Vamos a resolver el ejercicio 5.3.4, del capítulo 5 de práctico, en el que se pide, dado un polinomio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, demostrar que existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}$, se cumple $|f(y)| \leq |f(x)|$. Para resolverlo utilizaremos el teorema de Weierstrass [1].

Lo primero que observamos es que como f es un polinomio, es una función continua. Esto va a ser necesario para poder utilizar más adelante el teorema de Weierstrass. Realizaremos la demostración separando en dos casos: uno cuando el polinomio f es constante y otro cuando no lo es.

Caso 1: f polinomio constante

En este caso hay un real c constante tal que $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = c$. Nosotros buscamos un $y \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}\ |f(y)| \leq |f(x)|$. En este caso se va a cumplir eligiendo cualquier $y \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, con $y = 0$, se cumple que para todo $x \in \mathbb{R}\ |f(0)| \leq |f(x)|$, pues $|f(0)| = |f(x)| = |c|$. Por lo tanto este caso queda resuelto sin necesidad de utilizar el teorema de Weierstrass.

Caso 2: f no polinomio constante

En este caso sí vamos a necesitar el teorema de Weierstrass. Primero que nada observamos que como f es un polinomio no constante, necesariamente se cumple lo siguiente:

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = \lim_{x\to-\infty} |f(x)| = +\infty$$

Esto se debe a que como f es un polinomio no constante, su límite es $\pm\infty$, por lo que al tomar valor absoluto, tenemos que $|f|$ tiende siempre a $+\infty$. Que esos límites sean $+\infty$ significa lo siguiente, por definición de límite:

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists \alpha_1 \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R},\ x < \alpha_1 \Rightarrow |f(x)| > M \tag{1}$$
$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists \alpha_2 \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R},\ x > \alpha_2 \Rightarrow |f(x)| > M \tag{2}$$

Donde 1 es la definición de límite en $-\infty$ y 2 la definición de límite en $+\infty$. Procedemos de la siguiente forma:

Sea $M = |f(0)| + 1$. Por las definiciones de límite, existen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{Si } x < \alpha_1, \text{ entonces } |f(x)| > M \tag{3}$$
$$\text{Si } x > \alpha_2, \text{ entonces } |f(x)| > M \tag{4}$$

Observar que $\alpha_1 < 0 < \alpha_2$. Eso es porque $|f(0)| < M$ y f es continua, lo que implica que existe un entorno de 0 en el que $|f(x)| < M$ (o sea un intervalo $(-\delta, \delta)$ con $\delta > 0$ tal que $\forall x \in (-\delta, \delta)\ |f(x)| < M$).

La idea es restringir $|f|$ al intervalo $[\alpha_1, \alpha_2]$ y utilizar ahí el teorema de Weierstrass. Hagamos eso: Sea $g : [\alpha_1, \alpha_2] \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = |f(x)|$ para cada $x \in [\alpha_1, \alpha_2]$. Observar que g es la función f restrisca al intervalo $[\alpha_1, \alpha_2]$ compuesta con el valor absoluto. Por la proposición 82 (página 27) de los apuntes mencionados en el pie de página, tenemos que g es una función continua. Con la función g estamos en condiciones de aplicar el teorema de Weierstrass, el cual nos dice que g tiene mínimo y máximo absolutos en $[\alpha_1, \alpha_2]$, es decir:

$$\text{Existe } x_0 \in [\alpha_1, \alpha_2] \text{ tal que } \forall x \in [\alpha_1, \alpha_2]\ g(x_0) \leq g(x) \tag{5}$$
$$\text{Existe } x_1 \in [\alpha_1, \alpha_2] \text{ tal que } \forall x \in [\alpha_1, \alpha_2]\ g(x) \leq g(x_1) \tag{6}$$

De esos dos el único que nos interesa es el x_0 de 5. Afirmamos que con $y = x_0$ se cumple lo que estamos intentando demostrar, es decir que para todo $x \in \mathbb{R}$ tenemos que $|f(x_0)| \leq |f(x)|$.

Primero observamos lo siguiente:

$$|f(x_0)| < M \tag{7}$$

[1] Teorema 95 en los apuntes de teórico de límites y continuidad, página 31: `https://eva.fing.edu.uy/pluginfile.php/467370/mod_resource/content/1/limites.pdf`.

Esto es debido a que , $0 \in [\alpha_1, \alpha_2]$, por lo que usando 5 vemos que $g(x_0) < g(0)$. Como $g(x_0) = |f(x_0)|$ y $g(0) = |f(0)| < M$ concluimos la desigualdad 7.

Ahora vamos a terminar probando que $\forall x \in \mathbb{R}$ $|f(x_0)| \leq |f(x)|$ separando en tres casos según si $x < \alpha_1$, $\alpha_1 \leq x \leq \alpha_2$ o $\alpha_2 < x$.

Caso $x < \alpha_1$

Por 3, tenemos que $|f(x)| > M$. Por otra parte, por 7 tenemos que $|f(x_0)| > M$. Por transitividad concluimos que $|f(x_0)| < |f(x)|$, lo cual implica $|f(x_0)| \leq |f(x)|$.

Caso $\alpha_1 \leq x \leq \alpha 2$

En este caso, por 5 sabemos que $g(x_0) \leq g(x)$, pero por la definición de g, tenemos que $g(x_0) = |f(x_0)|$ y $g(x) = |f(x)|$.

Caso $\alpha_2 < x$

Por 4, tenemos que $|f(x)| > M$. Por otra parte, por 7 tenemos que $|f(x_0)| > M$. Por transitividad concluimos que $|f(x_0)| < |f(x)|$, lo cual implica $|f(x_0)| \leq |f(x)|$.