1 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Empecemos con una motivación geométrica. Supongamos que en el plano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (donde $\mathbb{R}$ denota el conjunto de los números reales) tenemos dos rectas. Se presenta la siguiente tricotomía:

1. Las dos rectas se cortan en un único punto.
2. Las dos rectas no se cortan en ningún punto (es decir, son paralelas).
3. Las dos rectas se cortan en todos sus puntos (es decir, son coincidentes).

Por "tricotomía" queremos decir que solamente se va a cumplir uno de los escenarios anteriores. Si tenemos las rectas representadas gráficamente en $\mathbb{R}^2$, podemos concluir qué ocurre simplemente mirando sus gráficas. Ahora, lo anterior también puede responderse a través de métodos algebraicos. En *Geometréa Analítica* es muy común la representación de objetos geométricos mediante ecuaciones algebraicas. En particular, las rectas se representan mediante la ecuación

$$y = m\,x + b,$$

donde m es una constante real conocida como *pendiente*, y b otra constante llamada *punto de corte* con el eje Y (vertical).[1] Entonces, uno puede saber si dos rectas se cortan, son paralelas, o son coincidentes, únicamente a partir de información deducida de las ecuaciones que las representan. Entendamos esto último mediante algunos ejemplos.

1. Considere las rectas de $\mathbb{R}^2$ dadas por

   $$l\colon\ y = 2x - 1 \qquad \text{y} \qquad r\colon\ y = -3x + 6.$$

   Un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se encuentra en ambas rectas si satisface

   $$y = 2x - 1 \qquad \text{e} \qquad y = -3x + 6.$$

   simultáneamente. Entonces,

   $$\begin{aligned} 2x - 1 &= y = -3x + 6 \\ 2x - 1 &= -3x + 6 \\ x &= 7/5. \end{aligned}$$

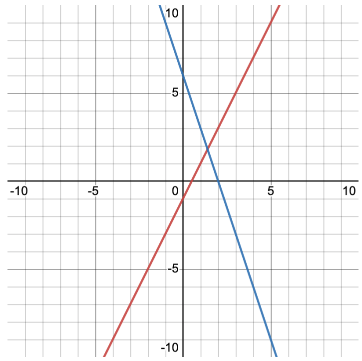
   Sustituyendo este valor en $y = 2x - 1$, se obtiene

   $$y = 2\,\frac{7}{5} - 1 = 9/5.$$

[1] Hay una excepción: las rectas paralelas al eje Y. Éstas no pueden representarse como $y = m\,x + b$. La recta que pasa por el punto $(a, 0)$ del eje X y que es paralela al eje Y se representa mediante la ecuación $x = a$.

Note que se obtiene lo mismo si sustituimos en $y = -3x+6$. Por lo tanto, las rectas l y r se intersectan en el punto $(7/5, 9/5)$.

Gráficamente, tenemos:



También podemos expresar la intersección de dos rectas con notación conjuntista. Formalmente hablando, las rectas l y r son subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ (ya que los puntos o elementos de las rectas son puntos $(x, y) \in \mathbb{R}$). Específicamente,

$$l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = 2x - 1\} = \{(x, 2x - 1) \,/\, x \in \mathbb{R}\},$$
$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = -3x + 6\} = \{(x, -3x + 6) \,/\, x \in \mathbb{R}\}.$$

Luego,

$$l \cap r = \{(7/5, 9/5)\}.$$

2. Considere la recta l del ejemplo anterior junto con

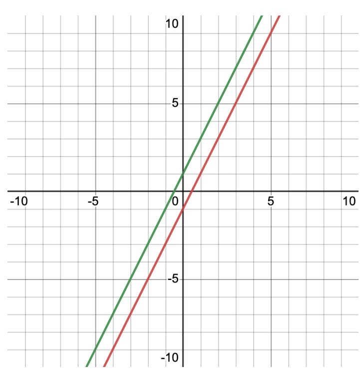
$$s: \; y = 2x + 1.$$

Luego, tenemos que $(x, y) \in l \cap s$ si $2x - 1 = y = 2x + 1$. Entonces,

$$2x - 1 = 2x + 1$$
$$-1 = 1.$$

Lo anterior es claramente una contradicción, que viene de suponer que existe un punto (x, y) en l y s a la vez. Se tiene así que tal punto no existe, por lo cual las rectas l y s no se cortan.

Gráficamente, tenemos:



Por otro lado, en notación conjuntista, se tiene

$$l \cap s = \varnothing.$$

3. Las rectas l y l': $2y = 4x - 2$ son coincidentes, ya que al dividir por 2 la ecuación $2y = 4x - 2$ nos da la ecuación de la recta l.

En términos más generales, se tiene un problema de la forma

$$\begin{cases} l_1: \ y = m_1\, x + b_1, \\ l_2: \ y = m_2\, x + b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

La idea es encontrar, de haberlos, los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen estas dos igualdades simultáneamente. Por otro lado, puede darse solo uno de los siguientes resultados:

1. Existe un único punto (solución única) que satisface ambas igualdades, es decir, las rectas l_1 y l_2 se cortan.

2. No existe ningún punto (no hay solución) que satisface ambas igualdades, es decir, las rectas l_1 y l_2 son paralelas.

3. Existen infinitos puntos (infinitas soluciones) que satisfacen ambas igualdades, es decir, las rectas l_1 y l_2 son coincidentes.

El problema planteado en (1.1) se conoce como *sistema de ecuaciones lineales*, y nuestro objetivo será encontrar la o las soluciones (de haberlas) a dichos problemas.

Ahora, no todos los sistemas de ecuaciones lineales corresponden a problemas de intersección de rectas. Podemos aumentar la complejidad del problema ya sea agregando más ecuaciones, o más incógnitas, o ambas cosas. Por ejemplo,

- podemos preguntarnos si existe un punto de intersección entre las rectas

$$\begin{cases} y = 2x - 1, \\ y = -3x + 6, \\ 2y = x - 4; \end{cases}$$

- o bien preguntarnos por la intersección entre dos planos en $\mathbb{R}^3$, digamos

$$\begin{cases} 3x - y + z = 0, \\ x + 2y - 4z = 1. \end{cases}$$

1.1. Sistemas de ecuaciones y su clasificación

Empecemos por definir qué se entiende por una ecuación lineal, para después hablar de sistemas.

