

# Señales Aleatorias y Modulación

## Segundo Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

19 de noviembre de 2022

### Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- En los problemas prácticos pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

### Problema 1

Usted trabaja para una empresa de telecomunicaciones que deberá instalar una radio FM en el marco del mundial de fútbol Qatar 2022. El objetivo es que la cobertura de la radio alcance los 8 estadios donde se disputará el torneo. Está previsto instalar el transmisor en alguno de los rascacielos de la bahía de Doha. Hay 7 de los 8 estadios ubicados en un radio menor a 20km de la bahía de Doha, mientras que el Al Khor Stadium está en la Municipalidad de Jor, unos 50km al norte de la bahía de Doha.

La CRA<sup>1</sup>, autoridad reguladora de las comunicaciones en Qatar, le asigna como portadora la frecuencia  $f_c = 100$  MHz, usando la máxima desviación en frecuencia habitual de 75 kHz. El ancho de banda a utilizar para el mensaje de audio será  $W = 10$  kHz, el cual se modela como un proceso WSS con potencia 0.5. En el receptor se introduce ruido AWGN con DEP  $S_w(f) = N_0/2$ , siendo  $N_0 = 5 \times 10^{-13}$  W/Hz.

- (a) Estimar el ancho de banda de transmisión para la radio FM a desplegar.

El transmisor principal de la emisora FM está previsto que brinde cobertura a los 7 estadios más cercanos, utilizando una potencia de transmisión de 10 kW.

- (b) Verificar que la radio puede operar a 20 km de cobertura con una SNR en detección mayor a 30 dB.

Para alcanzar el restante estadio se genera una discusión en el equipo técnico de la empresa. Por un lado hay quienes prefieren instalar un repetidor, mientras que otros se inclinan por hacer un enlace FM del tipo STL<sup>2</sup> directo al otro estadio, y luego otro transmisor FM local que solamente cubra ese estadio.

- (c) Mostrar que la solución con un repetidor en el punto óptimo no es viable. Asumir que el repetidor recupera la atenuación del tramo previo de canal e introduce ruido AWGN análogo al del receptor.
- (d) Mostrar que la solución del enlace STL sí es viable, asumiendo que opera con los mismos parámetros que el transmisor principal pero con portadora  $f_c = 350$  MHz y considerando una ganancia adicional de 20 dB debido al uso de antenas direccionales. Calcular la SNR post detección del enlace STL.

---

<sup>1</sup>CRA: Communications Regulatory Authority, State of Qatar.

<sup>2</sup>STL: Studio transmitter link, denominación habitual para enlaces entre los estudios de radio/TV y el transmisor.

## Problema 2

Un modulador de ley cuadrática genera una señal AM mediante la utilización de componentes no lineales, como por ejemplo diodos. La implementación más simple se puede ver en la Figura 1.

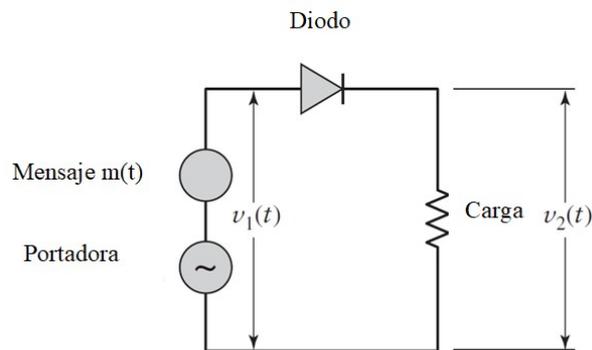


Figura 1: Implementación simple de un modulador de ley cuadrática.

Ignorando los términos de mayor orden, la salida del modulador se puede representar como:

$$v_2(t) = a_1 v_1(t) + a_2 v_1^2(t)$$

donde  $v_1(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) + m(t)$  es la señal de entrada al circuito y  $a_1$  y  $a_2$  son constantes.

