

Circunferencias

Determinar el centro y el radio de la circunferencia en cuestión.

$$3x^2 + 3y^2 - 18y + 18 = 0 \quad (1)$$

Solución:

La circunferencia de radio $r > 0$ y centro (p, q) esta dada por la ecuación $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ o lo que es lo mismo $3(x - p)^2 + 3(y - q)^2 = 3r^2$
Desarrollando e igualando a 0 obtenemos la ecuación

$$3x^2 - 6px + 3p^2 + 3y^2 - 6qy + 3q^2 - 3r^2 = 0 \quad (2)$$

Como los coeficientes de x^2 e y^2 son iguales en las ecuaciones (1) y (2), para sean igual se tienen que dar la igualdad en los factores que multiplican a y , x y el termino independiente. Es decir tenemos 3 ecuaciones.

$$\begin{cases} 0 & = & -6p & \text{factor en } x \\ -18 & = & -6q & \text{factor en } y \\ 18 & = & 3p^2 + 3q^2 - 3r^2 & \text{termino independiente} \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones del sistema obtenemos que $p = 0$ y $q = 3$. Luego despejando en la tercera ecuación del sistema tenemos que $r = \sqrt{3}$.

Determinar la circunferencia que pasa por los puntos $(1, 4), (4, 3), (5, 2)$

Solución:

Planteamos la ecuación de una circunferencia genérica $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$. Luego lo que tenemos que determinar son los valores de los parametros p, q y r .

Como $(1, 4)$ pertenece a la circunferencia, sustituyendo $x = 1, y = 4$ se verifica la ecuación, es decir

$$(1 - p)^2 + (4 - q)^2 = r^2$$

desarrollando tenemos que

$$1 - 2p + p^2 + 16 - 8q + q^2 = r^2$$

repetiendo para $(4, 3), (5, 2)$ obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones (no lineales)

$$\begin{cases} p^2 + q^2 - 2p - 8q + 17 = r^2 \\ p^2 + q^2 - 8p - 6q + 25 = r^2 \\ p^2 + q^2 - 10p - 4q + 29 = r^2 \end{cases}$$

Como los coeficientes de p^2, q^2 y r^2 son iguales en todas las ecuaciones restando la tercer ecuación a las anteriores obtenemos un sistema lineal de 2 ecuaciones en p y q (dos incognitas).

$$\begin{cases} 8p - 4q - 12 = 0 \\ 2p - 2q - 4 = 0 \end{cases}$$

Obtenemos así que $p = 1, q = -1$, luego despejando en cualquiera de las ecuaciones del sistema original tenemos que $r = 5$.