Definición 1.1

Una **ecuación lineal** es una igualdad de la forma

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b,$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$ con constantes reales (fijas, no todas cero) llamadas **coeficientes**, y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las variables o incógnitas.

Ejemplo 1.

1. $y = 2x + 1$, $3x - y + 2z = 10$ y $-\dfrac{2}{3}x_1 + 4x_2 - 11x_3 + \sqrt{2}x_4 = \ln(8)$ son ecuaciones lineales.

2. $xy = 1$, $y = x^2 + 2x + 1$, $3x + \sin(y) = z^3$, $\tan(y) = \log(z) + 3$ y $\sqrt{x} - 11 = e^{y+z}$ no son ecuaciones lineales.

Definición 1.2

Un **sistema de ecuaciones lineales** es una colección de ecuaciones lineales. Usualmente, nos denotamos como un arreglo de la forma

$$(S)\colon \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

El sistema (S) es de **orden** $m \times n$, donde m indica el número de ecuaciones y n el número de variables. Los valores a_{ij}, con $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ y $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, son llamados **coeficientes** del sistema. Note que i indica la ecuación donde se encuentra a_{ij}, mientras que j indica la variable a la cual multiplica.

Una **solución** de (S) es un punto $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (n veces) tal que al sustituir

$$x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2,\ \cdots\ x_n = \alpha_n,$$

en (S), entonces se verifican las m ecuaciones simultáneamente. Denotaremos por $\mathrm{Sol}(S)$ al conjunto de todas las soluciones de (S).

Repensando el problema de intersección entre rectas en el plano $\mathbb{R}^2$, de manera más general, se puede clasificar cualquier sistema de ecuaciones según su conjunto de soluciones.

Definición 1.3

Diremos que un sistema de ecuaciones lineales (S) es:

- **compatible determinado** si (S) tiene solución única, es decir, si $\mathrm{Sol}(S)$ está formado por un solo elemento de $\mathbb{R}^n$.
- **compatible indeterminado** si (S) tiene infinitas soluciones, es decir, $\mathrm{Sol}(S)$ es un conjunto formado por un número infinito de elementos de $\mathbb{R}^n$.
- **incompatible** si (S) no tiene solución, es decir, $\mathrm{Sol}(S) = \varnothing$.

Ejemplo 2. Hallar el conjunto de soluciones de los siguientes sistemas y clasificarlos:

1. $(S)\colon \begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 = 8. \end{cases}$

En este primer ejemplo, las ecuaciones son bastante sencillas de trabajar. Por ejemplo, es muy fácil despejar x_1 o x_2 de la primera ecuación (aunque teóricamente, se podrá despejar en cualquiera de ellas). Tenemos así que

$$x_1 = 4 - x_2.$$

Luego, sustituyendo en la segunda y tercera ecuación, se tiene

$$\begin{cases} 2(4 - x_2) - 3x_2 = 7, \\ 3(4 - x_2) + 2x_2 = 8. \end{cases} \to \begin{cases} 8 - 2x_2 - 3x_2 = 7, \\ 12 - 3x_2 + 2x_2 = 8. \end{cases} \to \begin{cases} 5x_2 = 1, \\ x_2 = 4. \end{cases}$$

Tenemos entonces de lo anterior que $5x_2 = 1$ y $x_2 = 4$ al mismo tiempo, de donde $20 = 5 \cdot 4 = 1$, lo cual es claramente una contradicción. Esto quiere decir que (S) no tiene solución ($\mathrm{Sol}(S) = \varnothing$). Por lo tanto, (S) es un sistema incompatible.

2. $(S)\colon \begin{cases} 2x - y + 3z = 3, \\ 4x - y + 5z = 5, \\ x + z = 1. \end{cases}$

Análogo al ejemplo anterior, podemos despejar x o z de la tercera ecuación:

$$z = 1 - x.$$

Al sustituir en la primera y segunda ecuación, nos queda

$$\begin{cases} 2x - y + 3(1 - x) = 3, \\ 4x - y + 5(1 - x) = 5. \end{cases} \to \begin{cases} 2x - y + 3 - 3x = 3, \\ 4x - y + 5 - 5x = 5. \end{cases} \to \begin{cases} -x - y = 0, \\ -x - y = 0. \end{cases}$$

Tenemos así que $y = -x$. Por lo tanto, cualquier punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ con $y = -x$ y $z = 1 - x$ es solución del sistema (S). En otras palabras,

$$\mathrm{Sol}(S) = \{(x, -x, 1 - x) \,/\, x \in \mathbb{R}\}.$$

El sistema (S) tiene infinitas soluciones, por lo que es compatible indeterminado. Para cada valor real de x, se tiene una solución de (S). Por ejemplo:

- Para $x = 0$, el punto $(0, 0, 1)$ es una solución de (S).
- Para $x = -1$, el punto $(-1, 1, 2)$ es una solución de (S).

Las ecuaciones que aparecen en (S) son descripciones algebraicas de planos en $\mathbb{R}^3$. Así que, geométricamente, los tres planos dados por

$$2x - y + 3z = 3,\ 4x - y + 5z = 5 \text{ y } x + z = 1$$

tienen intersección a lo largo de la recta $\{(x, -x, 1 - x) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$. Podemos notar que el conjunto anterior es una recta al hacer

$$(x, -x, 1 - x) = x(1, -1, -1) + (0, 0, 1), \text{ con } x \in \mathbb{R}.$$

Entonces, $\mathrm{Sol}(S)$ es la recta en $\mathbb{R}^3$ con vector de dirección $(1, -1, -1)$ y que pasa por el punto $(0, 0, 1)$.[2]

[2]El tema de rectas y planos en $\mathbb{R}^3$ será trabajado más adelante. No es necesario que el lector esté familiarizado con estas nociones aún.

3. $(S): \begin{cases} x - 2y + z = 7, \\ 3x + y + z = 8, \\ x - y + 4z = 15. \end{cases}$

En este ejemplo, vamos a proceder de manera diferente en la resolución, aplicando un procedimiento llamado *reducción por filas*. Esto consiste en realizar ciertas manipulaciones algebraicas en las ecuaciones con la finalidad de obtener un sistema más sencillo de resolver.[3] La reducción conviene cuando se tiene un sistema con muchas ecuaciones y muchas incógnitas, ya que en estos casos el despeje de una de las variables y su sustitución en las ecuaciones restantes se convierte en un procedimiento más lento.

