Capítulo 1

Conjuntos y funciones

Los ejercicios indicados con **(*)** son los sugeridos para trabajar en esta semana. Los demás ejercicios son complementarios (se puede elegir algún ejercicio para hacer de manera opcional).

1.1. Conjuntos

1. *a*) Determinar cuántos subconjuntos de $A = \{1, 2, a, b, c\}$ tienen 2 elementos. Repetir para 3 elementos.

   b) Calcular el conjunto potencia de $A = \{a, 1, U\}$ (es decir el conjunto que consiste en todos los subconjuntos de A).

2. **(*)** Sean A, B y C los conjuntos dados por $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ y $C = \{7, 8, 9, 10\}$.

   Calcular:

   $a)$**(*)** $A \cap B$ $\quad b)$ $B \cap C$ $\quad c)$ $A \cap C$ $\quad d)$ $A \cap B \cap C$

   $e)$**(*)** $A \cup B$ $\quad f)$ $B \cup C$ $\quad g)$ $A \cup C$ $\quad h)$ $A \cup B \cup C$

   $i)$**(*)** $A \cup (B \cap C)$ $\quad j)$ $A \cap (B \cup C)$ $\quad k)$ $(A \cup B) \cap (B \cup C)$

   $l)$**(*)** $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ $\quad m)$ $(A \setminus C) \cup (C \setminus A)$ $\quad n)$ $A \cup (B \setminus C)$

3. **(*)** Determinar todos los elementos de los siguientes conjuntos:

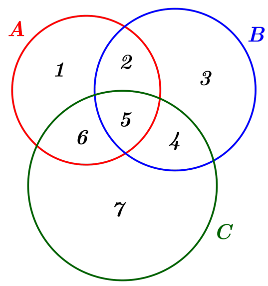
   $a)$**(*)** $\{n \in \mathbb{N} : n \leq 5\}$ $\quad b)$ $\{n \in \mathbb{N} : n^2 \leq 12\}$ $\quad c)$ $\{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$

   $d)$**(*)** $\{x \in \mathbb{R} : -x^2 - x + 2 < 0\}$ $\quad e)$ $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 2 < 0\}$ $\quad f)$ $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5 < 0\}$

   $g)$**(*)** $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x+1}{x-1} \geq 0\right\}$ $\quad h)$ $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x-2}{x+1} \leq 0\right\}$ $\quad i)$ $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x+2}{x+1} \geq 0\right\}$

   $j)$**(*)** $\{x \in [0, 2\pi] : \sin(x) \leq 0\}$ $\quad k)$ $\{x \in [0, 2\pi] : \cos(x) > 0\}$

4. Sean A, B y C tres conjuntos como en la figura:



Describir las regiones numeradas a partir de los conjuntos A, B y C y las operaciones binarias $\cup$, $\cap$ y $\setminus$.

5. Sean A, B conjuntos. Definimos $P_1 = A \cup B,\ P_2 = A \cap B,\ P_3 = A \setminus B,\ P_4 = A,\ P_5 = B$.

   Para todo par i, j determinar si se cumple que $P_i \subset P_j$.

6. **(*) Producto cartesiano**

   a) Sean $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{a,b,c\}$. Listar todos los elementos de $A \times B$ y de $B \times A$.

   b) Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Probar que si $(x,y) \in A \times B$ y además $(x,y) \in B \times A$ entonces $\{x,y\} \subset A \cap B$.

   c) Sean A, B dos conjuntos no vacios. Probar que si $A \times B = B \times A$ entonces $A = B$.

   d) Bosquejar en un par de ejes coordenados (es decir, en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$), los siguientes conjuntos:

   a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : y = 3\}$ *b*) $\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : x = -1\}$

   c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : x = y\}$ *d*) $\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : x = -y\}$

   e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : x = 2y - 3\}$ *f*) $\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : 2x = y + 5\}$

   g) $\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : 0 < x < 4, 2 \leq y \leq 4\}$ *h*) $\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : 1 < x \leq 3, 1 \leq y < 4\}$

   i) $\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : 2x + 4y < 4\}$ *j*) $\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : 3x - 2y > 6\}$

   k) $\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : 2x < y + 3, x > y\}$ *l*) $\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : x > 2y + 3, x < y\}$

   e) Sean A, B, C y D conjuntos, verificar que $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$. Dar un ejemplo de conjuntos en donde se dé la igualdad y otro en el que no se dé la igualdad.

