Capítulo 7

Cálculo de integrales

(2 **semanas y media**)
Los ejercicios indicados con **(*)** son los sugeridos para trabajar en esta semana. Los demás ejercicios son complementarios (se puede elegir algún ejercicio para hacer de manera opcional).

7.1. Teorema fundamental

1. **(*)** Sin calcular la integral, derivar las siguientes funciones:

$$a)\quad f(x)=\int_1^x \sqrt{t^2-t+1}\,dt \qquad b)\quad f(x)=\int_x^3 \sqrt{t^2-t+1}\,dt$$

$$c)\quad f(x)=\int_{\cos(x)}^3 \sqrt{t^2-t+1}\,dt \qquad d)\quad f(x)=\int_{x^2}^2 \frac{t^7}{1+t^4}\,dt \qquad e)\quad f(x)=\int_{e^x}^2 \frac{t^7}{1+t^4}\,dt$$

$$f)\quad f(x)=\int_{\cos(x)}^{\sin(x)} \frac{t^7}{1+t^4}\,dt \qquad g)\quad f(x)=\int_{e^x}^{x^3} \frac{\sin(t)}{3+e^t}\,dt \qquad h)\quad f(x)=\int_{\sqrt{x^2+1}}^{3x} \frac{\sin(t)}{3+e^t}\,dt$$

2. **(*)** Sabiendo que la integral $\int_0^1 \sqrt{t^2-t+1} = \frac{1}{8}(4+\log(27))$, calcular $f'(1)$ para las siguientes funciones

$$a)\quad f(x)=\int_0^{x^2} \sqrt{t^2-t+1}+x\,dt \qquad b)\quad f(x)=\int_0^{2x-1} \sqrt{t^2-t+1}+x^2\,dt$$

$$c)\quad f(x)=\int_x^0 x^2\sqrt{t^2-t+1}\,dt \qquad d)\quad f(x)=\int_{x^2}^0 x\sqrt{t^2-t+1}\,dt$$

$$e)\quad f(x)=\int_{\sin(\pi x)}^x e^x\sqrt{t^2-t+1}\,dt \qquad f)\quad f(x)=\int_{\log(x)}^{x^2} e^x\sqrt{t^2-t+1}\,dt$$

3. Sea $f : J \to \mathbb{R}$ una función continua. En cada caso determinar $f(1)$.

$$a)\ \int_1^{e^x+x} f(t)\,dt = \sin(\pi x) \qquad b)\ \int_0^{x^3-x^2+1} f(t)\,dt = \sin(\pi x)$$

$$c)\ \int_{\log(1+3x)+1}^{1} f(t)\,dt = \sin(\pi x) \qquad d)\ \int_{e^{x+\sin(x)}}^{1} f(t)\,dt = \sin(\pi x)$$

4. (*) Determinar (si existen) una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y un número real $c \in \mathbb{R}$ tales que

$$a)\ \int_0^x f(t)dt = c - e^{-x^2} \qquad b)\ \int_x^1 f(t)\,dt = \cos^2(x) + c \qquad c)\ \int_x^1 f(t)\,dt = \sqrt{x^4+1} + c$$

$$d)\ \int_c^x f(t)\,dt = 2 + x^2 \qquad e)\ \int_c^x f(t)\,dt = (x-1)^4 \qquad f)\ \int_c^x f(t)\,dt = \sin^2(x) + 1$$

5. Determinar (si existe) una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$a)\ \int_1^{\cos(x)} f(t)\,dt = 2\sin^2(x) \qquad b)\ \int_0^{x^2} f(t)\,dt = \log(x^2+1)$$

$$c)\ \int_0^{x^2} f(t)\,dt = x\sin(x^2) \qquad d)\ \int_0^{x^2} f(t)\,dt = x^2\cos(x)$$

6. (*)

   a) Demueste que los valores de las siguientes expresiones no dependen del valor de x

$$a)\ \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}\,dt \ \ x \in (0, +\infty) \qquad b)\ \int_{-\cos(x)}^{\sin(x)} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\,,\ \ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

   b) Calcule $(f^{-1})'(0)$ para

$$a)\ \ f(x) = \int_0^x 1 + \sin(\sin(t))\,dt \qquad b)\ \ f(x) = \int_1^x 1 + \cos(\cos(t))\,dt$$

$$c)\ \ f(x) = \int_0^{e^x \log(x)} \sqrt{t^2+e^t}\,dt \qquad d)\ \ f(x) = \int_1^{\arctan(x)} \sqrt{t^2+e^t}\,dt$$