A partir de ahora, llamaremos a la i-ésima ecuación de un sistema como F_i[4]. Así, en nuestro caso tenemos que F_1, F_2 y F_3 denotan la primera, segunda y tercera ecuación de (S), respectivamente.

- Colocamos en la fila 2 el resultado de restar a la fila 2 tres veces la fila 1 (esto lo denotamos por $F_2 \leftarrow (F_2 - 3F_1)$):

$$\begin{cases} x - 2y + z = 7, \\ 3x + y + z = 8, \\ x - y + 4z = 15. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 7, \\ 7y - 2z = -13, \\ x - y + 4z = 15. \end{cases}$$

- Colocamos en la fila 3 el resultado de restar la fila 1 a la fila 3 ($F_3 \leftarrow (F_3 - F_1)$):

$$\begin{cases} x - 2y + z = 7, \\ 7y - 2z = -13, \\ x - y + 4z = 15. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 7, \\ 7y - 2z = -13, \\ y + 3z = 8. \end{cases}$$

- Intercambiamos fila 2 con fila 3 ($F_2 \leftrightarrow F_3$):

$$\begin{cases} x - 2y + z = 7, \\ 7y - 2z = -13, \\ y + 3z = 8. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 7, \\ y + 3z = 8, \\ 7y - 2z = -13. \end{cases}$$

- $F_3 \leftarrow (F_3 - 7F_2)$:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 7, \\ y + 3z = 8, \\ 7y - 2z = -13. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 7, \\ y + 3z = 8, \\ -23z = -69. \end{cases}$$

- Multiplicamos la tercera fila por $-1/23$ ($-\dfrac{1}{23}\,F_3$):

$$\begin{cases} x - 2y + z = 7, \\ y + 3z = 8, \\ -23z = -69. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 7, \\ y + 3z = 8, \\ z = \dfrac{-69}{-23} = 3. \end{cases}$$

La finalidad es ir cancelando incógnitas. Además, no existe una manera única de hacer operaciones a la hora de deducir. Por ejemplo, otra manera de proceder habrá sido eliminar $-2y$ en la primera ecuación y $-y$ en la tercera haciendo $F_1 + 2F_2$ y $F_3 + F_2$, respectivamente.

[3]Tales manipulaciones las detallaremos más adelante.
[4]La "F" viene de fila. Esto cobrará sentido más adelante.

Tenemos entonces que $z = 3$. Podemos en este punto sustituir $z = 3$ en la segunda ecuación, y nos queda $y + 3 \cdot 3 = 8$. Luego, $y = -1$. Ahora, podemos sustituir los valores de y y de z en la primera ecuación, obteniendo $x - 2(-1) + 3 = 7$, es decir, $x = 2$. Por lo tanto, (S) tiene solución única dada por

$$\mathrm{Sol}(S) = \{(2, -1, 3)\}.$$

Es decir, (S) es compatible determinado. Al procedimiento realizado a partir de $z = 3$ se le suele llamar **sustitución hacia atrás**.

1.2. Transformaciones elementales

Las operaciones algebraicas que se hicieron en el Ejemplo 2 (2) para llegar a la solución se conocen como transformaciones elementales, y se clasifican en tres tipos. Especifiquemos esto en la siguiente definición.

Definición 1.4

Una **transformación elemental** es cualquiera de las siguientes operaciones aplicadas a las ecuaciones de un sistema de ecuaciones lineales:

- Intercambiar de lugares la ecuación número i con la ecuación número j. Esto se denotará por $F_i \leftrightarrow F_j$.
- Multiplicar la ecuación número i por un múltiplo escalar $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ (λ distinto de cero). Esto lo denotaremos por $\lambda\, F_i$.
- Sumar a la ecuación número i un múltiplo escalar no nulo de la ecuación número j. Esto lo denotaremos por $F_i \leftarrow (F_i + \lambda\, F_j)$.

Una propiedad de las operaciones anteriores es que éstas no alteran el conjunto de soluciones de un sistema. Este hecho constituye el primer resultado del curso.

Proposición 1.1

Si (S) es un sistema de ecuaciones lineales, y (S') denota el sistema ecuaciones resultante de aplicar cualquier transformación elemental, entonces

$$\mathrm{Sol}(S) = \mathrm{Sol}(S').$$

Cuando dos sistemas comparten el mismo conjunto solución, diremos que son **equivalentes**.

Idea de la demostración: Se debe probar una igualdad entre conjuntos, a saber, $\mathrm{Sol}(S) = \mathrm{Sol}(S')$. Luego, debe cumplirse tanto $\mathrm{Sol}(S) \subseteq \mathrm{Sol}(S')$ como $\mathrm{Sol}(S) \supseteq \mathrm{Sol}(S')$. Para demostrar $\mathrm{Sol}(S) \subseteq \mathrm{Sol}(S')$, por ejemplo, se debe tomar cualquier solución de (S), es decir, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ que verifica las m ecuaciones de (S), y ver que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ también verifica las m ecuaciones de (S') (ver la Definición 1.1).

Demostración. Demostraremos esto únicamente para la transformación elemental

$$F_i \leftarrow (F_i + \lambda\, F_j).$$

Los otros dos casos se dejan como ejercicio al lector. En lo que sigue, supondremos que el sistema (S) (y por lo tanto también (S')) está formado por m ecuaciones de n incógnitas. Denotaremos por F_k la k-ésima ecuación de (S), y por F'_k la k-ésima ecuación de (S'). Note entonces que

$$F'_k = \begin{cases} F_k & \text{si } k \neq i, \\ F_i + \lambda\, F_j & \text{si } k = i. \end{cases}$$

Es decir, las ecuaciones de (S) y (S') coinciden salvo en el lugar i.

