Programación 3
Año 2023

Práctico 2

Ejercicio 1 (Kleinberg & Tardos, Ex. 2.5)**.** Sean f y g funciones positivas tales que $f(n)$ es $O(g(n))$. Para cada una de las siguientes afirmaciones, indique si es verdadera, demostrándolo, o falsa, dando un contraejemplo.

(a) $f(n)^2$ es $O(g(n)^2)$.
(b) $2^{f(n)}$ es $O(2^{g(n)})$.
(c) Si existe $\epsilon > 0$ tal que $g(n) > 1 + \epsilon$ para todo n suficientemente grande, entonces $\log f(n)$ es $O(\log g(n))$.
(d) $\log f(n)$ es $O(\log g(n))$.

Ejercicio 2. En el libro de referencia para el curso (Kleinberg & Tardos, Capítulo 2) se describe una implementación del algoritmo de Gale-Shapley cuyo tiempo de ejecución es $O(n^2)$.

(a) Muestre, a través de un ejemplo, que este tiempo de ejecución es también $\Omega(n^2)$ en el peor caso.
(b) El hecho que acaba de demostrar en la parte (a), ¿depende de la implementación específica del algoritmo de Gale-Shapley que consideremos? Justifique.

Ejercicio 3. Con la notación orden O (Oh-grande) se definen cotas superiores del crecimiento de una función. Esas cotas pueden o no ser ajustadas. Por ejemplo $3n$ es $O(n^2)$, pero también es $O(n)$ que es una cota más ajustada. Para expresar la noción de cota superior no ajustada se define la notación orden o (oh-chica). En el ejemplo anterior $3n$ es $o(n^2)$.

$T(n)$ es $o(f(n))$ si para **cualquier** constante $\epsilon > 0$ existe una constante $n_\epsilon \geq 0$ tal que para todo $n \geq n_\epsilon$ se cumple $T(n) < \epsilon \cdot f(n)$.

(a) Demuestre que si $T(n)$ es $o(f(n))$ entonces $T(n)$ es $O(f(n))$.
(b) Demuestre que si $T(n)$ es $o(f(n))$ entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{f(n)} = 0$.
(c) Muestre un ejemplo de funciones f, g para los que se cumple $f(n)$ es $O(g(n))$ y $f(n)$ no es $o(g(n))$.
(d) Demuestre que si $T(n)$ es $o(f(n))$ entonces $T(n)$ no es $\Omega(f(n))$.
(e) Demuestre que si $T(n)$ es $o(f(n))$ entonces $T(n)$ no es $\Theta(f(n))$.

(f) Muestre un ejemplo de funciones f, g para los que no se cumple $f(n)$ es $\Omega(g(n))$ ni $f(n)$ es $o(g(n))$.