7. Sea F la función definida como

$$F(x) = \frac{1}{2}\int_1^{x^2} e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt$$

   Entonces la derivada de la función inversa de F en 0 vale:

$$a)\ \ \sqrt{e} \qquad b)\ \ 2\sqrt{e} \qquad c)\ \ \frac{1}{2\sqrt{e}} \qquad d)\ \ \frac{3\sqrt{e}}{2} \qquad e)\ \ \frac{2\sqrt{e}}{3}$$

8. Sea $F(x) = \int_0^x f$. En cada uno de los siguientes casos indicar para qué valores de x se verifica que $F'(x) = f(x)$.

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 1 \\ 1 \text{ si } 1 < x \end{cases} \qquad b) \quad f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ x \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$c) \quad f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} \text{ si } x = \frac{p}{q}, \text{ (fracción irreducible)} \end{cases}$$

9. **(*)** Sea f una función continua, monótona estricta en $[a,b]$ y derivable en (a,b).

   a) Examen, febrero 2017. Probar que

   $$\int_a^x f(t)\,dt + \int_{f(a)}^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt - xf(x) + af(a) = 0 \;\; \forall\, x \in [a,b]$$

   Interprete geométricamente el resultado.

   b) Calcular $\int_1^2 \log(t)\,dt$, utilizando el resultado de la parte anterior.

10. **(*)** Sea $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $G(x) = \int_x^{x+1} e^{-t^2}\,dt$

    a) Probar que G es derivable en todo $\mathbb{R}$ y calcular $G'(x)$.

    b) Graficar y estudiar extremos relativos y absolutos de G.

11. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable con derivada positiva y tal que $f(1) = 0$. Definimos $g(x) = \int_0^x f(t)dt$

    Indicar cuáles de los siguientes enunciados son ciertos

    a) La función g es continua

    b) La función g es derivable

    c) La gráfica de g tiene tangente horizontal en 1

    d) La función g tiene un mínimo local en 1

    e) La función g tiene un máximo local en 1

    f) La función g tiene un punto de inflexión en 1

    g) La grafica de g' corta al eje x en el punto $x = 1$

12. A partir de las derivadas de las inversas trigonometricas, calcular:

$$a) \quad \int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$b) \quad \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \;\; a,b \in [-1,1] \qquad c) \quad \int_a^b \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \;\; a,b \in [-1,1]$$

13. La primer figura corresponde al gráfico de una función f continua definida en $\mathbb{R}$ y la figura de abajo corresponde al gráfico de una primitiva F de f definida en $\mathbb{R}$.

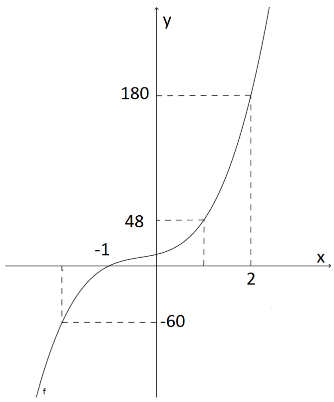


Figura 7.1: Gráfico de f

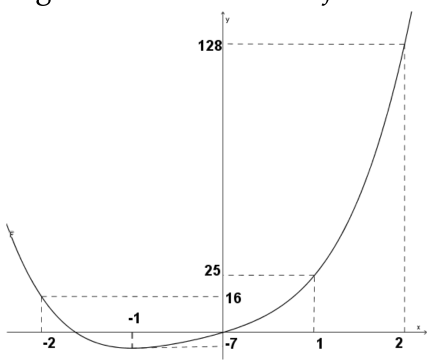


Figura 7.2: Gráfico de F

a) Calcule $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$ y $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$.

b) Calcule el área de la región limitada por el gráfico de la función f y el eje Ox en el intervalo $[-2,2]$.

c) Determine la ecuación de la recta tangente al gráfico de F en el punto $(1,25)$.