Pasemos ahora a demostrar la doble contención entre los conjuntos de soluciones:

- $\mathrm{Sol}(S) \subseteq \mathrm{Sol}(S')$: Sea $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ una solución de (S). Por los comentarios anteriores, basta con probar que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ satisface la i-ésima ecuación de (S'), la cual es:

  $$(a_{i1} + \lambda\, a_{j1})x_1 + (a_{i2} + \lambda\, a_{j2})x_2 + \cdots + (a_{in} + \lambda\, a_{jn})x_n = (b_i + \lambda\, b_j). \tag{1.2}$$

  Como $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ es solución de (S), va a satisfacer las ecuaciones i y j de (S), es decir,

  $$\begin{aligned} a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{in}\alpha_n &= b_i, \\ a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + \cdots + a_{jn}\alpha_n &= b_j. \end{aligned}$$

  Multipliquemos la segunda igualdad por λ:

  $$\begin{aligned} a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{in}\alpha_n &= b_i, \\ \lambda a_{j1}\alpha_1 + \lambda a_{j2}\alpha_2 + \cdots + \lambda a_{jn}\alpha_n &= \lambda b_j. \end{aligned}$$

  Sumemos estas dos últimas igualdades:

  $$\begin{aligned} (a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{in}\alpha_n) + (\lambda a_{j1}\alpha_1 + \lambda a_{j2}\alpha_2 + \cdots + \lambda a_{jn}\alpha_n) &= b_i + \lambda b_j \\ (a_{i1} + \lambda\, a_{j1})\alpha_1 + (a_{i2} + \lambda\, a_{j2})\alpha_2 + \cdots + (a_{in} + \lambda\, a_{jn})\alpha_n &= b_i + \lambda\, b_j. \end{aligned}$$

  La última igualdad implica que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ satisface la i-ésima ecuación de (S') (y el resto de las ecuaciones claramente las satisface también).

- $\mathrm{Sol}(S) \subseteq \mathrm{Sol}(S')$: Se le deja como ejercicio al lector. Note que la i-ésima ecuación de (S) puede escribirse como

  $$F_i = (F_i + \lambda\, F_j) - \lambda\, F_j = F'_i - \lambda\, F'_j.$$

□

Observación 1.1

Inductivamente, si obtenemos (S'_q) a partir de (S) tras aplicar q transformaciones elementales, tendremos que (S) y (S') son equivalentes:

$$(S) \xrightarrow{1^{\text{ra}}\ \text{transformación}} (S^1) \to \cdots \to (S^{q-1}) \xrightarrow{(q-1)^{\text{ésima}}\ \text{transformación}} (S^q)$$

$$\mathrm{Sol}(S) = \mathrm{Sol}(S^1) = \cdots = \mathrm{Sol}(S^{q-1}) = \mathrm{Sol}(S^q).$$

Ejemplo 3. Dado el sistema de ecuaciones

$$(S): \left\{ \begin{array}{rl} 4x+y+z+2t & = 0, \\ 2y+z+3t & = -10, \\ -2x-4y+3z-t & = 7, \\ 3x+3y+2z & = 1. \end{array} \right.$$

hallar un sistema equivalente (S') y resolver mediante sustitución hacia atrás.

Aplicamos transformación elementales:

$$(S) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left\{ \begin{array}{rl} 4x+y+z+2t & = 0, \\ -2x-4y+3z-t & = 7, \\ 2y+z+3t & = -10, \\ 3x+3y+2z & = 1. \end{array} \right. \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_4} \left\{ \begin{array}{rl} 4x+y+z+2t & = 0, \\ -2x-4y+3z-t & = 7, \\ 3x+3y+2z & = 1, \\ 2y+z+3t & = -10. \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow[F_3 \leftarrow (F_3+F_2)]{F_1 \leftarrow (F_1+2F_2)} \left\{ \begin{array}{rl} 0\,x-7y+7z+0\,t & = 14, \\ -2x-4y+3z-t & = 7, \\ x-y+5z-t & = 8, \\ 2y+z+3t & = -10. \end{array} \right. \xrightarrow[F_3 \leftrightarrow F_4]{F_2 \leftarrow (F_2+2F_3)} \left\{ \begin{array}{rl} -7y+7z & = 14, \\ -6y+13z-3t & = 23, \\ 2y+z+3t & = -10, \\ x-y+5z-t & = 8. \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow[F_2 \leftarrow (F_2+3F_3)]{F_1 \leftarrow (F_1+3F_3)} \left\{ \begin{array}{rl} -y+10z+9t & = -16, \\ 16z+6t & = -7, \\ 2y+z+3t & = -10, \\ x-y+5z-t & = 8. \end{array} \right. \xrightarrow[F_4 \leftarrow (F_4-F_1)]{F_3 \leftarrow (F_3+2F_1)} \left\{ \begin{array}{rl} -y+10z+9t & = -16, \\ 16z+6t & = -7, \\ 21z+21t & = -42, \\ x-5z-10t & = 24. \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_4]{\frac{1}{21}F_3} \left\{ \begin{array}{rl} x-5z-10t & = 24 \\ 16z+6t & = -7, \\ z+t & = -2, \\ -y+10z+9t & = -16. \end{array} \right. \xrightarrow{F_2 \leftarrow (F_2-16F_3)} \left\{ \begin{array}{rl} x-5z-10t & = 24 \\ -10t & = 25, \\ z+t & = -2, \\ -y+10z+9t & = -16. \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow[F_4 \leftarrow (F_4-9F_3)]{F_1 \leftarrow (F_1-F_2)} \left\{ \begin{array}{rl} x-5z & = -1 \\ -10t & = 25, \\ z+t & = -2, \\ -y+z & = 2. \end{array} \right. \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_4} (S'): \left\{ \begin{array}{rl} x-5z & = -1 \\ -y+z & = 2, \\ z+t & = -2, \\ -10t & = 25. \end{array} \right.$$

Podemos ahora aplicar la sustitución hacia atrás para hallar las soluciones de (S') (= las soluciones de (S)). De la cuarta ecuación, se tiene:

$$t = -\frac{5}{2}.$$

Luego, de la tercera ecuación nos queda:

$$\begin{aligned} z+t &= -2 \\ z-\frac{5}{2} &= -2 \\ z &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Finalmente, de la primera y segunda ecuación obtenemos:

$$\begin{aligned} x-5z &= -1 \\ x-5\,\frac{1}{2} &= -1 \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} -y+z &= 2 \\ -y+\frac{1}{2} &= 2 \\ y &= -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Este sistema es compatible determinado, con solución en $\mathbb{R}^4$ dada por

$$\mathrm{Sol}(S) = \mathrm{Sol}(S') = \left\{ \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2} \right) \right\}.$$

1.3. Notación matricial

Cuando resolvemos un sistema de ecuaciones mediante la aplicación de transformaciones elementales, con el fin de eliminar variables y llegar a un sistema más simple, lo que importa más que las variables es lo que ocurre a nivel de sus coeficientes. Por ejemplo, si obtenemos $2x - 2x$ en una ecuación del sistema luego de aplicar una transformación elemental del tipo $F_i \leftarrow (F_i + \lambda\, F_j)$, ocurre que $(2-2)x = 0\,x = 0$, y en esta última igualdad no importa qué valor tome x, es decir, $2x - 2x$ siempre va a valer cero.

