Programación 3
Año 2023

Práctico 6

Ejercicio 1 (Kleinberg & Tardos, Ex. 4.8)**.** Mostrar que un grafo conexo con costos en las aristas que son todos distintos entre sí tiene un único árbol de cubrimiento mínimo.

Ejercicio 2 (Kleinberg & Tardos, Ex. 4.21)**.** Llamamos *casi árbol* a un grafo con n vértices y m aristas tal que $m \leq n + 8$.

(a) Dé un algoritmo que construye un árbol de cubrimiento mínimo para un grafo casi árbol. Su algoritmo debe admitir una implementación cuyo tiempo de ejecución sea $O(n)$.
(b) Demuestre la corrección de su algoritmo.
(c) Demuestre que su algoritmo admite una implementación con tiempo de ejecución que es $O(n)$.

Sugerencia: Use el enunciado (4.20) del libro de referencia.

Ejercicio 3 (Kleinberg & Tardos, Ex. 4.10)**.** Sea $G = (V, E)$ un grafo con n vértices y costos c_e en las aristas, $e \in E$. Sea también T un árbol de cubrimiento mínimo (MST) para G. Supongamos que agregamos una nueva arista e a G y llamemos G' a este nuevo grafo. A los efectos de simplificar las demostraciones suponemos que todos los costos de aristas en G' son diferentes.

(a) Sea $e_{máx}$ la arista de costo máximo en el ciclo que se forma en $T \cup \{e\}$, sea $c_{máx}$ el costo de esta arista, y sea $T' = (T \cup \{e\}) \setminus \{e_{máx}\}$. Muestre que T' es un MST para G'.
Sugerencia:
  I) Muestre que (V, T') es un árbol de cubrimiento de G'.
  II) Usando el enunciado (4.20) del libro de referencia, muestre que cada una de las aristas que no pertenecen a T' no pueden pertenecer a un árbol de cubrimiento de G'. Tenga en cuenta que esas aristas son $E \setminus T$, que son aristas de G, y $e_{máx}$.

(b) Dé un algoritmo que a partir de G, T y e construye en tiempo $O(n)$ un árbol de cubrimiento mínimo para G'. Demuestre la corrección y analice la complejidad de su algoritmo.