7. **(*)** Sean A, B conjuntos finitos no vacíos.

   a) Si A tiene 15 elementos y B tiene 7. ¿Cuántos elementos tiene $A \times B$?

   b) Si A tiene 20 elementos, B tiene 30 y $A \cup B$ tiene 37 elementos. ¿Cuántos elementos tiene $A \cap B$?

   c) Si A tiene 20 elementos, B tiene 30 y $A \cap B$ tiene 15 elementos. ¿Cuántos elementos tiene $A \cup B$?

8. **(*)** Probar, a traves de diagramas de Venn, las siguientes igualdades

   a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

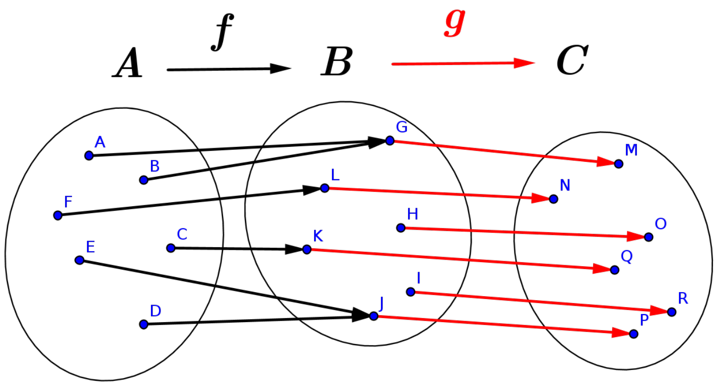
   c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   e) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ f) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

   g) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap B \cap C)$

1.2. Funciones

1. **(*)** Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones dadas por el siguiente diagrama:



   a) Calcular $g \circ f$

   b) Para las funciones f, g y $g \circ f$, determinar cuáles son inyectivas, sobreyectivas.

2. Use la tabla para calcular cada valor

   a) $f(g(1))$ b) $g(f(1))$ c) $f(f(1))$ d) $g(g(1))$

x	1	2	3	4	5	6
f(x)	3	1	4	2	2	5
g(x)	6	3	2	1	2	3

3. **(*)**

   a) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones

      1) Probar que si f no tiene raíces entonces $f \circ g$ no tiene raices.

2) De un ejemplo donde f tenga raíces pero $f \circ g$ no tenga raices.

b) Calcular las raices de las siguientes funciones

$$a)\quad x + 5\sqrt{x} + 6 \qquad b)\quad x - \sqrt{x} - 3 \qquad c)\quad 2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$$

$$d)\quad (e^x)^2 + e^x - 4 \qquad e)\quad 2\sin^2(x) + 3\sin(x) - 2$$

4. En cada caso, determinar la función y el dominio en el cual el problema tiene sentido.

   a) El área de un cuadrado en función del largo de la diagonal.
   b) El área de un círculo en función de su diámetro.
   c) El área de un triángulo equilátero en función del largo de un lado.
   d) El área de un triángulo rectángulo isoceles en función del largo de la hipotenusa.
   e) El área de un hexágono regular en función del largo de sus lados.

5. **(*) Funciones pares/impares**
   Se dice que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es par si $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se dice que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es impar si $f(x) = -f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   a) Determinar cuáles de las siguines funciones son par, impar o ninguna de las dos

$$a)\quad |x| \qquad b)\quad x^2 + 1 \qquad c)\quad x^3 + 1$$

$$d)\quad \frac{1}{x^2 + 1} \qquad e)\quad \sqrt{x^2 + 3} \qquad f)\quad \sqrt[3]{2x}$$

   b) Determinar a partir de su grafico cuáles de las siguines funciones son par, impar o ninguna de las dos