Es bastante útil que a todo sistema de ecuaciones se le asocie una matriz (entiéndase cierto arreglo rectangular de números reales), formada por los coeficientes que acompañan a las variables del sistema. Cada fila de dicha matriz representa una y sólo una de las ecuaciones del sistema, y las transformaciones elementales pueden realizarse a nivel de estas filas y sin importar el rol de las variables (más allá de definir las columnas de la matriz). Especifiquemos esto último en la siguiente definición.

Definición 1.5

Sea

$$(S): \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

un sistema de ecuaciones. A las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)$$

se les conocen como **matriz asociada** y **matriz ampliada** del sistema (S).

Observación 1.2

Tenga siempre en cuenta que la posición en la matriz que tiene cada **entrada** o **coeficiente** a_{ij} está únicamente determinado por la ecuación en la que aparece y la variable (o incógnita) que acompaña. El subíndice $i \in \{1,\ldots,m\}$ indica la fila, mientras que el subíndice $j \in \{1,\ldots,m\}$ indica la columna en donde aparece a_{ij} en A y en $(A|b)$. La cantidad de filas m de matriz asociada A corresponde al número de ecuaciones del sistema (S), mientras que su cantidad de columnas n corresponde al número de variables del sistema. Para obtener la matriz ampliada $(A|b)$, se agrega una columna adicional a la derecha de A, correspondiente a los **términos independiente** b_i del sistema.

Hagamos ahora un ejemplo de cómo hallar el conjunto solución de un sistema mediante su matriz ampliada.

Ejemplo 4. Hallar el conjunto solución del sistema $(S): \begin{cases} x + y - 3z = -1, \\ 2x + y - 2z = 1, \\ x + y + z = 3, \\ x + 2y - 3z = 1. \end{cases}$

Construimos la matriz ampliada y aplicamos transformaciones elementales a las filas con el objetivo de que vayan "apareciendo ceros" en la matriz (lo que equivale a eliminar variables).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3\leftarrow(F_3-F_1) \text{ y } F_4\leftarrow(F_4-F_1)]{F_2\leftarrow(F_2-2F_1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{4}F_3]{F_2\leftarrow(F_2+F_4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2\leftarrow(F_2-4F_3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1\leftarrow(F_1-F_2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1\leftarrow(F_1+3F_3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3\leftarrow(F_3-F_4)]{F_2\leftarrow(F_2-2F_4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Así como asociamos una matriz a un sistema de ecuaciones, podemos hacer el proceso inverso:

$$\text{La matriz } (A'|b') = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ corresponde al sistema } (S'): \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ 0 = 1 \end{array} \right. .$$

La igualdad $0 = 1$ es una contradicción, por lo cual $\mathrm{Sol}(S) = \varnothing$.

Realmente, es suficiente con generar la fila $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ para concluir que el sistema no tiene solución. Sin embargo, hicimos todo el procedimiento de *reducción* para poder presentar a continuación los conceptos de *forma escalerizada* y *forma escalerizada reducida* de una matriz.

Observación 1.3

En el ejemplo anterior, el procedimiento de aplicar transformaciones elementales para llegar a las matrices

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ y } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

se le conoce como **método de escalerización** y **método de eliminación de Gauss-Jordan**. Estas matrices corresponden a **una forma escalerizada** de $(A|b)$ y a **la forma escalerizada reducida** de $(A|b)$. Definiremos estos conceptos de manera general a continuación.

Definición 1.6

Una matriz E se dice **escalerizada** si cumple las siguientes condiciones:

1. Todas las finas, salvo con excepción de la primera, comienzan con una sucesión de ceros.
2. Cada fila tiene al principio al menos un cero más que la fila inmediata superior.

Una matriz escalerizada R se dice **reducida** si además:

3. La primera entrada no nula de cada fila es 1.
4. La columna correspondiente a la primera entrada no nula de cada fila tiene cero en el resto de las entradas.

Diremos que un sistema de ecuaciones es **escalerizado** (**reducido**) si su matriz ampliada es **escalerizada** (**reducida**).

Ejemplo 5.

1. La matriz
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
es escalerizada, pero no reducida (aparece -1 arriba de la entrada $a_{23} = 1$).

2. La matriz
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
no es escalerizada, porque la tercera fila al inicio tiene más ceros en sucesión que la segunda.

3. La matriz
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
es escalerizada reducida. Nótese que no importa la aparición de 1 arriba de la entrada $c_{24} = 2$, ya que c_{24} no es la primera entrada no nula de la fila 2.

El **método de escalerización** o **eliminación de Gauss-Jordan** consiste en lo siguiente:

1. Dado un sistema de ecuaciones lineales (S), se construye su matriz ampliada $(A|b)$.
2. Se aplican transformaciones elementales por filas a $(A|b)$ para obtener una forma escalerizada o su forma escalerizada reducida, llamémosla $(A'|b')$.
3. Se convierte $(A'|b')$ en un sistema escalerizado o escalerizado reducido, y se despejan las incógnitas (en caso de haber solución).

Apliquemos lo anterior al siguiente ejemplo.