14. **(*)** A partir de la fórmula de Barrow, calcular las siguientes integrales

$$a)\ \int_0^2 x^4 - x^5 + 3\,dx \qquad b)\ \int_0^1 x^6 - 3x^3 + 2\,dx \qquad c)\ \int_1^2 x^5 - 4x^3 + x\,dx$$

$$d)\ \int_1^4 3\sqrt{x} + \sqrt[5]{x}dx \qquad e)\ \int_5^{10} \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 dx \qquad f)\ \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$$

$$g)\ \int_1^3 e^{2x}\,dx \qquad h)\ \int_0^1 \sin(\pi x)\,dx \qquad i)\ \int_1^2 \cos(2x)\,dx$$

15. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función positiva y derivable, probar que

a) $\int_a^b 2f'(t)f(t)dt = f^2(b) - f^2(b)$, $\int_a^b nf'(t)f^{n-1}(t)dt = f^n(b) - f^n(a)$

b) $\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)}dt = \log(f(b)) - \log(f(a))$

c) $\int_a^b \frac{f'(t)}{2\sqrt{f(t)}}dt = \sqrt{f(b)} - \sqrt{f(a)}$

d) $\int_a^b f'(t)e^{f(t)}\,dt = e^{f(b)} - e^{f(a)}$

e) Calcular las siguientes integrales

$$a)\ \int \sin^6(x)\cos(x)\,dx \qquad b)\ \int \frac{\tan(x)}{\cos^2(x)}\,dx \qquad c)\ \int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}\,dx$$

$$d)\ \int \frac{x-2}{(x^2-4x+5)}\,dx \qquad e)\ \int \tan(x)\,dx \qquad f)\ \int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\,dx$$

$$g)\ \int \sqrt{e^x}\,dx \qquad h)\ \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}\,dx \qquad i)\ \int \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\,dx$$

$$j)\ \int \cos(x)e^{\sin(x)}\,dx \qquad k)\ \int xe^{x^2}\,dx \qquad l)\ \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

7.2. Métodos de integración

1. (*) Calcular a patir de la fórmula de partes, las siguientes integrales:

$$a)\ \int x\sin(x)\,dx \qquad b)\ \int x\log(x)\,dx \qquad c)\ \int xe^x\,dx$$

$$d)\ \int \sin^2(x)dx \qquad e)\ \int \cos^2(x)dx \qquad f)\ \int \log(x)\,dx$$

$$g)\ \int \cos(2x)\operatorname{sen}(3x)\,dx \qquad h)\ \int x^2e^x\,dx \qquad i)\ \int \cos(x)e^{2x}\,dx \qquad j)\ \int \log^2(x)\,dx$$

2. (*) Calcular las integrales a partir del método de sustitución

$$a)\ \int e^x\sin(e^x)\,dx \qquad b)\ \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx \qquad c)\ \int xe^{-x^2}\,dx$$

$$d)\ \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}\,dx \qquad e)\ \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}}\,dx \qquad f)\ \int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$g)\ \int x\sqrt{1-x^2}\,dx \qquad h)\ \int x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

$$i)\ \int \frac{1}{a^2x^2+b^2}\,dx \qquad j)\ \int \tan(x)\,dx \qquad k)\ \int \frac{1}{\cos(x)}\,dx \qquad l)\ \int \cos^7(x)\,dx$$

$$m)\ \int \frac{\log(\log(x))}{x\log(x)}\,dx \qquad n)\ \int \log(\cos(x))\tan(x)\,dx$$

3. (*) Calcular, utilizando fracciones simples, las siguientes integrales de funciones racionales:

$$a)\ \int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx \qquad b)\ \int \frac{x}{x^3-6x^2+11x-6}\,dx$$

$$c)\ \int \frac{x^4}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx \qquad d)\ \int \frac{6x^3}{x^3-6x^2+11x-6}\,dx$$

$$e)\ \int \frac{1}{x^2+x+2}\,dx \qquad f)\ \int \frac{4x-3}{3x^2+3x+2}\,dx \qquad g)\ \int \frac{4x-1}{x^2+4x+8}\,dx$$

$$h)\ \int \frac{dx}{(2x^2+1)(x-1)} \qquad i)\ \int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx$$

