**Universidad de la República** **Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables**
**Facultad de Ingeniería - IMERL** **Febrero 2023**

Examen – 18 Febrero de 2023

| Nro de Examen | Cédula | Apellido y nombre |
|---|---|---|
| | | |

## Respuestas Ejercicios Multiple Opción

| E. 1 | E. 2 | E. 3 | E. 4 | E. 5 | E. 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| C | B | A | D | A | A |

## Importante

- El examen dura 3h.
- En cada ejercicio se indica la cantidad de puntos que le corresponden. Tienen 6 ejercicios de múltiple opción de 10 puntos cada uno y 2 ejercicios de desarrollo sobre 40 puntos. El examen es de 100 puntos en total y se salva con 60 puntos.
- Solo serán válidas las respuestas indicadas en el cuadro de respuestas para los ejercicios de múltiple opción y en cada ejercicio hay una sola opción correcta.

### 1. Múltiple Opción

Puntajes: 10 puntos si la respuesta es correcta, $-2$ punto si la respuesta es incorrecta 0 punto por no contestar. Indique sus respuestas en los casilleros correspondientes.

(1) Dada la integral $\int_2^{+\infty} \frac{1}{xln^\alpha(x)}dx$. De los valores de $\alpha$ para los cuales converge, seleccione el que hace que la integral tome el valor $\frac{1}{ln(2)}$

A. $\alpha = 1$.
B. $\alpha = e$.
C. $\alpha = 2$.
D. $\alpha = -1$.

La opción correcta es la (C):

Haciendo el cambio de variable $u = ln(x)$, $du = \frac{1}{x}dx$, nos queda:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{xln^\alpha(x)}dx = \int_{ln(2)}^{\infty} \frac{1}{u^\alpha}du,$$

que es equivalente por el criterio serie-integral a la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha},$$

que a su vez, sabemos que converge si y sólo si $\alpha > 1$. Para esos $\alpha$, la integral la podemos calcular como

$$\int_{ln(2)}^{\infty} \frac{1}{u^\alpha}du = \int_{ln(2)}^{\infty} u^{-\alpha}du = \left.\frac{u^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_{ln(2)}^{\infty} = \left.\frac{1}{(-\alpha+1)u^{\alpha-1}}\right|_{ln(2)}^{\infty} = \frac{1}{(\alpha-1)ln^{\alpha-1}(2)},$$

y es claro que para que eso sea igual a $\frac{1}{ln(2)}$, debe ser $\alpha = 2$, por lo que la respuesta correcta es la C.

(2) Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Entonces

A. $f$ no es continua en $(0,0)$ pero es diferenciable en $(0,0)$.

B. $f$ es continua en $(0,0)$, diferenciable en $(0,0)$ pero no es de clase $C^1$ en $(0,0)$.

C. $f$ es continua en $(0,0)$ pero no es diferenciable en $(0,0)$.

D. $f$ es de clase $C^1$ en $(0,0)$.

La opción correcta es la (B):

- La función es continua en $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2\frac{x^2}{x^2+y^4} = 0.$$

Porque la función $y^2$ tiene límite 0 cuando $y$ tiende a 0 y la función $\dfrac{x^2}{x^2+y^4}$ está acotada entre 0 y 1.

- La función es diferenciable en $(0,0)$. Para ve esto primero calculemos las derivadas parciales de $f$ en $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0.$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0.$$

Para probar que es diferenciable en el origen tenemos que probar que el siguiente límite es cero.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\| (x,y) \|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^4)}$$

Usemos coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

$$\frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^4)} = \frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^3(\cos^2\theta+r^2\sin^4\theta)} = r\frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta+r^2\sin^4\theta}.$$

Observar que $\dfrac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta+r^2\sin^4\theta} \geq 0$. Por otro lado

$$\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta \geq \cos^2\theta \Rightarrow \frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta+r^2\sin^4\theta} \leq \frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \sin^2\theta \leq 1.$$

Entonces

$$\lim_{r\to 0}\frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^3(\cos^2\theta+r^2\sin^4\theta)} = 0, \ \forall\, \theta \in [0,2\pi].$$

Esto prueba que el limite que queríamos hallar es 0.