$$a)\quad e^x \qquad b)\quad \sin(x) \qquad c)\quad \cos(x) \qquad d)\quad \log\left(x^2 + 1\right) \qquad e)\quad \arctan(x)$$

   c) Linealidad
      1) Probar que la suma de dos funciones pares es par.
      2) Probar que, dado $\lambda \in \mathbb{R}$, si f es una función par entonces λf también es una funcion par.
      3) Repetir las partes anteriores para funciones impares.
   d) Probar que el producto de una función par y una impar es una función impar.
   e) Probar que el producto de dos funciones pares es par ¿Qué ocurre con el producto de dos funciones impares?
   f) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, definimos $h, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $h(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ y $g(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. Probar que h es una función par y g una función impar. Observar que $f = h+g$, es decir, toda función real se puede escribir como suma de una función par y una impar.

6. **Velocidad media**

   Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que describe la posición de una partícula en el tiempo (es decir, $f(t)$ dice dónde está la partícula en el instante de tiempo t).

   Se define la *velocidad promedio* de f entre los tiempos t_0 y t_1, con $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, $t_0 \neq t_1$ como $V_{t_0,t_1}(f) = \frac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0}$.

   a) La línea 21 tarda 12 minutos en ir por 18 de Julio desde Plaza Cagancha hasta 8 de Octubre (el recorrido es de aproximadamente 2500 metros).

   La línea 300 tarda 10 minutos aproximadamente en ir por Bv. Artigas desde Tres Cruces haste 21 de setiembre (el recorrido es de aproximadamente 2000 metros).

   Determinar la velocidad promedio en ambos recorridos y determinar si son similares o alguno es sustancialmente más rápido.

   b) Un ciclista realiza un recorrido con una velocidad constante a tramos dependiendo de la inclinación del terreno. En el primer tramo su velocodad media es de 40km/h mientras que en el segundo tramo es de 25km/h. Sabiendo que ambos tramos tienen igual longitud, calcular la velocidad media en el recorrido total.

   c) Probar que si la velocidad promedio de f es constante, es decir existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $V_{t_0,t_1}(f) = K$ para todo par $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, entonces existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $f(t) = Kt + b$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

7. **(*)** Para los siguientes pares de funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ calcular $f \circ g$, $g \circ f$ y $f + g$.

   a) **(*)** $f(x) = 2x+1$, $g(x) = 3x-1$ *b*) $f(x) = 5x-1$, $g(x) = 2x-3$

   c) $f(x) = 2x+1$, $g(x) = x^3 - x^2 - 4$ *d*) $f(x) = 2x^2+1$, $g(x) = -3x^2 - 4$

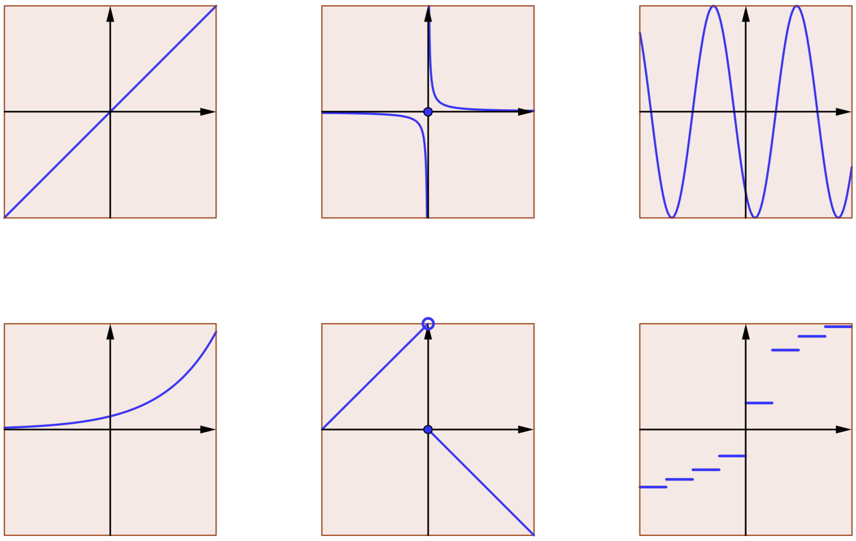
   e) $f(x) = |2x+1|$, $g(x) = x^2 + x + 1$ *f*) $f(x) = |2x-5|$, $g(x) = x^2 - x + 1$

