, de forma que $\|A - A_\epsilon\| < \epsilon$.

3.3. Regresemos ahora a nuestras consideraciones sobre perturbación de matrices. Veremos en qué forma podemos generalizar el teorema de Weyl (2.11) para matrices arbitrarias.

Teorema. *Sean A y B dos matrices de tamaño $p \times q$. Consideremos la diferencia $E = B - A$.*

Sean $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_m$ valores singulares de A, con $n = \min\{p, q\}$ y $\tau_1 \geq \cdots \geq \tau_m$ como valores singulares de B. Entonces:

$$|\sigma_i - \tau_i| \leq \sqrt{\rho(EE^*)}, \quad \text{para } i = 1, \ldots, m,$$

donde $\rho(EE^*)$ es el radio espectral de la matriz EE^*.

Para la demostración de este teorema probaremos primero el siguiente resultado técnico.

Teorema auxiliar. *Sea A una matriz $p \times q$ y $m = \min\{p, q\}$. Definimos una matriz $\tilde{A}$ de tamaño $(p+q) \times (p+q)$ de la siguiente manera*

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{bmatrix}.$$

Sean $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ los valores singulares de A. Entonces los valores propios de $\tilde{A}$ son $\sigma_1, \ldots, \sigma_m, -\sigma_1, \ldots, -\sigma_m$ y $|p-q|$ ceros adicionales.

Demostración: Supongamos que $p \geq q$ y sea $A = U^* D V$ una descomposición en valores singulares de A. Escribamos

$$D = \begin{bmatrix} \Sigma \\ --- \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ con } \Sigma \text{ matriz de tamaño } q \times q$$

de modo que en $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_q)$ sean $\sigma_1, \ldots, \sigma_q$ los valores singulares de A. Partimos a la matriz U en los bloques correspondientes

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ --- \\ U_2 \end{bmatrix}, \text{ con } U_1 \text{ matriz } q \times q.$$

Hacemos $\tilde{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_1$ y $\tilde{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} V$. Definimos

$$W = \begin{bmatrix} \tilde{U} & \tilde{V} \\ -\tilde{U} & \tilde{V} \\ U_2 & 0 \end{bmatrix} \text{ de tamaño } (p+q) \times (p+q)$$

que es una matriz unitaria.

Calculemos $W\tilde{A}W^*$,

$$\begin{aligned} W\tilde{A}W^* &= \begin{bmatrix} \tilde{U} & \tilde{V} \\ -\tilde{U} & \tilde{V} \\ U_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{U}^* & -\tilde{U}^* & U_2^* \\ \tilde{V}^* & \tilde{V}^* & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{V}A^* & \tilde{U}A \\ \tilde{V}A^* & -\tilde{U}A \\ 0 & U_2 A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{U}^* & -\tilde{U}^* & U_2^* \\ \tilde{V}^* & \tilde{V}^* & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{V}A^*\tilde{U}^* + \tilde{U}A\tilde{V}^* & -\tilde{V}A^*\tilde{U}^* + \tilde{U}A\tilde{V}^* & \tilde{V}A^*U_2^* \\ \tilde{V}A^*\tilde{U}^* - \tilde{U}A\tilde{V}^* & -\tilde{V}A^*\tilde{U}^* - \tilde{U}A\tilde{V}^* & \tilde{V}A^*U_2^* \\ U_2A\tilde{V}^* & U_2A\tilde{V}^* & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Observemos que $\begin{bmatrix} \Sigma \\ --- \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} AV^* = \begin{bmatrix} U_1AV^* \\ --- \\ U_2AV^* \end{bmatrix}$, de donde

$$U_1AV^* = \Sigma = \Sigma^* = VA^*U_1^*$$
$$U_2AV^* = 0,\ VA^*U_2^* = 0.$$

Así, $W\tilde{A}W^* = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\Sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. □

Demostración del Teorema: Supongamos que $p \geq q$.

Consideremos las matrices $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{E} = \tilde{B} - \tilde{A}$ construidas como en el teorema auxiliar. Cada una de estas matrices es hermitiana. Ordenemos los valores propios de $\tilde{A}$ así:

$$\begin{aligned} -\sigma_1(A) &= \lambda_{-q}(\tilde{A}) \leq -\sigma_2(A) = \lambda_{-q+1}(\tilde{A}) \leq \cdots \leq -\sigma_q(A) \\ &= \lambda_{-1}(\tilde{A}) \leq \lambda_1(\tilde{A}) = \cdots = \lambda_{p-q}(\tilde{A}) = 0 \leq \lambda_{(p-q)+1}(\tilde{A}) \\ &= \sigma_q(A) \leq \cdots \leq \lambda_p(\tilde{A}) = \sigma_1(A); \end{aligned}$$

y similarmente para $\tilde{B}$ y $\tilde{E}$. Entonces por el teorema de Weyl tenemos:

$$\lambda_k(\tilde{A}) + \lambda_{-q}(\tilde{E}) \leq \lambda_k(\tilde{B}) \leq \lambda_k(\tilde{A}) + \lambda_p(\tilde{E}), \text{ para } k = (p-q)+1, \ldots, p.$$