4. (*) Calcular las siguientes integrales

$$a)\ \int x\sqrt{3x+10} \qquad b)\ \int \sqrt[3]{x}(2x+1)$$

$$c)\ \int x^3\sin(x^2+1)\,dx \qquad d)\ \int \sin(x)\cos(x)e^{\cos(x)}dx \qquad e)\ \int \log(x^2+1)dx$$

$$f)\ \int \sin\left(\sqrt{x-1}\right)dx \qquad g)\ \int e^{\sqrt{x}}\,dx$$

5. (*) Calcular las siguientes integrales

$$a)\ \int x\arctan(x)\,dx \qquad b)\ \int \arctan\left(\frac{1}{x}\right)dx \qquad c)\ \int x\log\left(\sqrt{x^2+1}\right)dx$$

$$d)\ \int \frac{x}{\cos^2(x)}\,dx \qquad e)\ \int \frac{\arcsin(x)}{x^2}\,dx$$

$$f)\ \int \frac{\sqrt{x}}{x-4}dx \qquad g)\ \int \frac{2\,dt}{e^{-t}+1}\,dt \qquad h)\ \int \frac{2e^x+2e^{-x}}{e^{-x}+3e^x}\,dx$$

6. (*) Las funciones trigonométricas hiperbólicas serán útiles en este ejercicio. Recordemos que estas funciones están definidas como $\sinh,\cosh:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

   Estas funciones verifican que $\cosh^2-\sinh^2=1$, $\cosh'(x)=\sinh(x)$, $\sinh'(x)=\cosh(x)$

   Calcular las siguientes integrales

$$a)\ \int \sqrt{1+x^2}\,dx \qquad b)\ \int \sqrt{x^2-1}\,dx \qquad c)\ \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \qquad d)\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

7. *a*) Sea $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$.
   Demostrar que $(2n+1)I_n = 2nI_{n-1}$. Calcular I_2, I_3.
   Determinar una fórmula general en función de n.

   b) Sea $I_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $I_n(x) = \int_0^x t^n e^t\,dt$
   Probar que $I_n(x) = x^n e^x - nI_{n-1}(x)$ para todo $n \geq 1$

   c) Sea $I_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función definida por $I_n(x) = \int_1^x \log^n(t)\,dt$
   Probar que $I_n(x) = x\log(x)^n - nI_{n-1}(x)$ para todo $n \geq 1$

8. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$a)\ \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(x)\,dx = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} \qquad b)\ \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$$

9. Sea $f(n) = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x)\,dx$, $n \geq 1$.
   Demostrar que:

   a) $f(n+1) < f(n)$

   b) $f(n) + f(n+2) = \frac{1}{n-1}$ si $n > 2$

   c) $\frac{1}{n+1} < 2f(n) < \frac{1}{n-1}$ si $n > 2$

10. *a*) Sea $I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$ $n \in \mathbb{N}$. Integrando por partes deducir la fórmula de recurrencia

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)}\left(\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}(x)\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

   b) Calcular

$$a)\ \int \frac{1}{(x^2+9)^2}\,dx \qquad b)\ \int \frac{2x+3}{(x^2+9)^2}\,dx \qquad c)\ \int \frac{1}{(x^2+4x+5)^2}\,dx$$

7.3. Áreas

1. **(*)** Hallar el área encerrada entre los gráficos de las siguientes funciones

   a) $f(x) = e^{x-1} - 1$ y $g(x) = 1 - x^2$ en el intervalo $[0, 2]$

b) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ y $g(x) = \frac{1}{x-1}$ en el intervalo $[2,4]$

c) $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = \cos(x)$ en el intervalo $[0, \pi/2]$

2. Hallar el área encerrada entre las siguientes curvas

   a) la parábola $y = x^2$ y la recta $2x + 3$.

   b) la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$ y la recta $x = 3$.