   g) **(*)** $f(x) = x+1$, $g(x) = \max\{1, x-1\}$ *h*) $f(x) = x-2$, $g(x) = \max\{1, x-2\}$

   $$i)\,(*)\ f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \leq 0 \\ x-1 & 0 < x \end{cases},\quad g(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ 2x & 0 < x \end{cases}$$

   $$j)\,(*)\ f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x}{2} & 0 < x < 4 \\ 1-x & x \geq 4 \end{cases},\quad g(x) = \begin{cases} x+3 & x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & 0 < x \end{cases}$$

8. **(*)** En la siguiente imagen se muestran gráficos de funciones $f : [-1,1] \to [1,1]$. Determinar cuáles funciones son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas:



9. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos funciones. Probar que:

   a) Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.

   b) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.

10. Sean A, B dos conjuntos no vacíos y $f : A \to B$ una función. Probar que para cualquier par de subconjuntos $A_1, A_2 \subset A$ con $A_1, A_2 \neq \emptyset$ se tiene que:

   a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

   b) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

   c) Si f es inyectiva entonces $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

11. **(*) Funciones monótonas**

   Una función $f : I \to \mathbb{R}$ se dice *monótona creciente* (o simplemente creciente) si para todo par $x_0, x_1 \in I$ con $x_0 \leq x_1$ se tiene que $f(x_0) \leq f(x_1)$. Además se dice que f es *estrictamente creciente* si para todo par $x_0, x_1 \in I$ con $x_0 < x_1$ se tiene que $f(x_0) < f(x_1)$. De forma análoga, se define una función *monótona decreciente* y *estrictamente decreciente*.

   a) Deducir que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente, entonces es monótona creciente.

   b) Para los gráficos mostrados en el ejercicio 8, determinar cuáles son monótonas crecientes o monótonas decrecientes.
   ¿Observa alguna relación entre la monotonía y la inyectividad?

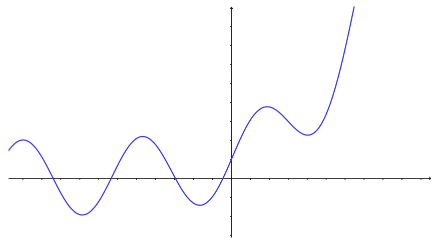
12. (*)

   a) Graficar en un mismo par de ejes la funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde $f(x) = x^2 - 3$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por

   a) $g(x) = f(x) + 5$ *b*) $g(x) = f(x+3)$ *c*) $g(x) = |f(x)|$

   d) $g(x) = 2f(x)$ *e*) $g(x) = f(2x)$ *f*) $g(x) = \dfrac{f(2x)}{2}$

   b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuyo gráfico es el siguiente:



   Bosquejar el gráfico de g para las funciones:

   a) $g(x) = f(x) + c$ *b*) $g(x) = f(x+c)$ *c*) $g(x) = f(|x|)$

   d) $g(x) = cf(x)$ *e*) $g(x) = f(cx)$

   f) $g(x) = |f(x)|$ *g*) $g(x) = \max(f(x), f(-x))$

13. Sean A, B conjuntos no vacíos. Determinar la inyectividad y sobreyectividad de la función f en cada caso.

   a) Si $A \subset B$. sea $f : A \to B$ definida por $f(x) = x$.

   b) $f : A \times B \to A$ definida por $f((a,b)) = a$.

   c) Dado $b \in B$, sea $f : A \to A \times B$ dada por $f(a) = (a,b)$.

   d) $f : A \times B \to B \times A$ definida por $f((a,b)) = (b,a)$

14. Determinar cuáles de las siguientes funciones $f : A \to A$ son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

   a) $A = \mathbb{N}, f(x) = x + 5$ *b*) $A = \mathbb{Z}, f(x) = x + 5$ *c*) $A = \mathbb{R}, f(x) = x + 5$

   d) $A = \mathbb{Z}, f(x) = 2x$ *e*) $A = \mathbb{Q}, f(x) = 2x$ *f*) $A = \mathbb{R}, f(x) = 2x$

   g) $A = \mathbb{N}, f(x) = x^2$ *h*) $A = \mathbb{Z}, f(x) = x^2$ *i*) $A = \mathbb{R}, f(x) = x^2$

