Límites de integrales

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(t) = \lfloor t \rfloor$. Determinar existencia de los siguientes límites, y en caso de existencia calcularlos.

1) $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)dt$

Dividamos la integral de la siguiente manera:

$$\int_0^x \lfloor t \rfloor dt = \int_0^{\lfloor x \rfloor} \lfloor t \rfloor dt + \int_{\lfloor x \rfloor}^x \lfloor t \rfloor dt$$

Viendo el gráfico, el primer término es la suma de las áreas de una serie de rectángulos de base 1, y alturas los números naturales hasta $\lfloor x \rfloor - 1$. El segundo término es igual al área de un rectángulo de base $\lfloor x \rfloor$ y altura $x - \lfloor x \rfloor$. Entonces:

$$\int_0^x \lfloor t \rfloor dt = \left(\sum_{i=1}^{\lfloor x \rfloor - 1} i \right) + (x - \lfloor x \rfloor)\lfloor x \rfloor$$

Del ejercicio 2.1.a del práctico 2 sabemos que $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$. Sustituyendo esto en la igualdad antes encontrada obtenemos:

$$\int_0^x \lfloor t \rfloor dt = \frac{(\lfloor x \rfloor - 1)\lfloor x \rfloor}{2} + (x - \lfloor x \rfloor)\lfloor x \rfloor \geq \frac{(\lfloor x \rfloor - 1)\lfloor x \rfloor}{2}$$

Donde la desigualdad se debe a que el término $(x - \lfloor x \rfloor)\lfloor x \rfloor$ no es negativo. Ahora, si $x \to +\infty$ también se tiene que $\lfloor x \rfloor \to +\infty$, y entonces se deduce el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\lfloor x \rfloor - 1)\lfloor x \rfloor}{2} = \lim_{\lfloor x \rfloor\to+\infty} \frac{(\lfloor x \rfloor - 1)\lfloor x \rfloor}{2} = \lim_{\lfloor x \rfloor\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor^2}{2} = +\infty$$

Finalmente observamos que para nuestro límite original:

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \lfloor t \rfloor dt \geq \lim_{x\to+\infty} \frac{(\lfloor x \rfloor - 1)\lfloor x \rfloor}{2} = +\infty$$

Entonces $lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)dt = +\infty$.

2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$

Tomemos la misma fórmula para la integral que obtuvimos en la parte anterior y continuemos a partir de ahí:

$$\int_0^x \lfloor t \rfloor dt = \frac{(\lfloor x \rfloor - 1)\lfloor x \rfloor}{2} + (x - \lfloor x \rfloor)\lfloor x \rfloor = \frac{(2x - \lfloor x \rfloor - 1)\lfloor x \rfloor}{2}$$

De manera que la función a la cual queremos determinar su límite la podemos expresar de la siguiente manera:

$$\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x - \lfloor x \rfloor - 1}{x} \cdot \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$$

Viendo al límite del producto como el producto de los límites podemos afirmar (*):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{2x - \lfloor x \rfloor - 1}{x} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$$

El segundo factor lo resolvemos así:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} - \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x} = 1 - \lim_{x\to+\infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x}$$

En el término derecho el límite es 0, porque el numerador se encuentra acotado ($0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$) mientras que el denominador tiende a infinito. Entonces $lim_{x \to +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1 - 0 = 1$

Con respecto al primer factor, se lo separa de la siguiente manera y aplicando el límite recién visto:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - \lfloor x \rfloor - 1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x} - \lim_{x \to +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} - \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 2 - 1 - 0 = 1$$

Finalmente sustituyendo todo lo hallado en (*):

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$