Propiedades de funciones

Inyectividad y sobreyectividad relacionadas a la composición de funciones

Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos funciones. Probar que:

Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.

Supongamos que existen $x, y \in A$, tales que $f(x) = f(y)$. Para probar la inyectividad de f bastaría ver que necesariamente $x = y$. Sabiendo que $f(x) = f(y)$ se sigue que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. Ahora haciendo uso de la hipótesis que $g \circ f$ es inyectiva y como las imágenes de x e y por dicha función son la misma se sigue inmediatamente que $x = y$.

No puede afirmarse nada respecto a la inyectividad de g.

Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.

Sea $z \in C$. Como $g \circ f$ es sobreyectiva debe existir un elemento de A, llamémosle x, tal que $(g \circ f)(x) = z$. Entonces $f(x)$ es un elemento de B tal que su imágen por g es z. Como z es genérico (podría ser cualquier elemento de C) se sigue la sobreyectividad de g.

No puede afirmarse nada respecto a la sobreyectividad de f.

Operaciones de conjuntos relacionadas a la imagen de funciones

Sean A, B dos conjuntos no vacíos y $f : A \to B$ una función. Probar que para cualquier par de subconjuntos $A_1, A_2 \subset A$ con $A_i \neq \emptyset$ se tiene que:

a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

Veamos que todo elemento de $f(A_1 \cup A_2)$ se encuentra en $f(A_1) \cup f(A_2)$ y visceversa.

Para probarlo en la primera dirección, considérese $y \in f(A_1 \cup A_2)$. Existe $x \in A_1 \cup A_2$ tal que $f(x) = y$, por tanto x pertenece o a A_1 o a A_2. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x \in A_1$. Entonces $y = f(x) \in f(A_1) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$.

Para probarlo en la otra dirección, considérese $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$. Como se encuentra en la unión, se encuentra en alguno de ellos. Supongamos, de nuevo sin pérdida de generalidad, que $y \in f(A_1)$. Entonces existe $x \in A_1$ tal que $f(x) = y$. Pero si $x \in A_1$ también $x \in A_1 \cup A_2$, y entonces $y = f(x) \in f(A_1 \cup A_2)$.

b) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$

Sea $y \in f(A_1 \cap A_2)$, debe existir $x \in A_1 \cap A_2$ tal que $f(x) = y$. Como x se encuentra en A_1, se tiene $y = f(x) \in f(A_1)$. Similarmente, como x se encuentra en A_2, se tiene $y = f(x) \in f(A_2)$. Ya que y se encuentra en ambos A_1 y A_2 por definición también está en la intersección. Hemos probado que todo elemento de $f(A_1 \cap A_2)$ se encuentra en $f(A_1) \cap f(A_2)$, de donde el primer conjunto está contenido en el segundo.

No puede afirmarse nada respecto a la otra inclusión. Piénsese, por ejemplo, en los casos en que A_1 y A_2 son disjuntos pero sus imágenes no lo son.

c) *Si f es inyectiva entonces* $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$

Gracias a la inyectividad ahora podrá probarse la inclusión en el otro sentido. Sea $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$. Como $y \in f(A_1)$, existe $x_1 \in A_1$ tal que $f(x_1) = y$. De la misma manera, existe $x_2 \in A_2$ tal que $f(x_2) = y$. Entonces $f(x_1) = f(x_2)$, pero, siendo f inyectiva, esto solo es posible si $x_1 = x_2$. Ya que son el mismo elemento, pasemos a llamarle sencillamente x. x se encuentra tanto en A_1 como en A_2, de donde $x \in A_1 \cap A_2$. Entonces $y = f(x) \in f(A_1 \cap A_2)$, que es lo que buscábamos probar.