1.3. Aplicaciones

1. (*) La tarifa actual del taxi en Montevideo es de:

   - Bajada de bandera con 100 metros: $53,05
   - Ficha cada 100 metros: $3,08

   a) Llamemos $P(x)$ al precio por recorrer x metros. Graficar la función P.

   b) Estime el costo de ir desde la explanada de la Universidad hasta la Facultad de Ingeniería.

   c) Si por viajar en la noche el conductor nos cobra un 20 % de recargo, ¿Cómo cambia el bosquejo de la función P?

2. (*) Un grupo de amigos se van a mudar juntos y evalúan sobre qué servicio de UTE contratar. Los que están a consideración son los siguientes:

   - *Tarifa residencial simple*

     Para los servicios con modalidad de consumo residencial cuya potencia contratada sea menor o igual a 40 kW

Cargo por consumo de energía	
1 kWh a 100kWh mensuales	$ / kWh 6.483
101 kWh a 600kWh mensuales	$ / kWh 8.126
601 kWh en adelante	$ / kWh 10.132
Cargo por potencia contratada	$ / kW 78.9
Cargo fijo mensual	$ 285.0

   - *Tarifa residencial doble horario*

     Para los servicios conectados en los niveles de tensión 230 V y 400 V con modalidad de consumo Residencial cuya potencia contratada sea igual o mayor que 3,5 kW y menor o igual que 40 kW, con carácter opcional.

     En este sistema se hace diferencia en el consumo en dos tipos de horarios, horario punta y las horas fuera del horario punta. El horario punta debe elegirse como 4 horas consecutivas en el rango de 17:00 a 23:00.

Cargo por consumo de energía	
Lunes a viernes - Horario punta	$ / kWh 11.032
Resto	$ / kWh 6.402
Cargo por potencia contratada	$ / kW 78.9
Cargo fijo mensual	$ 459.9

   Datos Pliego Tarifado UTE 2024

Asumiendo que la potencia contratada será de 30 kW, y que en caso de contratar doble horario un tercio del consumo es en el horario punta.

a) Bosqueje las gráficas de costo en función de consumo para ambos servicios.

b) Determine cuál servicio es más conveniente en función del consumo.

3. Una fábrica guarda arena en unos cajones de 30 cm de altura y base cuadrada. La densidad de la arena es de 1600kg/m^3 estando seca.

   Determine la masa de arena seca que tiene un cajón en función del largo de su lado de la base.

   Se decide fabricar pesas esféricas, rellenas de arena humeda. La densidad de la arena humeda es 1860kg/m^3. Determinar la masa de las pesas en función del radio. ¿Cuál es la medida de una pesa de 10Kg?

4. **Dilatación térmica**

   La dilatación lineal es un fenomeno que le ocurre a ciertos materiales al estar expuestos a un cambio de temperatura (por ejemplo rieles de tren, tendidos electricos, etc). En general se puede pensar este fenomeno en objetos que son mucho mas largos que anchos

   En este caso el largo en función de la temperatura se puede modelar con la función $I(T) = I_0(1 + \alpha(T - T_0))$, donde T_0, I_0 y α son parámetros.

   a) Mostrar que si se sabe el largo a la temperatura T_0 entonces se puede determinar I_0.

   b) Mostrar que si se sabe el largo en dos temperaturas diferentes, entonces se puede determinar α. Este valor depende del material y se denomina coeficiente de dilatación lineal.

   c) Calcular $I(T)$ para una barra de cobre que a 0° mide $1m$ y se expande $0{,}001m$ en 60°.

5. **Error en instrumentos de medida**

   Se decide consutruir un cubo de 1m^3. Si para constuir los lados se usa una regla de precisión 0,01m. ¿Cuanto es el mayor error posible entre el volumen del cubo real y el deseado?

   Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función tal que $f(x)$ es el volumen de un cubo de lado x expresado en m^3.

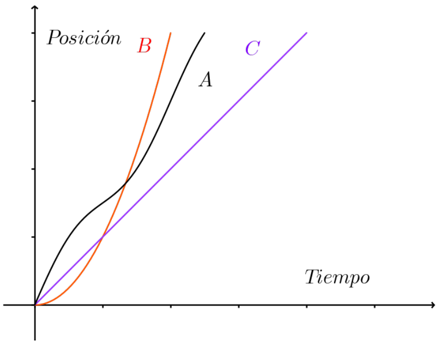
   Calcule la función g el máximo error posible en el volumen si se usa regla como en la parte anterior. Cual es el comportamiento del error (función g) en funcion del largo x ¿Creece, decrece, es errático?

6. Un avión comercial viaja a una velocidad de 900km/h sin cambiar su dirección a una altura de unos 11km.

En la dirección en la que se despaza el avión hay un radar (que esta al nivel del mar). En el instante $t = 0$ el avión esta a 500 km del radar, el radar tiene un alcance de 350 km.

Determinar el dominio y la expresión de la función distancia del avión al radar, desde que entra en su rango de alcance hasta que sale.

7. Tres personas (A, B y C) participan en un carrera de 100 metros. A partir de las gráficas de sus posiciones en función del tiempo deducir el orden en que llegaron a la meta. ¿Estuvieron durante toda la carrera en el mismo orden?

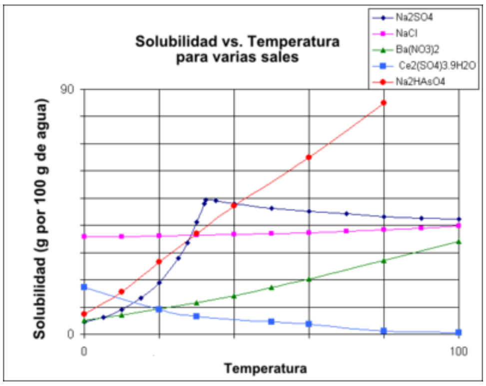


8. **Solubilidad**

La solubilidad es la capacidad de una sustancia (soluto) de disolverse en otra (solvente).

La solubilidad de un soluto no solo depende del solvente sino también de otras condiciones, por ejemplo la temperatura.

En la siguientes gráficas se muestra la solubilidad de distintas sales en agua, en función de la temperatura



Determinar para qué sales la solubilidad disminuye con la temperatura.

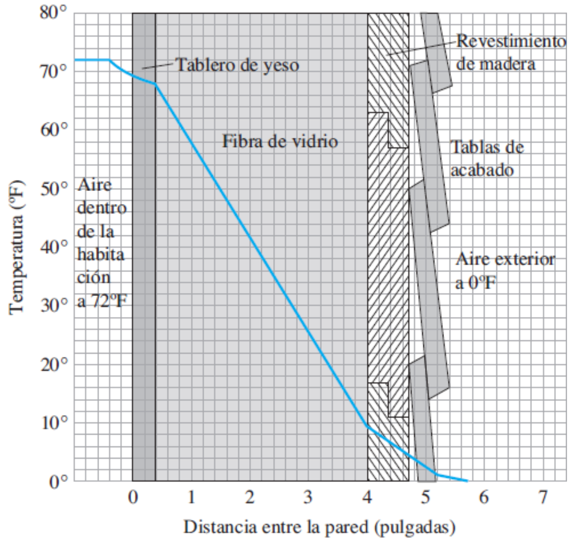
Determinar para qué sales la solubilidad aumenta con la temperatura.

¿Alguna de las sales no cumple ninguna de las condiciones anteriores?

9. **Aislantes**

   Mida las pendientes de la siguiente figura para estudiar el gradiente de temperatura (es decir, cuántos grados Fahrenheit disminuye la temperatura por pulgada) para estos aislantes (puede asumir que la pendiente es constante en cada material):

   a) Tablero de yeso *b*) Fibra de vidrio *c*) Revestimiento de madera



   De acuerdo con la figura, *d*) ¿Cuál es el mejor aislante? ¿Cuál es el peor? Explique.