- No es de clase $C^1$. Vemos que la derivada parcial respecto a $x$ no es continua en $(0,0)$.

Es fácil ver que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^6}{\left(x^2+y^4\right)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Aproximémonos al origen por la parábola $y^2 = x$. Entonces

$$\lim_{y\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(y^2,y) = \lim_{y\to 0}\frac{2y^8}{\left(y^4+y^4\right)^2} = \lim_{y\to 0}\frac{2y^8}{4y^8} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

(3) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

(a) $f(0,y) = y^2$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

(b) $f(x,1-x) = ax+1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$.

(c) $f$ es diferenciable en $(0,1)$.

Entonces

A. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = a+2$ y $\frac{\partial f}{\partial(-1,1)}(0,1) = -a$.

B. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = a+3$ y $\frac{\partial f}{\partial(-1,1)}(0,1) = -a$.

C. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = a+2$ y $\frac{\partial f}{\partial(-1,1)}(0,1) = 2a$.

D. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = a-2$ y $\frac{\partial f}{\partial(-1,1)}(0,1) = 2a$.

<u>La opción correcta es la (A):</u>

Usando la definición de derivada direccional en un punto tenemos
$\frac{\partial f}{\partial(-1,1)}(0,1) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(-t,1+t)-f(0,1)}{t} = \dfrac{a(-t)+1-1}{t} = -a$
Por otro lado, usando la hipótesis de difenciabilidad de la función en el mismo punto tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial(-1,1)}(0,1) = \nabla f(0,1)\cdot(-1,1) = -a$$

$$(\frac{\partial f}{\partial x}(0,1), \frac{\partial f}{\partial y}(0,1))\cdot(-1,1) = -a$$

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = -a$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) + a$$

Finalmente calculamos el valor de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1)$ usando la definición

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,1+t)-f(0,1)}{t} = \frac{(1+t)^2-1}{t} = 2$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 2+a$$

(4) Consideremos la siguiente ecuación diferencial (E) dependiendo de una función $r(x)$

$$y'' + 4y' + 4y = r(x)$$

y las siguientes afirmaciones

(I) Si $e^{-2x} + x^2$ es solución de (E) entonces $r(x) = 4x^2 + 8x + 2$.

(II) Si $r(x) = x^2$ entonces $y(x) = e^{-2x} + 3xe^{-2x} + x^2$ es la única solución de (E) que verifica que $y(0) = y'(0) = 1$.

(III) Si $r(x) = 0$ entonces todas las soluciones son de la forma $y(x) = ae^{-2x} + be^{-2x}x$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

Entonces

A. Todas las afirmaciones son verdaderas.

B. Solamente (III) es verdadera.

C. Solamente (I) es verdadera.

D. Solamente (I) y (III) son verdaderas.

<u>La opción correcta es la (D):</u>

Veamos las afirmaciones en orden:

(a) Si $y(x) = e^{-2x} + x^2$ es solución, debe verificar la ecuación diferencial dada, $y'' + 4y' + 4y = r(x)$. Para encontrar $r(x)$, sustituimos $y(x)$ en la ecuación y operamos. Para eso, notemos que

$$y'(x) = -2e^{-2x} + 2x, \quad y''(x) = 4e^{-2x} + 2.$$

Luego,

$$y'' + 4y' + 4y = 4e^{-2x} + 2 + 4(-2e^{-2x} + 2x) + 4(e^{-2x} + x^2) = 4x^2 + 8x + 2.$$

(b) Si $r(x) = x^2$, la ecuación diferencial resulta

$$y'' + 4y' + 4y = x^2.$$

Verifiquemos primero si $y(x) = e^{-2x} + 3xe^{-2x} + x^2$ es solución:

$$y'(x) = e^{-2x}(1 - 6x) + 2x, \quad y''(x) = 2e^{-2x}(-4 + e^{2x} + 6x).$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial, vemos que la solución propuesta no la verifica.

