CDIV Ejercicio 2.2.3: Medias

8 de marzo de 2023

Sean a y b dos números reales tales que $0 < a < b$. Se definen las siguientes medias:

$$A := \frac{a+b}{2} \qquad G := \sqrt{ab} \qquad H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Se debe probar que $a < H < G < A < b$. Demostraremos las desigualdades una a una.

0.1. $a < H$

Primero observemos que H puede escribirse de otra forma:

$$H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{2ab}{a+b}$$

Usando esa fórmula demostremos que $a < H$:

$$\begin{aligned} a < H &\Leftrightarrow a < \frac{2ab}{a+b} \\ &\Leftrightarrow 1 < \frac{2b}{a+b} \quad \text{(dividimos a ambos lados entre } a\text{, sabiendo } a > 0 \text{ por hipótesis)} \\ &\Leftrightarrow a + b < 2b \\ &\Leftrightarrow a < b \end{aligned}$$

Por hipótesis sabemos que $a < b$, así que podemos concluir que $a < H$.

0.2. $H < G$

Queremos probar que $H < G$, o equivalentemente:

$$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab}$$

Primero que nada observamos que $ab = \sqrt{ab}\sqrt{ab}$ y como a y b son mayores a 0, $\sqrt{ab}$ también lo es.

$$
\begin{aligned}
H < G \;&\Leftrightarrow\; \frac{2\sqrt{ab}\sqrt{ab}}{a+b} < \sqrt{ab} \\
&\Leftrightarrow\; \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} < 1 \\
&\Leftrightarrow\; 2\sqrt{ab} < a+b \quad (*) \\
&\Leftrightarrow\; 4ab < (a+b)^2 \quad \text{(si dos números } x \text{ e } y \text{ son positivos, } x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2\text{)} \\
&\Leftrightarrow\; 4ab < a^2 + 2ab + b^2 \\
&\Leftrightarrow\; 0 < a^2 - 2ab + b^2 \\
&\Leftrightarrow\; 0 < (a-b)^2
\end{aligned}
$$

Lo último se cumple porque $a - b > 0$ y el cuadrado de cualquier número positivo es positivo.

0.3. $G < A$

Hay que demostrar lo siguiente:

$$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$$

Multiplicando a ambos lados por 2, es equivalente a probar que $2\sqrt{ab} < a+b$, lo cual ya hicimos en la demostración de que $H < G$ (*). La cadena de $\Leftrightarrow$ que llega a algo que sabemos que se cumple (en este caso $0 < (a-b)^2$) demuestra que todos los pasos son verdaderos.

0.4. $A < b$

Se deduce de lo siguiente (esta desigualdad es más fácil y no necesitamos utilizar $\Leftrightarrow$):

$$A = \frac{a+b}{2} < \frac{b+b}{2} = b$$

Ahora se define una cuarta media:

$$C := \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Hay que probar $a < C < b$ (sino no tendría sentido llamarla una media) y luego ver en qué orden está respecto a las otras. Veamos primero $a < C < b$:

$$a = \sqrt{a^2} = \sqrt{\frac{a^2+a^2}{2}} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < \sqrt{\frac{b^2+b^2}{2}} = \sqrt{b^2} = b$$

Acá utilizamos los siguientes dos puntos:

- Si $x > 0$ entonces $\sqrt{x^2} = x$. En general $\sqrt{x^2} = |x|$.
- Si $0 < a < b$ entonces $a^2 < b^2$.

Solo resta ver en qué lugar está C con respecto a las otras medias. Resulta que C siempre es la más grande. Para demostrar esto alcanza probar $A < C$, pues A es la más grande de las otras.

$$\begin{aligned}
A < C \;&\Leftrightarrow\; \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \\
&\Leftrightarrow\; \frac{(a+b)^2}{4} < \frac{a^2+b^2}{2} \quad \text{(elevamos ambos lados al cuadrado usando que son positivos)} \\
&\Leftrightarrow\; a^2+2ab+b^2 < 2a^2+2b^2 \\
&\Leftrightarrow\; 0 < a^2-2ab+b^2 \\
&\Leftrightarrow\; 0 < (a-b)^2
\end{aligned}$$

Con eso terminamos lo que pide el ejercicio.

Lo siguiente es una página de geogebra en la que se pueden visualizas las medias variando los valores de a y b mediante parámetros: https://www.geogebra.org/classic/xgsfw6wu.