Práctico 0

Repaso de conjuntos y funciones

Para realizar estos ejercicios sugerimos leer el material “Conceptos básicos de Matemática”, capítulos 1 y 2.

Conjuntos

1. Sean los conjuntos
   - $A = \{e, s, t, u, d, i, a, r\}$.
   - $B = \{m, a, t, e, m, a, t, i, c, a, s\}$.
   - $C = \{e, s\}$.
   - $D = \{f, a, s, c, i, n, a, n, t, e\}$.

   (a) Describa los conjuntos $A \cup B$, $A \cup D$, $A \cap B$, $A \cap D$.
   (b) Compruebe que C es subconjunto de A, B y D.
   (c) Demuestre que $A \cap D \subseteq B \cap D$.
   (d) Compruebe que $A \setminus D = A \setminus B$.
   (e) Demuestre que $\{f, r, a, n, c, e, s\} \subseteq A \cup D$.

2. Sean los conjuntos $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 0\}$, $C = \{0, \{1\}\}$, $D = \{\{0\}, 1\}$, $E = \{\{0\}, \{0, 1\}\}$ y $F = \{\{0\}, \{1, 0\}\}$. Indique si las siguientes expresiones son correctas, y justifique.

   (a) $A \subseteq B$.
   (b) $A = B$.
   (c) $A \subseteq C$.
   (d) $A \subseteq D$.
   (e) $A = D$.
   (f) $E \subseteq F$.
   (g) $F \subseteq E$.
   (h) $A \in E$.
   (i) $A \subseteq E$.
   (j) $A \cap B = A$.
   (k) $E \cap F = \{1, 0\}$.
   (l) $E \cup F = \{0\} \cup A$.
   (m) $B \subseteq F$.

3. Sea $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ($\emptyset$ es el conjunto vacío). Indique si las siguientes expresiones son correctas, y justifique.

   (a) A es el conjunto vacío.
   (b) $\emptyset \subseteq A$.
   (c) $\emptyset \in A$.
   (d) $\{\emptyset\} \in A$.

(e) $\{\emptyset\} \subseteq A$.
(f) $A \cap \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$.
(g) $A \cap \emptyset = \emptyset$.
(h) $A \cup \{\emptyset\} = A$.
(i) $A \cap \{\emptyset\} = \emptyset$.

4. Sea $A = \{xy \mid x, y \in \mathbb{N}\}$. Demuestre que $A = \mathbb{N}$, donde $\mathbb{N}$ denota el conjunto de los números naturales.

5. Sean A, B y C tres conjuntos tales que $A \subseteq B \subseteq C \subseteq A$. Demuestre que
$$A = B = C.$$
Más aún, si $A_1, A_2, \cdots, A_n$ son n conjuntos tales que
$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq A_1,$$
demuestre que
$$A_1 = A_2 = \cdots = A_n.$$

6. Sean A, B, C tres conjuntos cualesquiera. Demuestre las leyes de De Morgan:
   (a) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.
   (b) $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.

7. Dé una interpretación geométrica de los conjuntos $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$, donde $\mathbb{R}$ denota el conjunto de los números reales.

8. En el plano $\mathbb{R}^2$ describa geométricamente el conjunto $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Haga lo mismo con el conjunto $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, donde $\mathbb{Z}$ denota el conjunto de los números enteros.

Funciones

11. Se dice que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es lineal si
$$f(cx_1 + x_2) = cf(x_1) + f(x_2),$$
en donde $c, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Determine cuáles de las siguientes funciones son lineales:
   (a) $f(x) = x$.
   (b) $f(x) = 3x^2$.
   (c) $f(x) = x + 1$
   (d) $f(x) = 2x^3 + 1$.
   (e) $f(x) = mx$ donde m es una constante.
   (f) $f(x) = mx + k$ donde m y k son constantes.

12. Demuestre que la función $f : A \to B$ es una biyección si, y sólo si cumple la siguiente propiedad: dado $b \in B$ el conjunto $f^{-1}(\{b\}) \subseteq A$ tiene un solo elemento.

13. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos funciones. Demuestre que
   (a) Si f y g son inyectivas entonces $g \circ f$ es inyectiva.
   (b) Si f y g son sobreyectivas entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.
   (c) Si f y g son biyectivas entonces $g \circ f$ es biyectiva.

14. Sea $f : A \to B$ una función de A en B y sean X_1 y X_2 subconjutnos de A. Demuestre que
   a) $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$.
   b) $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f_(X_2)$
   c) Compruebe que $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$ si, y sólo si f es inyectiva.