(c) Ahora veamos qué ocurre si $r(x) = 0$:
Debemos resolver la ecuación homogénea

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Planteamos soluciones proporcionales a $e^{\lambda x}$, por lo que investigamos una ecuación de la forma

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + 4\lambda e^{\lambda x} + 4e^{\lambda x} = \left(\lambda^2 + 4\lambda + 4\right) e^{\lambda x} = 0.$$

Luego, el polinomio característico es

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2,$$

que tiene raíz doble $\lambda = -2$.
Por lo tanto, al tener un polinomio característico cuya raíz tiene multiplicidad dos, las soluciones de la ecuación diferencial son de la forma:

$$y(x) = ae^{-2x} + be^{-2x}x, \quad \text{con} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

(5) Considere las siguientes afirmaciones

(I) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ es un conjunto abierto.

(II) La intersección arbitraria de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^2$ es abierta.

(III) Sea $X$ un conjunto no vacío de $\mathbb{R}^2$. El conjunto $X$ es cerrado si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ tal que $x_n \to x$ se tiene que $x \in X$.

Entonces

A. Solamente (I) y (III) son verdaderas.
B. Solamente (III) es verdadera.
C. Solamente (I) es verdadera.
D. Todas las afirmaciones son verdaderas

La opción correcta es la (A): Se remite al estudiante a las notas del curso.

(6) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = xe^{-y^2} + ye^{-x^2}$. Indicar para cuál de los siguientes vectores $v$ se tiene que $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0, 1) = 0$

A. $v = (-e, 1)$.
B. $v = (e, e)$.
C. $v = (1, -e)$.
D. $v = (1, 0)$.

La opción correcta es la (A):

Notemos que la función $f$ es diferenciable, por lo que
$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,1) = \nabla f(0,1) \cdot v.$$
Debemos encontrar $v$ para que el producto interno sea 0.

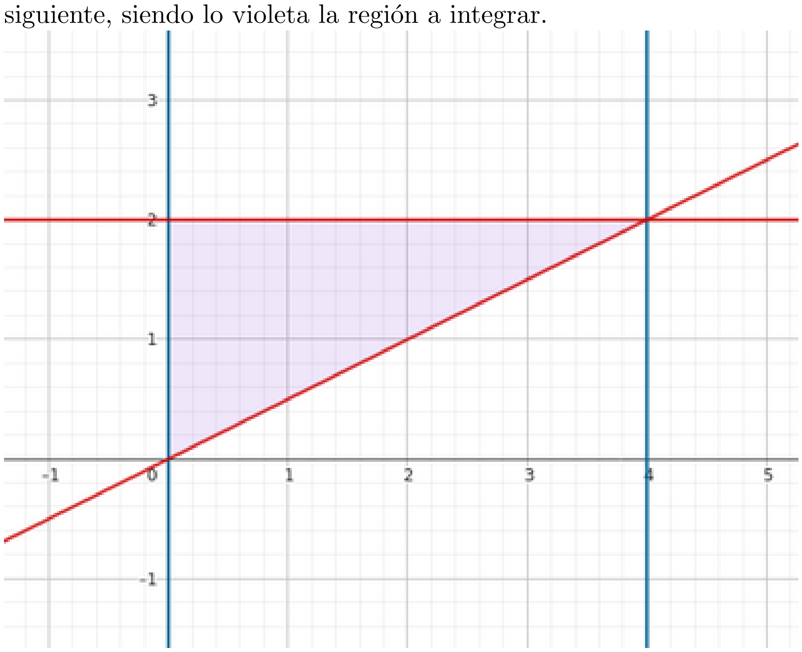
Operando:
$$\nabla f(x,y) = \left(e^{-y^2} - 2xye^{-x^2}, -2xye^{-y^2} + e^{-x^2}\right), \implies \nabla f(0,1) = (e^{-1}, 1).$$
El producto interno es entonces
$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,1) = \nabla f(0,1) \cdot v = (e^{-1}, 1) \cdot (v_1, v_2) = e^{-1}v_1 + v_2 = 0,$$
y esa igualdad se verifica si $v_1 = -ev_2$, así que $v = (-e, 1)$.

## 2. Desarrollo

(1) **(20 puntos)** Considere la siguiente integral doble
$$\int_0^4 \int_{x/2}^2 e^{y^2} dydx$$
1.1 Dibujar la región de integración en el plano. **(4 puntos)**
1.2 Platear una integral doble que represente a la anterior integral cambiando el orden de integración. **(8 puntos)**
1.3 Encontrar el valor de la integral del item anterior. **(8 puntos)**

**Solución:**

**1.1** Los extremos de integración nos indican que $0 \leq x \leq 4$ y $\frac{x}{2} \leq y \leq 2$, con lo que el dibujo sería el siguiente, siendo lo violeta la región a integrar.