Ejemplo 6. Halle el conjunto solución del sistema $(S):\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 + 2x_5 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 + x_5 = -2, \\ 2x_1 - 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 - 5x_2 - 7x_3 + 6x_4 + 2x_5 = -7. \end{cases}$

Formamos la matriz ampliada y aplicamos transformaciones elementales por filas:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & -7 & 5 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 4 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & -7 & 6 & 2 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \leftarrow (F_3 - 2F_2) \text{ y } F_4 \leftarrow (F_4 - F_2)]{F_1 \leftarrow (F_1 - 2F_2)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -15 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -12 & -4 & -1 & 7 \\ 0 & -3 & -11 & 3 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_4 \leftarrow (F_4 + 3F_1)]{F_3 \leftarrow (F_3 - 4F_1)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -15 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 48 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -56 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4 \leftarrow (F_4 + F_3)]{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -15 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 48 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow (F_3 + 6F_4)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -15 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -15 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-F_4]{-\frac{1}{8}F_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -15 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \leftarrow (F_2 + 15F_3)]{F_1 \leftarrow (F_1 + 2F_2)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -26 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 \leftarrow (F_1 + 26F_3)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftarrow (F_1 - F_4)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Tenemos así el sistema escalerizado reducido (S') (el cual es equivalente a (S)) dado por

$$(S'):\begin{cases} x_1 + x_4 = 1, \\ x_2 - x_4 = 2, \\ x_3 = 0, \\ x_5 = 1. \end{cases}$$

Luego, (S) es compatible indeterminado y su conjunto solución viene dado por

$$\mathrm{Sol}(S) = \{(1 - x_4, 2 + x_4, 0, x_4, 1) \,/\, x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Otra forma de hallar el conjunto anterior es llegar a alguna forma escalerizada (no necesariamente reducida) de $(A|b)$ y aplicar el método de sustitución hacia atrás. Dejamos al lector que lo haga de esa manera y verifique que se obtiene el mismo conjunto solución.

El método de escalerización siempre se puede aplicar para llegar a $\mathrm{Sol}(S)$ sin importar cómo sea el sistema (S). Esto se debe al siguiente resultado (cuya prueba vamos a omitir).

Proposición 1.2

Toda matriz puede ser transformada en una matriz escalerizada o escalerizada reducida mediante una cantidad finita de transformaciones elementales.

1.4. Sistemas con parámetros

Hay ocaciones donde, en lugar de hallar las soluciones de un sistema, se nos pide determinar qué condiciones debe tener un sistema para que tenga solución. Analicemos con más precisión esta situación mediante un ejemplo.

Supongamos que se quiere discutir si el siguiente sistema de ecuaciones lineales tiene solución en función de $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(S): \begin{cases} (\lambda-1)x + y + (\lambda+1)z = 1, \\ (1-\lambda)x - y + (\lambda^2-1)z = 2\lambda - 1, \\ (\lambda^2-1)x + \lambda y + (\lambda^2-1)z = \lambda - 1. \end{cases}$$

El parámetro λ puede tomar cualquier valor real (y **no es una incógnita**). Cada valor de λ da lugar a un sistema diferente. Por ejemplo, para $\lambda = 2$ se obtiene el sistema

$$(S_2): \begin{cases} x + y + 3z = 1, \\ -x - y + 3z = 3, \\ 3x + 2y + 3z = 1. \end{cases}$$

Y así con cualquier otro valor de λ. Entonces, lo que realmente tenemos es una familia (S_λ) de sistemas de ecuaciones, y queremos determinar para cuales valores del parámetro λ el sistema (S_λ) tiene solución.

La manera de proceder es muy parecida a lo que hemos hecho hasta el momento: formar la matriz ampliada de (S_λ) y aplicar el método de escalerización.

$$(A_\lambda|b_\lambda) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda-1 & 1 & \lambda+1 & 1 \\ 1-\lambda & -1 & \lambda^2-1 & 2\lambda-1 \\ \lambda^2-1 & \lambda & \lambda^2-1 & \lambda-1 \end{array}\right).$$

Tratamos a las entradas que dependen de λ como lo que son: números reales.

$$(A_\lambda|b_\lambda) \xrightarrow[F_3 \leftarrow (F_3-(\lambda+1))]{F_2 \leftarrow (F_2+F_1)} \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda-1 & 1 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda & 2\lambda \\ 0 & -1 & -2(\lambda+1) & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftarrow (F_1+F_3)} \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda-1 & 0 & -(\lambda+1) & -1 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) & 2\lambda \\ 0 & -1 & -2(\lambda+1) & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda-1 & 0 & -(\lambda+1) & -1 \\ 0 & -1 & -2(\lambda+1) & -2 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) & 2\lambda \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda-1 & 0 & -(\lambda+1) & -1 \\ 0 & 1 & 2(\lambda+1) & 2 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) & 2\lambda \end{array}\right).$$

A partir de la forma escalerizada anterior, podemos aplicar el método de sustitución hacia atrás en el sistema

$$(S'_\lambda) = \begin{cases} (\lambda-1)x - (\lambda+1)z = -1, \\ y + 2(\lambda+1)z = 2, \\ \lambda(\lambda+1)z = 2\lambda. \end{cases}$$

A partir de este punto sí hay diferencias con lo que hemos hecho hasta el momento. No siempre podemos despejar z, porque $\lambda(\lambda+1)$ puede valer cero cuando $\lambda = 0$ o $\lambda = -1$. Estos casos deben analizarse por separado.

- Caso $\lambda = -1$: La tercera ecuación de (S'_{-1}) se convierte en $0 = -2$. Por lo cual, (S_{-1}) no tiene solución (es incompatible).

- Caso $\lambda = 0$: El sistema (S_0') se convierte en

$$(S_0') = \begin{cases} -x - z = -1, \\ \quad y + 2z = 2. \end{cases}$$

Luego, $x = 1 - z$ e $y = 2 - 2z$. Entonces, (S_0) es compatible indeterminado, con

$$\mathrm{Sol}(S_0) = \{(1 - z, 2 - 2z, z) \,/\, z \in \mathbb{R}\}.$$

- Caso $\lambda \neq -1, 0$: Los coeficientes de (S_λ') no se anulan y podemos hacer los despejes.

$$\begin{aligned} z = \frac{2}{\lambda+1} &\rightsquigarrow x = 1 - \frac{2}{\lambda+1} = \frac{\lambda-1}{\lambda+1}. \\ &\rightsquigarrow y = 2 - 2\,\frac{2}{\lambda+1} = \frac{2(\lambda-1)}{\lambda+1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, (S_λ) es compatible determinado, con

$$\mathrm{Sol}(S_\lambda) = \left\{ \left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}, \frac{2(\lambda-1)}{\lambda+1}, \frac{2}{\lambda+1} \right) \right\}.$$

Note que el sistema es compatible determinado y **no indeterminado**, ya que el parámetro λ no varía dentro del conjunto solución. Por ejemplo, para $\lambda = 2$ se tiene $\mathrm{Sol}(S_2) = \{(1/3, 2/3, 2/3)\}$, mientras que para $\lambda = 1$ se tiene $\mathrm{Sol}(S_1) = \{(0, 0, 2)\}$. Es decir, cada $\lambda \neq -1, 0$ determina el conjunto solución solamente del sistema asociado a ese λ.