Finalmente tenemos

$$|\sigma_k(B) - \sigma_k(A)| = |\lambda_k(\tilde{B}) - \lambda_k(\tilde{A})| \leq \sigma_1(E) = \sqrt{\rho(EE^*)}. \quad □$$

3.4. En el teorema anterior nos aparece el número

$$d(A,B) = \sqrt{\rho((B-A)(B-A)^*)}$$

como una medida de la separación o distancia entre A y B. ¿Será ésta una buena forma de medir la distancia entre dos matrices? Sí lo es. Para ver esto recordemos primero que una *distancia* en un conjunto X es una función: $d\colon X \times X \to \mathbf{R}$ que satisface:

($d1$): $d(x,y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$.

($d2$): $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

($d3$): $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ para cualesquiera tres puntos (*desigualdad del triángulo*). Si además X es un $\mathbf{C}$ espacio vectorial nos gustaría que la función d satisficiera:

($d4$): $d(cx, cy) = |c| d(x,y)$, para $x, y \in X$, $c \in \mathbf{C}$ (*homogeneidad*).

Lema. *Sea $M_{p,q}$ el espacio vectorial de las matrices de tamaño $p \times q$. Consideremos la función $d\colon M_{p,q} \times M_{p,q} \to \mathbf{R}$ dada por*

$$d(A,B) = \sqrt{\rho((B-A)(B-A)^*)}.$$

Entonces d es una distancia homogénea en $M_{p,q}$.

Demostración: Claramente ($d1$) se satisface. Supongamos entonces que $d(A,B) = 0$ y sea $E = B - A$. La matriz EE^* es hermitiana y sus valores propios $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_p$ son reales no negativos (ver 3.2). Si $\rho(EE^*) = 0$, entonces $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$. Pero $EE^* = U^*DU$ para una matriz unitaria U y $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ diagonal. Luego $EE^* = 0$, pero la entrada (i,i) de EE^* es la norma del i-ésimo renglón de E. Por tanto $E = 0$ y $A = B$.

Dadas tres matrices A, B y C, y $E = B - A$, $F = C - B$, $G = C - A$. Supongamos que $p \geq q$ y consideremos las matrices $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ como en el teorema auxiliar (3.3). Por el teorema de Weyl obtenemos

$$\sigma_k(G) \leq \sigma_k(E) + \sigma_p(F) \text{ para } k = 1, \ldots, p,$$

donde $\sigma_1(G) \leq \cdots \leq \sigma_p(G)$ son valores singulares de G (respectivamente para E, F). En particular,

$$\sigma_p(G) \leq \sigma_p(E) + \sigma_p(F),$$

y $\sigma_p(E)^2 = \rho(EE^*)$. Luego,

$$d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C).$$

Finalmente, la propiedad ($d4$) se cumple claramente. □

3.5. Ya que la función d nos da una buena forma de medir distancia entre matrices, usémosla un poco más para ver cómo podemos aproximar una matriz por medio de matrices "más simples".

Teorema. *Sea A una matriz de tamaño $p \times q$. Supongamos $p \geq q$ y sean $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_m > 0$ los valores singulares positivos de A. Para $1 \leq k \leq m$, se cumple*

$$\min\{d(A,B): B \textit{ tiene rango } k\} = \sigma_{k+1}$$

(hacemos $\sigma_{m+1} = 0$). Sean U, V matrices unitarias y $D = (d_{ij})$ una matriz diagonal, donde $d_{ii} = \sigma_i$ si $1 \leq i \leq q$, y $d_{ij} = 0$ en caso contrario, que satisface $A = UDV^*$. Definimos

$$A^{(k)} = UD^{(k)}V^* \textit{ con } D^{(k)} = (d_{ij}^{(k)}) \textit{ con } d_{ii}^{(k)} = \sigma_i \textit{ si } 1 \leq i \leq k$$

y $d_{ij}^{(k)} = 0$, en caso contrario. Entonces $A^{(k)}$ tiene rango k y $d(A, A^{(k)}) = \sigma_{k+1}$.