**1.2** Guiándonos por el dibujo, la región es la misma que $0 \leq y \leq 2$ y $0 \leq x \leq 2y$, ya que la diagonal que marca el borde es $y = \frac{x}{2}$, que es lo mismo que $x = 2y$. Por lo que la integral expresada con el otro orden de integración es:
$$\int_0^2 \int_0^{2y} e^{y^2} dxdy.$$

**1.3** Usando que $e^{y^2}$ no depende de $x$ para sacarlo para afuera de la primera integral, y luego usando el cambio de variable $u = y^2$, $du = 2ydy$, tenemos

$$\int_0^2 \int_0^{2y} e^{y^2} dxdy = \int_0^2 e^{y^2} \left( \int_0^{2y} 1dx \right) dy = \int_0^2 e^{y^2} 2ydy = \int_0^4 e^u du = e^u \Big|_0^4 = e^4 - 1$$

(2) **(20 puntos)**

2.1 Dado los números complejos $z_1 = 1 - i$ y $z_2 = 2i$, expresar la forma binomial de $\frac{z_1^{204}}{z_2^{101}}$ **(8 puntos)**

2.2 Siendo $z = e^{i2\pi/5}$.

2.2.1 Comprobar que $z^4 = \bar{z}$. **(6 puntos)**

2.2.2 Simplificar lo más posible la expresión $z + z^4 + z^9 + z^{16}$ **(6 puntos)**

**Solución:**

2.1 Dados los números complejos $z_1 = 1 - i$ y $z_2 = 2i$, expresar la forma binomial de $z = \frac{z_1^{204}}{z_2^{101}}$.
Primero veamos la forma polar de estos complejos.
Es claro que $z_2 = 2e^{\frac{\pi}{2}i}$. Por otro lado $|z_1| = \sqrt{2}$, si $z_1 = \sqrt{2}\big(\cos\theta + i\sin\theta\big)$ entonces $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Por lo tanto

$$z_1 = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}.$$

$$z = \frac{z_1^{204}}{z_2^{101}} = \frac{\left(\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^{204}}{\left(2e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^{101}} = 2\frac{\left(e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^{204}}{\left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^{101}} = 2\frac{\left(e^{-\frac{\pi}{2}i}\right)^{102}}{\left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^{101}} = 2e^{-\frac{\pi}{2}i}\left(\frac{e^{-\frac{\pi}{2}i}}{e^{\frac{\pi}{2}i}}\right)^{101} = 2e^{-\frac{\pi}{2}i}\left(e^{-\pi i}\right)^{101} = 2i.$$

2.2.1 Siendo $z = e^{\frac{2}{5}\pi i}$. Comprobar que $\overline{z} = z^4$.

$$\overline{z} = e^{-\frac{2}{5}\pi i}$$

Por otro lado

$$z^4 = \left(e^{\frac{2}{5}\pi i}\right)^4 = e^{\frac{8}{5}\pi i}$$

Observar que los argumentos de los complejos coinciden. Sólo están representados en diferente sentido.

2.2.2 Simplificar lo más posible la expresión $z + z^4 + z^9 + z^{16}$.

$$z + z^4 + z^9 + z^{16} = z + \overline{z} + z^9 + z^{16} = 2\operatorname{Re}(z) + z\overline{z}^2 + \overline{z}^4 = 2\operatorname{Re}(z) + \big(z\overline{z}\big)\overline{z} + \left(e^{-\frac{2}{5}\pi i}\right)^4$$

$$= 2\operatorname{Re}(z) + e^{-\frac{2}{5}\pi i} + e^{-\frac{8}{5}\pi i} = 2\operatorname{Re}(z) + e^{-\frac{2}{5}\pi i} + e^{\frac{2}{5}\pi i} = 2\operatorname{Re}(z) + \overline{z} + z = 4\operatorname{Re}(z) = 4\cos(2/5\pi).$$