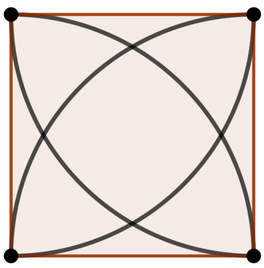
   c) la curva $y = e^x$, la curva $y = e^{-x}$ y la recta $x = 1$.

   d) las curvas $y = x^4 - x^2$, $y = 3 + x^2$

   e) las curvas $y = x^2 - 1$, $y = \frac{3}{x^2+1}$

3. Calcular el área del círculo de radio r. Calcular el área de la elípse de ejes de medida $2a$ y $2b$

4. En la siguiente figura se muestra un cuadrado y 4 cuartas circunferencias, con centro en cada uno de los vertices del cuadrado y radio de igual medida que el radio del cuadrado.



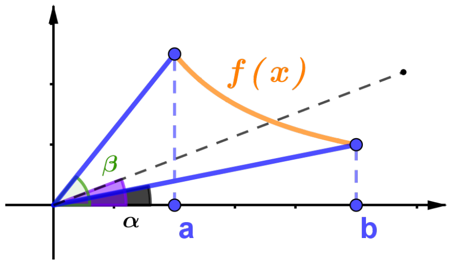
   Determinar el área de cada una de las regiones

5. Sea C un cuadrado de lado a y D la región de los puntos que están más próximos al centro del cuadrado que a sus lados. Calcular el área de D.

6. Calcular el área de las siguientes regiones del plano

$$a) \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 3\}$$

$$b) \quad \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 3x,\, x \leq 2y,\, x \leq \frac{1}{y}\right\} \qquad c) \quad \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\, \frac{(x-3)^2}{3^2} + y^2 \leq 1\right\}$$



7.3.1. Áreas en coordenadas polares

Consideremos un región como en la siguiente figura.

Esto quiere decir que la figura está delimitada por dos rayos desde el orígen (de pendientes α y β) y el gráfico de una función f.

Además, la función f cumple la propiedad de que cada rayo de ángulo entre α y β corta una única vez el gráfico de f.

En este caso su área se podría calcular integrando en 2 regiones, la primera es el área de la región entre las rectas, es decir, $\int_0^a \tan(\beta)t - \tan(\alpha)t dt$, y la segunda es el área entre el grafico de f y la recta de menor pendiente, es decir, $\int_a^b f(t) - \tan(\alpha)t\,dt$.
Como para cada ángulo θ el rayo $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ corta solo una vez el gráfico de f, existe una funcion biyectiva $h : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ tal que $h(\theta) = x$ si y solo si $f(x) = \tan(\theta)x$.

De esta forma, de manera intuitiva el área en cuestión se podria calcular "barriendo" ángulos en vez de rectas verticales.

Probar que el área de la figura es $\int_\beta^\alpha h^2(\theta) + f^2(h(\theta))\,d\theta$.

Otra manera de interpretar este problema es cuando pensamos una función g como un valor del ángulo (es decir $g(\theta) = f \circ h(\theta)$)

1. Probar que el área encerrada en este caso es $\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\,d\theta$
2. Calcular el área encerrada por la ecuación $r = 2\lambda \sin^2(\theta)$ donde λ es una constante.

7.4. Longitud de curva

El objetivo de esta sección es definir longitudes de curvas de forma similar al cálculo de áreas a partir de particiones y sumas.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Dada una partición $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$, se define $l(f, P)$ como la longitud de la poligonal que pasa por los puntos $(x_i, f(x_i))$, es decir,

$$l(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} d((x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1}))) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}$$

1. Calcular $l(f,P)$ y $l(f,Q)$ para la función $f(x) = x^2 - x$ y las particiones $P = \{0,1,3\}$, $Q - \{0,1,2,3\}$.

2. Probar que si P es una partición del intervalo $[a,b]$ y f es una función lipschitziana con constante de Lipschitz λ, entonces $l(f,P) \leq (b-a)\sqrt{\lambda^2+1}$.

3. Probar que dadas P, Q dos particiones del intervalo $[a,b]$ tales que Q es más fina que P (es decir $P \subset Q$) se tiene que $l(f,P) \leq f(f,Q)$.