- Escribir la expresión de  $v_2(t)$  y bosquejar su espectro, asumiendo que el mensaje es de banda limitada  $W$ . Explicitar qué parte corresponde a la señal AM a transmitir y qué parte se considera distorsión.
- Para obtener la señal AM deseada se requiere agregar un filtro pasabanda a la salida del modulador. Determinar la frecuencia central y el mínimo ancho de banda de dicho filtro. Demostrar que para evitar que haya distorsión se debe cumplir que la frecuencia de la portadora sea  $f_c > 3W$ .
- Realizar un diagrama de bloques del receptor. ¿Qué condición deben cumplir  $a_1$  y  $a_2$  para que no haya sobremodulación?
- Determinar la relación señal a ruido en detección correspondiente al receptor elegido en la parte anterior. Asumir que este introduce ruido blanco gaussiano aditivo de densidad espectral de potencia  $N_0/2$ .

## Problema 3

Un receptor de radio AM superheterodino debe poder sintonizar cualquiera de las 106 posibles estaciones en el rango de 540kHz a 1600kHz, donde el ancho de banda de cada estación es 10kHz. La frecuencia intermedia utilizada por el receptor será 250kHz.

- Dibujar el diagrama de un receptor superheterodino de AM.
- Indicar el rango de frecuencias que debe cubrir el oscilador local que tenga la menor variación relativa posible.
- Explicar qué es la frecuencia imagen y qué impacto tiene en el diseño del receptor.
- Indicar cuál es el mayor ancho de banda posible del filtro pasabanda ubicado a la entrada del receptor.

# Solución

## Problema 1

(a)  $B_T = 2(D + 2)W$  siendo  $D = 75/10$  y  $W = 10$  kHz. De esta forma queda  $B_T = 190$  kHz.

(b) En primer lugar debemos verificar que se cumple el umbral de FM a dicha distancia.

$SNR_{pre}^{FM} = \frac{A_c^2}{2N_0B_TL}$  siendo  $L$  la atenuación a 20 km y para una  $f_c$  de 100 MHz.

La potencia de transmisión en FM está dada por  $A_c^2/2$  por lo que este término es 10 kW por letra. Luego  $B_T$  fue calculado en la parte anterior, mientras que  $N_0$  también es dato. Solamente resta calcular la atenuación para el aire  $L = (4\pi df/c)$ , para 20 km y 100 MHz, lo que da  $L = 98.46$  dB.

De esta forma la  $SNR_{pre}^{FM} = 11.76$  dB = 15, que es mayor a 10, por lo que se cumple la condición de umbral. Una vez verificado el umbral, debemos verificar que se alcance la SNR post detección de 30 dB.

$SNR_{post}^{FM} = \frac{3D^2PA_c^2}{2N_0WL}$  siendo  $L$  la atenuación a 20 km y para una  $f_c$  de 100 MHz. El resto de los parámetros para el cálculo son  $P = 0.5$ ,  $D = 7.5$ ,  $W = 10$  kHz y los utilizados previamente para el cálculo de la  $SNR_{pre}^{FM}$ . Sustituyendo se puede ver que  $SNR_{post}^{FM} = 43.8$  dB, lo cual está por encima de los 30 dB.

(c) La ubicación óptima del repetidor para maximizar la SNR pre detección es el punto medio, es decir que en este caso estaría ubicado a los 25 km, siendo 50 km la distancia a la cual se pretende llegar. Al igual que hicimos antes, debemos verificar que se cumple con el umbral de FM, analizando la  $SNR_{pre}^{FM}$ . En este caso tendremos dos componentes de ruido en la ecuación, una introducida en el repetidor y la otra en el receptor. De esta forma nos queda:

$SNR_{pre}^{FM} = \frac{A_c^2}{2N_0B_T(L+L)} = \frac{A_c^2}{2N_0B_T2L}$  siendo  $L$  la atenuación del aire a 25 km y para una  $f_c$  de 100 MHz.

Usando nuevamente la ecuación de Friis  $L = (4\pi df/c)$ , se tiene que para 25 km y 100 MHz,  $L = 100.4$  dB.

Los parámetros del transmisor se mantienen, por lo que  $A_c^2$  es 10 W y  $B_T = 190$  kHz. Sustituyendo todos los datos en la expresión resulta que  $SNR_{pre}^{FM} = 6.81$  dB = 4.8, por lo que estamos por debajo del umbral de FM y por lo tanto esta solución no es viable.

(d) El procedimiento es el mismo que en las partes anteriores, primero verificamos que se cumple el umbral de FM ( $SNR_{pre}^{FM} \geq 10$ ) y si esto ocurre luego calculamos la  $SNR_{post}^{FM}$  resultante. Lo único que cambia en este caso es que debemos considerar además de la atenuación del aire, la ganancia que introducen las antenas direccionales.