1.5. Teorema de Rouché-Frobenius

Hay ocasiones donde no es necesario hallar explícitamente el conjunto solución de un sistema de ecuaciones para poder clasificarlo. Dado un sistema (S), podemos considerar ciertos invariantes algebraicos de la matriz asociada y ampliada de (S), a partir de los cuales podemos deducir qué tipo de sistema es (S), es decir, si es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible. Este invariante se conoce como rango, y se define a continuación.

Definición 1.7

Dada una matriz A, se define su **rango** como el número de filas no nulas (también llamadas **escalones**) de su forma escalerizada reducida (ver la Proposición 1.3). Denotaremos el rango de A como

$$\mathrm{rg}(A).$$

Observación 1.4

Equivalentemente, el rango de una matriz A también puede definirse como el número de escalones de **cualquier** forma escalerizada.

No confundir el rango de una matriz con el número de filas no nulas de dicha matriz. Por ejemplo, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene rango 1 (y no 2), ya que su forma escalerizada reducida es

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Enunciamos a continuación el teorema de Rouché-Frobenius, el cual nos permite clasificar cualquier sistema de ecuaciones al comparar los rangos de su matriz asociada y su matriz ampliada. Omitiremos la demostración.

Teorema 1.1

Sea (S) un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, y sean A y $(A|b)$ sus matrices asociadas y ampliadas, respectivamente. Entonces, las siguientes afirmaciones se cumplen:

1. (S) es compatible determinado si, y sólo si, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = n$.
2. (S) es compatible indeterminado si, y sólo si, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) < n$.
3. (S) es incompatible si, y sólo si, $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A|b)$.

En otras palabras, para clasificar un sistema, basta con escalerizar su matriz ampliada $(A|b)$ (note que este proceso escaleriza también a la matriz asociada A), contar el número de escalones de las formas escalerizadas obtenidas de A y de $(A|b)$, y comparar.

Observación 1.5

Siempre se tiene que $\text{rg}(A) \leqslant \text{rg}(A|b)$, ya que $(A|b)$ tiene una columna más que A; y siempre se tiene que $\text{rg}(A) \leqslant n$. Sin embargo, puede ocurrir que $\text{rg}(A|b) = n + 1$.

Para notar esto último, considere el sistema incompatible dado por $(S) : \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = 0, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

La forma escalerizada reducida de $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

Por lo tanto, $\text{rg}(A|b) = 4 = 3 + 1$.

Ejemplo 7. Clasifique los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

1. $(S)\colon \begin{cases} 3x-6y+2z=-1, \\ -2x+4y+z=3, \\ z=1, \\ x-2y+z=0. \end{cases}$

   Mostramos la matriz ampliada de (S) y aplicamos transformaciones elementales para llegar a alguna forma escalerizada:

$$(A|b)=\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -6 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2\leftarrow(F_2+2F_4)]{F_1\leftarrow(F_1-3F_4)} \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2\leftarrow(F_2-3F_3)]{F_1\leftarrow(F_1+F_3)} \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2\leftrightarrow F_3]{F_1\leftrightarrow F_4} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

   Como la última matriz está escalerizada, tenemos que $\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(A|b)=2<3$. Por lo tanto, (S) es compatible indeterminado por el teorema de Rouché-Frobenius.

2. $(S)\colon \begin{cases} x_1-2x_2+x_3+2x_4=1, \\ x_1+x_2-x_3+x_4=2, \\ x_1+7x_2-5x_3-x_4=3. \end{cases}$

   Procedemos igual que en el ejemplo anterior:

$$(A|b)=\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & -5 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3\leftarrow(F_3-F_1)]{F_2\leftarrow(F_2-F_1)} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 9 & -6 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3\leftarrow(F_3-3F_2)} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

   Vemos que $\mathrm{rg}(A)=2\neq 3=\mathrm{rg}(A|b)$. Por lo tanto, (S) es incompatible.

En otro tipo de situaciones, se nos pueden pedir las condiciones que debe cumplir un sistema de ecuaciones para que tenga solución.

Ejemplo 8. Determinar a, b, c y d en $\mathbb{R}$ para que $(S)\colon \begin{cases} 3x_1-6x_2+2x_3-x_4=a, \\ -2x_1+4x_2+x_3+3x_4=b, \\ x_3+x_4=c, \\ x_1-2x_2+x_3=d. \end{cases}$ sea compatible.

Hallemos alguna forma escalerizada de las matrices asociadas y ampliadas del sistema:

$$(A|b)=\left(\begin{array}{rrrr|c} 3 & -6 & 2 & -1 & a \\ -2 & 4 & 1 & 3 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & c \\ 1 & -2 & 1 & 0 & d \end{array}\right) \xrightarrow[F_2\leftarrow(F_2+2F_4)]{F_1\leftarrow(F_1-3F_4)} \left(\begin{array}{rrrr|c} 0 & 0 & -1 & -1 & a-3d \\ 0 & 0 & 3 & 3 & b+2d \\ 0 & 0 & 1 & 1 & c \\ 1 & -2 & 1 & 0 & d \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2-3F_3]{F_1\leftarrow(F_1+F_3)} \left(\begin{array}{rrrr|c} 0 & 0 & 0 & 0 & a+c-3d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-3c+2d \\ 0 & 0 & 1 & 1 & c \\ 1 & -2 & 1 & 0 & d \end{array}\right).$$

Podemos notar llegados a este punto que para que (S) sea compatible, debe cumplirse que

$$a + c - 3d = 0 \text{ y } b - 3c + 2d = 0.$$

Es decir, $a = 3d - c$ y $b = 3c - 2d$. Esto determina el conjunto de todos los valores de a, b, c y d en $\mathbb{R}$ para que (S) sea compatible, y en este caso, a y b van a depender de c y d según las relaciones obtenidas.