10. Las ondas cuadradas se usan en distintos pulsos eléctricos, que tienen como aplicación, por ejemplo, el procesamiento de señales.

    Hablamos de funciones $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que solo toman 2 valores y que son periódicas (es decir existe $k > 0$, tal que $u(x) = u(x + k)$ para todo $x \in \mathbb{R}$).

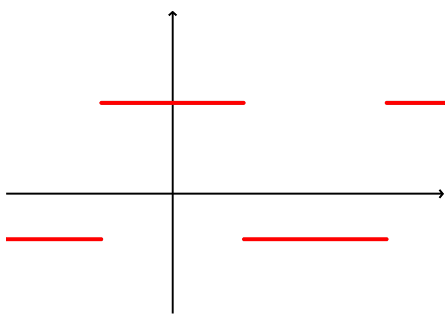


Figura 1.1: gráfico de una onda cuadrada

    Componiendo funciones como $f(x) = \lambda x$, $g(x) = \cos(x)$ y $h(x) = \lfloor x \rfloor$ (función piso, que devuelve el mayor natural, menor igual a x) construya una función de onda cuadrada de periodo 1 y cuya imagen sea 0 y 5.

1.4. Complementarios

1. Dé ejemplos de conjuntos no vacíos A, B y C tales que

   a) $C \subset A \cup B$ y $A \cap B \not\subset C$
   b) $A \not\subset B \cup C$, $B \not\subset A \cup C$ y $C \subset A \cup B$
   c) $A \cap B \subset C, B \cap C \subset A, A \cap C \subset B$ y $A = B \cup C$

2. Dado P un polinomio, definimos el conjunto de raíces de P como $A_P = \{x \in \mathbb{R} : P(x) = 0\}$

   a) ¿Existe P tal que $A_P = \emptyset$?
   b) Sean P y Q dos polinomios, probar que

   $$a) \quad A_P \cup A_Q = A_{PQ} \qquad b) \quad A_P \cap A_Q = A_{P^2+Q^2}$$

   c) Explicar por qué no es cierto que $A_P \cap A_Q = A_{P+Q}$. ¿Se da alguna inclusión entre estos conjuntos?

3. Determinar cuáles de las siguietes asignaciones es una función, y en caso de serlo, indicar si es inyectiva.

   a) A cada ciudadano de Uruguay asociarle su número de celular.
   b) A cada ciudadano de Uruguay asignarle su cédula.
   c) A cada estudiante de la FING, asociarle el usuario de EVA.
   d) A cada estudiante de la FING, asociarle su año de ingreso a facultad.
   e) En una tienda de ropa, asignarle a cada artículo su precio.

4. Dados dos conjuntos no vacíos A, B se define el conjunto potencia A^B como las funciones que tienen dominio B y codominio A, es decir $A^B = \{f : B \to A\}$.

   Para los conjuntos $A = \{1, 2\}$ y $B = \{a, e, i\}$, determinar los conjuntos A^B, B^A y calcular la cantidad de elementos de los mismos.

5. Una función $f : A \to B$ se dice constante si existe $b_0 \in B$ tal que $f(x) = b_0$ para todo $x \in A$.

   Sean $f : A \to B$ y $g : B \to A$ funciones. Probar que si f es constante entonces $f \circ g$ es constante. Repetir para $g \circ f$.

6. **Gases ideales**

   La ley de los gases ideales, es la ecuación de estado de un gas bajo ciertas condiciones.

   La relación entre presión, volumen, temperatura y cantidad del gas (que está medida en moles) es

   $$R = \frac{PV}{nT}$$

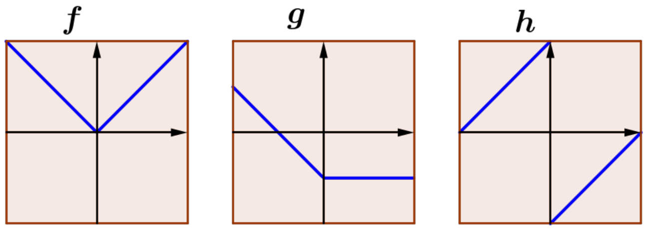
donde R es una constante universal, P es la presión absoluta, V es el volumen, T es la temperatura (medida en Kelvin) y n la cantidad de moles del gas.