Demostración: Si B tiene rango k, sean $\tau_1 \geq \cdots \geq \tau_k > 0$ los valores singulares positivos de B. Entonces

$$d(A,B) \geq |\sigma_i - \tau_i| \text{ para } i = 1, \ldots, m \text{ haciendo } \tau_i = 0 \text{ si } i > k+1.$$

Entonces $d(A,B) \geq |\sigma_{k+1}| = \sigma_{k+1}$.

Por otra parte los valores singulares de $A^{(k)}$ son $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_k$. Además

$$d(A, A^{(k)}) = \rho(\tilde{E})$$

para $\tilde{E} = \begin{bmatrix} 0 & A - A^{(k)} \\ A - A^{(k)} & 0 \end{bmatrix}$. Veamos un poco más de cerca a $E = A - A^{(k)}$.

$E = A - A^{(k)} = UD^{(k+1,n)}V^*$, donde $D^{(k+1,n)} = (c_{ij})$ con $c_{ii} = \sigma_i$, $k+1 \leq i \leq m$ y $c_{ij} = 0$ en caso contrario. Entonces los valores singulares de E son $\sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_m$ y $\rho(\tilde{E}) = \sigma_{k+1}$. □

Ejercicios

1. Considere la matriz $A_\epsilon \in M_n$,

$$A_\epsilon = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & \\ 0 & & \ldots & 0 & 1 \\ \epsilon & 0 & & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

para $\epsilon > 0$. Muestre que el polinomio característico de A_ϵ es de la forma $t^n - \epsilon$. Calcule los valores propios y los valores singulares de la matriz A_ϵ. Suponga que $n = 10$ y $\epsilon = 10^{-10}$ y muestre que la pertubación que transforma A_0 en A_ϵ altera los valores propios en un 10 por ciento, mientras que el orden de pertubación de los valores singulares es tan sólo de 10^{-10}.

2. Muestre que el teorema espectral para matrices normales se sigue como consecuencia del teorema de descomposición en valores singulares.

3.6. Los teoremas de aproximación de matrices dados en esta sección pueden ser útiles para el envío de información. En efecto, cuando se requiere enviar información a grandes distancias y a un costo alto (por ejemplo, fotografías desde el espacio o la voz de una persona por la red telefónica) es necesario elegir lo que se ha de enviar, de modo que no haga falta enviar cantidades inmanejables de datos, pero además de manera que con los datos que se envíen sea suficiente para que, una vez decodificados, se pueda recontruir muy aproximadamente la información que se deseaba transmitir. (Esto es, la fotografía debe llegar clara, o la voz debe ser reconocible).

Una fotografía consiste en una serie de pequeños cuadrados a los que se asignan colores diferentes. Para simplificar consideraremos sólo fotografías en blanco y negro, de modo que cada cuadro de la fotografía toma uno de estos dos colores. Por ejemplo, si se desea enviar una fotografía cuyo campo ha sido dividido en 500×500 cuadrados (como es el caso aproximado de una pantalla de computadora personal), deberían enviarse 250,000 datos como las entradas de una matriz A de tamaño 500×500. Pero puede ser posible enviar muchos menos datos de manera que la imagen de la fotografía todavía sea suficientemente clara.

Una forma para lograr esto es obtener la descomposición en valores singulares $A = UDV^*$ y ver si una aproximación de bajo rango $A^{(k)}$ representa adecuadamente la imagen. Requerimos observar dos cosas:

a) Sean $u_1, \ldots, u_n$ los renglones de la matriz U y $v_1, \ldots, v_n$ los renglones de V. Entonces la matriz

$$A^{(k)} = \sigma_1 u_1 v_1^* + \ldots + \sigma_k u_k v_k^*$$

requiere para su construcción k valores propios y $2k$ vectores, esto es, un total de $2kn + k$ datos.

b) Podemos apreciar la aproximación de $A^{(k)}$ a A calculando la distancia entre estas matrices. Por (3.5), $d(A, A^{(k)}) = \sigma_{k+1}$.

Por ejemplo, si en el caso de nuestra fotografía el valor de σ_7 es suficientemente pequeño, entonces bastará con hacer $k = 6$ y enviar por tanto sólo 3,006 datos, lo que representa un significativo ahorro de más del 98% de la información.

Ejercicio: Para el siguiente ejercicio se requerirá un programa de computadora (como *MatLab*, *Mathematica* o alguno similar).

Considere el dibujo que presentamos a continuación. Divida el campo del dibujo en $n \times n$ cuadrados iguales con $n = 10, 15, 20$. En cada caso construya la matriz A correspondiente y calcule $A^{(k)}$ para diferentes valores de k. Calcule las diferentes distancias entre A y $A^{(k)}$ y compare con el dibujo que resulta de trazar la gráfica de la matriz $A^{(k)}$ en el mismo campo que la matriz A. ¿Para qué k las aproximaciones son suficientemente buenas?