Para cerrar esta sección, veamos cómo aplicar el teorema de Rouché-Frobenius a sistemas con parámteros.

Ejemplo 9. Discutir en función de α y β en $\mathbb{R}$ si (S): $\begin{cases} \alpha x + y + z = \beta, \\ x + \alpha y + z = \beta, \\ x + y + \alpha z = \beta. \end{cases}$ tiene solución.

Así como notamos en la Sección 1.4, podemos pensar en (S) como una familia de sistemas de ecuaciones indexada por α y β. Entonces, el problema consiste en hallar todos los sistemas compatibles dentro de esa familia.

Consideramos la matriz ampliada del sistema y apliquemos transformaciones elementales para llegar a una forma escalerizada:

$$(A_\alpha|b_\beta) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & \beta \\ 1 & \alpha & 1 & \beta \\ 1 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha & 1 & \beta \\ \alpha & 1 & 1 & \beta \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \leftarrow (F_3 - \alpha F_1)]{F_2 \leftarrow (F_2 - F_1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & \beta \\ 0 & \alpha - 1 & 1 - \alpha & 0 \\ 0 & 1 - \alpha & 1 - \alpha^2 & \beta - \alpha\beta \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow (F_3 + F_2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & \beta \\ 0 & \alpha - 1 & 1 - \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \alpha - \alpha^2 & \beta - \alpha\beta \end{array}\right).$$

- Viendo la última matriz, nos damos cuenta que el sistema va a ser incompatible si, y sólo si,

  $$2 - \alpha - \alpha^2 = 0 \text{ y } \beta - \alpha\beta \neq 0.$$

  La primera ecuación tiene raíces $\alpha = -2$ y $\alpha = 1$. Por lo tanto, el sistema es incompatible si, y sólo si, $\alpha = -2$ y $\beta \neq 0$ (ya que para $\alpha = 1$ o $\beta = 0$ se tiene $\beta - \alpha\beta = 0$). Entonces,

  $$\mathrm{Sol}(S_{-2,\beta\neq 0}) = \varnothing.$$

- Para $\alpha = 1$ y $\beta \in \mathbb{R}$ nos queda

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

  por lo cual el sistema es compatible indeterminado, con

  $$\mathrm{Sol}(S_{1,\beta}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y + z = \beta\}.$$

- Para $\alpha = -2$ y $\beta = 0$, obtenemos

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{3}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftarrow (F_1 - F_2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

  Luego, $(S_{-2,0})$ es compatible indeterminado, con

  $$\mathrm{Sol}(S_{-2,0}) = \{(z, z, z) \,/\, z \in \mathbb{R}\}.$$

- Finalmente, analizamos $\alpha \neq -2, 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & \beta \\ 0 & \alpha-1 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & (2+\alpha)(1-\alpha) & \beta(1-\alpha) \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{1-\alpha}F_3]{\frac{1}{\alpha-1}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+\alpha & \beta \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 \leftarrow (F_1-F_3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+\alpha & \beta \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftarrow (F_1-F_2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+\alpha & \beta \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{\alpha+2}F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{\beta}{2+\alpha} \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \leftarrow (F_2+F_3)]{F_1 \leftarrow (F_1+F_3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{\beta}{2+\alpha} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{\beta}{2+\alpha} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{\beta}{2+\alpha} \end{array}\right).$$

Tenemos entonces que $(S_{\alpha\neq -2,1,\beta})$ es compatible determinado, donde

$$\mathrm{Sol}(S_{\alpha\neq -2,1,\beta}) = \left\{\left(-\frac{\beta}{2+\alpha}, -\frac{\beta}{2+\alpha}, -\frac{\beta}{2+\alpha}\right)\right\}.$$

1.6. Sistemas homogéneos

Todo sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$(S): \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

se conoce como **homogéneo**.

Observación 1.6

Todo sistema homogéneo (S) es compatible, pues $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ es una solución.

Proposición 1.3

Sea (S) un sistema de ecuaciones lineales homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas. Entonces, (S) siempre es compatible. Más aún, si $m < n$, entonces (S) es compatible indeterminado.

Idea de la demostración: Se usa el teorema de Rouché-Frobenius y se compara el rango de A (matriz asociada de (S)) con m. También hay que notar que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b)$, ya que en este caso b es una columna de ceros.

Demostración: Como $\mathrm{rg}(A)$ se define como el número de escalones de su forma escalerizada reducida, y como hay a lo sumo m escalones (pues m es el número de filas de A), se tiene que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|0) \leqslant m < n$. Entonces, por el teorema de Rouché-Frobenius, la condición $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|0) < n$ implica que (S) es compatible indeterminado. $\square$

Finalizamos este capítulo con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10. Clasifique el sistema de ecuaciones dado por $(S):\left\{\begin{aligned} 5x+2y-4z-3t&=0,\\ 2x+y-2z-t&=0,\\ x+y-2z&=0,\\ 3x+2y-4z-t&=0.\end{aligned}\right.$

Escalerizamos la matriz asociada al sistema (no hace falta considerar la matriz ampliada para sistemas homogéneos):

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 & -3\\ 2 & 1 & -2 & -1\\ 1 & 1 & -2 & 0\\ 3 & 2 & -4 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow[F_2\leftarrow(F_2-2F_3 \text{ y } F_4\leftarrow(F_4-3F_3))]{F_1\leftarrow(F_1-5F_3)} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 6 & -3\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_1\leftarrow(F_1-3F_2)]{F_4\leftarrow(F_4-F_2)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{F_3\leftarrow(F_3+F_2)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-F_2]{F_1\leftarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Como $\mathrm{rg}(A)=2<4$, se tiene que (S) es compatible indeterminado.

Escrito en LaTeX por:
Marco A. Pérez, Ph.D.
Profesor Adjunto Grado 3
Instituto de Matemática y Estadística "Prof. Ing. Rafael Laguardia"
Facultad de Ingeniería - Universidad de la República
Oficina 122
mperez@fing.edu.uy