Bosquejar la función $P(T)$, es decir, cómo varía la presión cuando cambia la temperatura (dejando los otros parametros constantes). Repetir para $P(V)$.

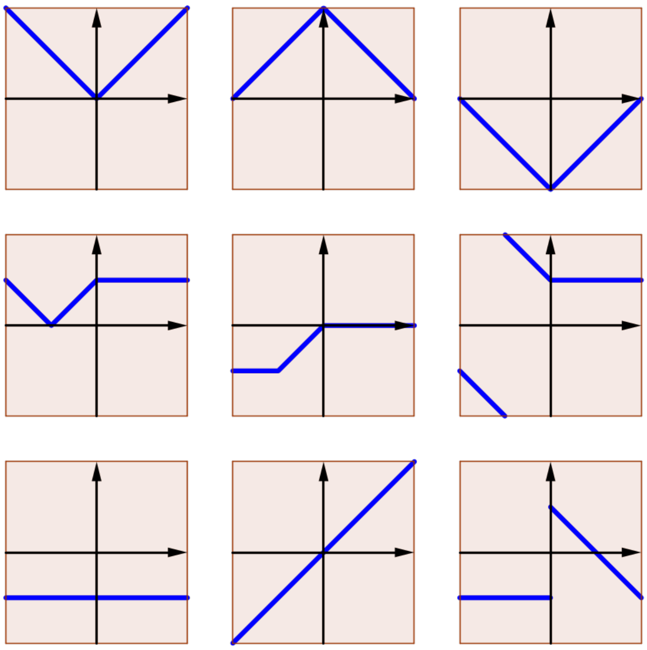
7. *a*) Dé ejemplos de funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ biyectivas y no monótonas.

   b) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ biyectiva y monótona creciente. Probar que f^{-1} es monótona creciente.

8. Sean f, g, h funciones con los siguientes gráficos:

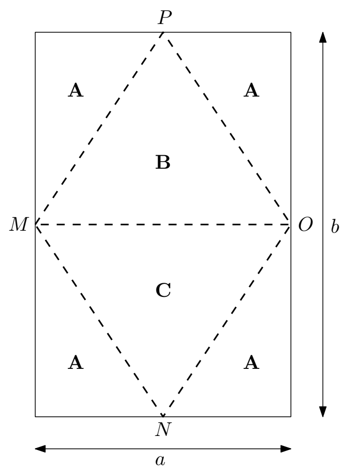


En la siguiente figura se muestran las 9 posibles composiciones de estas funciones. Determinar a cuál composición le corresponde cada gráfico.



9. Examen, diciembre 2016, primeras partes del segundo ejercicio de desarrollo.

   Se desea excavar un estanque rectangular en el que se criarán 3 variedades de peces: **A**, **B** y **C**. El estanque será dividido en 6 regiones como indica la figura: las cuatro regiones triangulares externas para la especie **A**, la región triangular interna superior para la especie **B**, y la región triangular interna inferior para la especie **C**:



   (En la figura, se supone que M, N, O y P son puntos medios de los respectivos lados).

   La separación entre las 6 regiones se efectúa mediante tabiques, indicados por líneas discontinuas en la figura.

   a) Llamemos L a la suma de las longitudes de todos los tabiques. Expresar L en función de a y b.

   b) Si se cuenta con 100 metros de tabique para construir el estanque, expresar b^2 en función de a.

   Supongamos que el rendimiento de cada especie es proporcional a la superficie del estanque. Se sabe que el rendimiento por metro cuadrado de la especie **B** es 3/4 del rendimiento de la especie **A**, y que el de la especie **C** es 2/3 del de la especie **B**.

   c) Expresar el rendimiento $r = r(a)$ del estanque en función de a y de s, donde s es el rendimiento de la especie **A** por metro cuadrado.