Resolución ejercicio 6, semana 7

Queremos calcular las indeterminaciones del logaritmo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log(x)}{x-1} \text{ y } \lim_{x\to 0^+} x^a\log(x) \text{ para todo } a>1.$$

Para calcularlas, utilizaremos las desigualdades

$$\frac{x-1}{x}\leq \log(x)\leq x-1 \text{ para todo } x\in\mathbb{R}^+$$

demostradas en el ejercicio 1.3.(b) del práctico de la semana 5.

Para la primera indeterminación, la idea es dividir la desigualdad anterior entre $x-1$. Así, si $x>1$ tenemos

$$\frac{1}{x}\leq\frac{\log(x)}{x-1}\leq 1 \text{ para todo } x>1$$

mientras que si $x<1$ resulta

$$\frac{1}{x}\geq\frac{\log(x)}{x-1}\geq 1 \text{ para todo } x\in(0,1).$$

En ambos casos, como $\frac{1}{x}\to 1$ cuando $x\to 1$, por el teorema del límite comprendido (o "teorema del sándwich") tenemos que $\lim_{x\to 1}\frac{\log(x)}{x-1}=1$.

Para la segunda indeterminación, demostraremos primero que $\lim_{x\to 0^+} x\log(x)=0$ y usaremos ese límite para probar que $\lim_{x\to 0^+} x^a\log(x)=0$ si $a>1$.

Para probar que $\lim_{x\to 0^+} x\log(x)=0$, observemos primero que, para todo $x\in(0,1)$ $\log(x)<0$ y por lo tanto $x\log(x)<0$ para todo $x\in(0,1)$. Así, por la monotonía del límite tenemos que $\lim_{x\to 0^+} x\log(x)\leq 0$.

Por otro lado, haciendo el cambio de variable $t=\frac{1}{\sqrt{x}}$ (y por lo tanto $x=\frac{1}{t^2}$) tenemos que $t\to+\infty$ cuando $x\to 0^+$ y que:

$$\lim_{x\to 0^+} x\log(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^2}\log\left(\frac{1}{t^2}\right)=\lim_{t\to+\infty}-\frac{\log(t^2)}{t^2}=\lim_{t\to+\infty}-\frac{2\log(t)}{t^2}$$

donde en la segunda igualdad usamos que $\log\left(\frac{1}{a}\right)=-\log(a)$ y en la tercera que que $\log(b^2)=2\log(b)$.

Ahora, sabemos que $\log(x)\leq x-1$ para todo $x\in\mathbb{R}^+$. Usando que $x-1<x$, concluimos que $\log(x)<x$ para todo $x\in\mathbb{R}^+$. Por lo tanto, $\log(t)<t$. Entonces $-\log(t)>-t$ y $-\frac{2\log(t)}{t^2}>-\frac{2t}{t^2}=-\frac{2}{t}$. Así, usando la monotonía del límite:

$$0\geq\lim_{x\to 0^+} x\log(x)=\lim_{t\to+\infty}-\frac{2\log(t)}{t^2}\geq\lim_{t\to+\infty}-\frac{2}{t}=0$$

Por lo tanto, nuevamente por el teorema del sándwich, tenemos que $\lim_{x\to 0^+} x\log(x)=0$.

Para probar que $\lim_{x\to 0^+} x^a\log(x)=0$ si $a>1$, basta escribir $x^a=x^{a-1}x$. Así:

$$\lim_{x\to 0^+} x^a\log(x)=\lim_{x\to 0^+} x^{a-1}x\log(x)=0$$

ya que $x\log(x)\to 0$ cuando $x\to 0^+$ y como $a>1$, $x^{a-1}\to 0$ cuando $x\to 0^+$.