4. Probar que dada una partición P del intervalo $[a,b]$, si f es monótona entonces $l(f,P) \leq (a-b) + |f(a) - f(b)|$.

Se dice que una curva es rectificable en el intervalo $[a,b]$ cuando el conjunto $\{l(f,P) : P \text{ particion del intervalo } [a,b]\}$ esta acotado superiormente. En este caso llamos longitud de la curva de f en el intervalo [a,b] a dicho supremos.

$$l(f,[a,b]) = \sup\{l(f,P) : P \text{ partición del intervalo } [a,b]\}$$

5 Deducir de las partes anteriores que si una función es monótona o Lipschitz entonces su gráfico es rectificable. Deducir que si una función es derivable con derivada acotada entonces su gráfico es rectificable.

6 Sea f una función rectificable en el intervalo $[a,b]$ y $c \in (a,b)$. Probar que

$$l(f,[a,c]) + l(f,[c,b]) = l(f,[a,b])$$

7 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable, con derivada continua y monótona, y $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a,b]$. Definimos $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $h(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$

   a) Probar que

   $$(x_{i+1} - x_i)\text{ínf}(f', [x_i, x_{i+1}]) \leq |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq (x_{i+1} - x_i)\sup(f', [x_i, x_{i+1}]).$$

   b) Probar que $S_*(h,P) \leq l(f,P) \leq S^*(h,P)$.

   c) Probar que para toda partición Q del intervalo [a,b] se tiene que $l(f,P) \leq S^*(h,Q)$.

   d) Concluir que

   $$l(f,[a,b]) = \int_a^b h(t)dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}$$

   A partir de esta fórmula podemos calcular longitudes, por ejemplo arcos de circunferencia.

8 Calcular la longitud de arco para las siguientes funciones

$$a)\quad f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x} \text{ en } [1,3] \qquad b)\quad f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{8x^2} \text{ en } [1,2]$$

9 Calcule la longitud del hipercicloide de 4 puntas $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

10 **Definición de funciones trigonometricas**

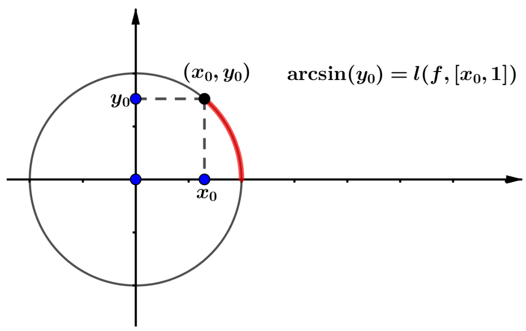
En este ejercicio no se debe usar ninguna propiedad de las funciones trigonometricas antes de probarla, de hecho, esta es una manera de definir dichas funciones.

Definimos las funciones $\arcsin, \arccos : [-1,1] \to \mathbb{R}$ a partir de longitudes de arco del círculo.

Notemos $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ a la función definida por $f(t) = \sqrt{1-t^2}$

Para la función arcsin se toma como el largo del arco de circunferencia entre el punto $(1,0)$ y el punto (x_0, y_0), más precisamente

$$\arcsin(y) = \begin{cases} l(f,[x,1]) & \text{si } y \geq 0 \quad \text{donde } x = \sqrt{1-y^2} \\ -l(f,[x,1]) & \text{si } y < 0 \quad \text{donde } x = \sqrt{1-y^2} \end{cases}$$



Para la función arccos, se toma la longitud hasta el punto $(1,0)$; más precisamente

$$\arccos(x) = l(f,[x,1])$$

Definimos además las funciones sin, cos como las funciones inversas de arcsin y arccos respectivamente.

a) Verificar que la función arcsin y sin son impares.

b) Probar que $h(t) = \arccos(-t) + \arcsin(t)$ es una función constante para $t \in [0,1]$.

c) Calcular $\arccos'(x)$ y $\arcsin'(x)$.

d) Calcular $\sin'(0)$, $\cos'(0)$.

e) Probar que $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ para $\alpha \in [0, \arcsin(1)]$.