Ahora  $SNR_{pre}^{FM} = \frac{A_c^2G}{2N_0B_TL}$  siendo  $L$  la atenuación a 50 km y para una  $f_c$  de 350 MHz y  $G$  la ganancia debido a las antenas direccionales. Usando nuevamente la ecuación de Friis  $L = (4\pi df/c)$  para 50 km y 350 MHz queda  $L = 117.3$  dB, mientras que  $G = 20$  dB por letra.

Sustituyendo el resto de los valores se tiene  $SNR_{pre}^{FM} = 12.92$  dB = 19.6, que es mayor a 10, por lo que se cumple la condición de umbral. Ahora sí podemos calcular SNR post detección con la ecuación

$SNR_{post}^{FM} = \frac{3D^2PA_c^2G}{2N_0WL}$  siendo  $L$  nuevamente la atenuación a 50 km y para una  $f_c$  de 350 MHz, y  $G$  la ganancia debido al uso de antenas direccionales. El resto de los parámetros para el cálculo son los mismos de las partes anteriores, que sustituyendo en la ecuación da  $SNR_{post}^{FM} = 44.97$  dB, lo cual es una muy buena calidad para el enlace STL.

## Problema 2

(a) La señal a la salida del modulador resulta:

$$\begin{aligned} v_2(t) &= a_1v_1(t) + a_2v_1^2(t) \\ &= a_1(A_c \cos(2\pi f_c t) + m(t)) + a_2(A_c \cos(2\pi f_c t) + m(t))^2 \\ &= [a_1 + 2a_2m(t)]A_c \cos(2\pi f_c t) + [a_1m(t) + a_2A_c^2 \cos^2(2\pi f_c t) + a_2m^2(t)] \end{aligned}$$

donde el término  $s(t) = a_1A_c \left[1 + \frac{2a_2}{a_1}m(t)\right] \cos(2\pi f_c t)$  corresponde a la señal AM a transmitir y el término  $i(t) = [a_1m(t) + a_2A_c^2 \cos^2(2\pi f_c t) + a_2m^2(t)]$  a la interferencia generada por el modulador. En la figura ?? se puede observar un bosquejo del espectro de  $v_2(t)$ .

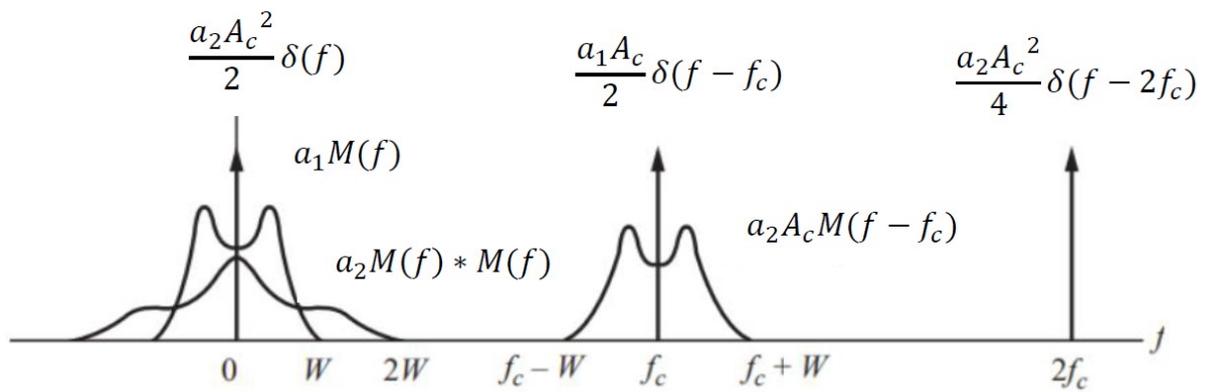


Figura 2: Bosquejo del espectro

(b) A partir del bosquejo anterior determinamos que la frecuencia central del filtro pasabanda debe ser  $f_c$  y su ancho de banda mínimo  $2W$ . Además, se puede observar que para que no haya superposición en el espectro se debe cumplir  $2W < f_c - W$ , es decir  $f_c > 3W$ .

(c) Ver teórico. Para que no haya sobremodulación se debe cumplir que  $k_a = \frac{2a_2}{a_1} < 1$ .

(d) Ver teórico.