7.5. Aplicaciones

1. Un cohete acelera al quemar su combustible de a bordo, de manera que su masa disminuye con el tiempo. Suponga que la masa inicial es m , el combustible se consume con una rapidez r y los gases de escape son expulsados con una velocidad constante v_c (respecto al cohete). Un modelo para la velocidad del cohete en el tiempo t esta dada por la ecuación
$$v(t) = -gt - v_c \log\left(\frac{m - rt}{m}\right)$$
donde g es la aceleración debida a la gravedad y t no es demasiado grande.

   Si $g = 9{,}8 m/s^2$, $m = 30{,}000 kg$, $r = 160 kg/s$, y $v_c = 3000 m/s$, encuentre la altura de cohete un minuto después del despegue.

2. Los astrónomos usan una técnica llamada estereografía estelar para determinar la densidad de estrellas de un cúmulo de estrellas, a partir de la densidad observada en dos dimensiones, que se puede analizar de una fotografía. Suponga que en un cúmulo esférico de radio R la densidad de estrellas depende solo de la distancia r al centro del cúmulo. Si la densidad percibida de las estrellas está dada por $y(s)$, donde s donde s es la distancia plana observada desde el centro del cúmulo, y $x(r)$ es la densidad real, se puede demostrar que
$$y(s) = \int_s^R \frac{2r}{\sqrt{r^2 - s^2}} x(r) dx$$
Si la densidad real de las estrellas del cúmulo es $x(r) = \frac{1}{2}(R - r)^2$, encuentre la densidad percibida $y(s)$.

3. El promedio de rapidez de moleculas de una gas perfecto es
$$\overline{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{M}{2RT}\right)^{3/2} \lim_{x \to +\infty} \int_0^x v^3 e^{-Mv^2/(2RT)} dv$$
donde M es el peso molecular del gas, R es la constante del gas, T es la temperatura del gas y v es la velocidad molecular

   Demuestre que
$$\overline{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

4. (*)

   El centro de gravedad de una superficie plana se define, conceptualmente, de la siguiente manera:

   Un trozo de cartón rígido, plano y horizontal, permanecerá en equilibrio si se sostiene en un punto determinado. Este punto de apoyo es el centro de gravedad de la superficie plana del carton.

Claramente para una figura simétrica (cuadrado, rectangulo, circunferencia y un triangulo equilatero) el centro de gravedad coincide con el centro geométrico de la figura.

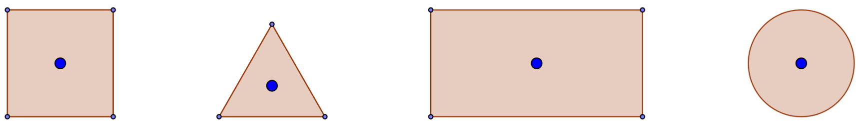
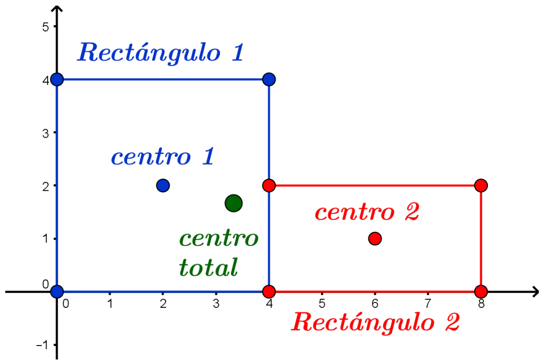


Figura 7.3: Centro de masa de algunas figuras simétricas

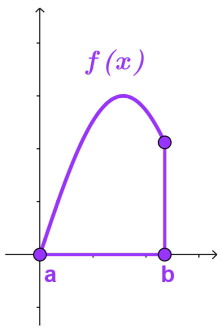
Si se pegan 2 rectangulos como en el de la figura entonces el centro de gravedad es centro total.



Para una superficie como la de la figura el centro de gravedad es (M_x, M_y), donde

$$M_y = \frac{\int_a^b f(x)^2\,dx}{M} \qquad \text{y} \qquad M_x = \frac{\int_a^b f(x)x\,dx}{M} \qquad \text{con} \qquad M = \int_a^b f(x)\,dx$$

Bosquejar un argumento sobre esta fórmula apartir del caso de los rectángulos.



a) Hallar el centro de gravedad de la superficie comprendida bajo una arcada de la sinusoide ($f(x) = \sin(x)$)

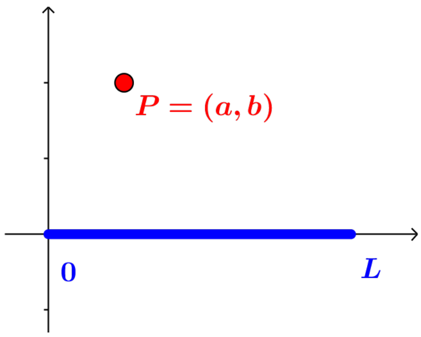
b) Calcular el centro de gravedad de la figura comprendida entre la parábola $x^2 - 1$ y el eje Ox.

c) Calcular el centro de gravedad de un semicírculo. Calcular el centro de gravedad de una semi elipse

5. Una varilla con carga de longitud L produce un campo eléctrico en el punto $P = (a, b)$ dado por

$$E(P) = \int_{-a}^{L-a} \frac{\lambda b}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + b^2)^{3/2}}\, dx$$

donde λ es la densidad de carga por longitud unitaria en la varilla y ϵ_0 es la permisividad del espacio libre. Calcule $E(P)$.



7.6. Complementarios

1. Realice una lista de las integrales que sabe calcular. Compare con sus compañeros.

2. Calcular las siguientes integrales

$$a) \quad \int \frac{\log(x^2)}{x}\, dx \qquad b) \quad \int \frac{\log(x)}{x^2}\, dx$$

3. Calcular las siguientes integrales

$$a) \quad \int \frac{1}{1+e^x} dx \qquad b) \quad \int \frac{1}{1+\sin(x)}\, dx \qquad c) \quad \int \sqrt{e^x + 1}\, dx$$

4. a) Probar que $\int_0^1 x^m (1-x)^n\, dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m\, dx \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$. Calcular $\int_0^1 x^2 (1-x)^{30}\, dx$.

   b) Sea f una función continua. Probar que $\int_0^\pi x f(\sin(x))\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin(x))\, dx$, y calcular $\int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1+\cos^2(x)}\, dx$

   c) Demostrar que $\int_0^1 (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)\, dx, \quad n \in \mathbb{N}$

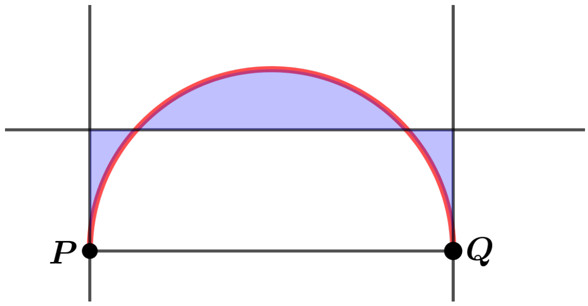
5. Calcular las siguientes integrales indefinidas:

$$a) \quad \int \frac{\sec^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\,dx \qquad b) \quad \int \operatorname{tg}^3(2x+1)\sec^2(2x+1)\,dx$$

   Recordar que $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.

6. Calcular la longitud de arco de la parabola $y = -x^2 + 4$ para $x \in [-2, 2]$

7. Se considera un semicírculo de radio 1. Su diametro está marcado por los puntos P y Q. Se traza una recta paralela a PQ y se pintan las regiones mostradas en la figura



   Determinar la altura a la que debe estar la recta para que el área pintada sea mínima.

8. **Función** Γ

   Sea $t > 0$, definimos $g_t(s) : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ como $g_t(s) = \displaystyle\int_1^s e^x x^{t-1}\,dx$

   Probar que existen y son finitos los límites $\lim\limits_{s\to 0} g_t(s)$, $\lim\limits_{s\to+\infty} g_t(s)$

   Definimos la función $\Gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ como

$$\Gamma(t) = \lim_{s\to+\infty} g_t(s) - g_t\left(\frac{1}{s}\right) = \lim_{s\to+\infty} \int_{\frac{1}{s}}^{s} e^x x^{t-1}\,dx$$

   Calcular $\Gamma(1), \Gamma(2)$.

   Probar que $\Gamma(n+1) = (n+1)\Gamma(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Concluir que $\Gamma(n) = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.