SOLUCIÓN - Segundo Parcial - MD1

Viernes 7 de julio de 2023

Versión 2

MO1	MO2	MO3	MO4	MO5
E	C	E	D	C

Múltiple Opción 1

Consideremos la relación binaria R en $A = \{0, 1, \dots, 10\}$ tal que $(a, b) \in R$ si y sólo si existe un número entero $n \geq 0$ tal que $b = na$. Indicar la opción correcta:
(A) R no es un orden parcial;
(B) R es un orden parcial pero no tiene mínimo;
(C) R es un orden parcial pero no tiene máximo;
(D) R es un orden parcial, tiene mínimo y máximo, y el tamaño máximo de una anticadena es 4;
(E) R es un orden parcial, tiene mínimo y máximo, y el tamaño máximo de una anticadena es 5.

Solución - Múltiple Opción 1

Probemos que R es una relación de orden parcial, es decir que es reflexiva, transitiva y antisimétrica. Si a es un elemento cualquiera de A entonces a es múltiplo de a, concretamente $a \times 1 = a$ y como 1 es natural, R es reflexiva. Probemos ahora que R es transitiva. Sean a, b y c tres elementos de A tales que aRb y bRc. Por definición de la relación R existen dos números naturales n_1 y n_2 tales que $a \times n_1 = b$ y $b \times n_2 = c$. Pero entonces $a \times (n_1 \times n_2) = b \times n_2 = c$, y como el producto de dos naturales es natural concluimos que aRc, y R es transitiva. Por último, si a y b son dos elementos de A tales que aRb y bRa, entonces existen dos números natuales n_1 y n_2 tales que $a \times n_1 = b$ y $b \times n_2 = a$. Pero entonces $a \times (n_1 \times n_2) = (a \times n_1) \times n_2 = b \times n_2 = a = a \times 1$. Entonces, $a \times (n_1 n_2 - 1) = 0$, y debemos tener que $a = 0$ o $n_1 n_2 = 1$. Si $a = 0$ entonces como $a \times n_1 = b$ tendríamos que $b = 0$, y en particular $a = b$. Si $a \neq 0$ entonces $n_1 n_2 = 1$, y la única manera en la que el producto de dos números naturales sea igual a 1 es que ambos números sean iguales a 1. Luego $n_1 = n_2 = 1$ y nuevamente tenemos que $a = b$. En ambos casos deducimos que $a = b$. Entonces, R es antisimétrica, y es un orden parcial. Veamos ahora que R tiene máximo y mínimo. Sea n un número natural cualquiera. Como $1 \times n = n$ entonces $1Rn$, y 1 es el mínimo de R. Como $n \times 0 = 0$ entonces $nR0$ para todo natural n, y 0 es el máximo de R.

Por último, notemos que el conjunto $\{6, 7, 8, 9, 10\}$ es una anticadena de tamaño 5, y que existe alguna partición de A en 5 cadenas, por ejemplo $\{1, 2, 4, 8, 0\}, \{3, 6\}, \{5, 10\}, \{7\}, \{9\}$. Por el Teorema de Dilworth se sigue que la anticadena de tamaño máximo es 5, y la respuesta correcta es la E.

Múltiple Opción 2

El hipercubo H_n de dimensión n es el grafo cuyos vértices son todas las n-uplas de ceros y unos, tales que dos n-uplas son adyacentes si y sólo si coinciden en todas sus coordenadas salvo exactamente en una de ellas. Determinar la cantidad de 4-ciclos de H_5.
(A) 60;
(B) 70;
(C) 80;
(D) 90;
(E) 100.

Solución - Múltiple Opción 2

Por la regla del producto, la cantidad de 5-uplas de ceros y unos es igual a 2^5. Contemos ahora la cantidad de 4-ciclos que contienen al vértice $(0,0,0,0,0)$. Dada una elección de dos coordenadas i y j, existe un único 4-ciclo que que contiene a $(0,0,0,0,0)$ y consiste en aumentar esas mismas coordenadas en algún orden, y luego reducirlas en orden contrario. Además, todo 4-ciclo que contiene a $(0,0,0,0,0)$ requiere el cambio de dos coordenadas. Entonces, hay exactamente tantos 4-ciclos que incluyen al vértice $(0,0,0,0,0)$ como elecciones de 2 elementos dentro de 5, es decir, $\binom{5}{2}$. Debido a la simetría de H_5, la cantidad de 4-ciclos que incluyen a un vértice cualquiera de H_5 es también igual a $\binom{5}{2}$. Como cada 4-ciclo contiene exactamente 4-vértices, entonces la cantidad total de 4-ciclos en H_5 es $\frac{2^5}{4}\binom{5}{2}$, o equivalentemente, 80. Luego, la opción correcta es la C.

Múltiple Opción 3

Determinar la cantidad de relaciones de equivalencia sobre el conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ que cumplen que la clase de equivalencia del elemento 1 tiene cardinal 3, mientras que la clase de equivalencia del elemento 2 tiene cardinal 2.
(A) 20;
(B) 30;
(C) 40;
(D) 50;
(E) 60.

Solución - Múltiple Opción 3

Denotemos $[x]$ a la clase de equivalencia del elemento x, y usemos $|[x]|$ para denotar su cardinal. Como $|[1]| \neq |[2]|$, ambas clases son disjuntas. Además del elemento 1, debemos elegir 2 elementos adicionales dentro del conjunto $\{3,4,5,6,7\}$ que pertenecen a $[1]$. Hay $\binom{5}{2} = 10$ maneras de elegir tales elementos. Sean z_1 y z_2 los elementos elegidos pertenecientes a la clase de $[1]$ que son distintos de 1. Además del elemento 2, debemos elegir 1 elemento adicional dentro del conjunto $\{3,4,5,6,7\} - \{z_1, z_2\}$ que pertenece a $[2]$. Hay 3 maneras de elegir tal elemento. Por último, los dos elementos restantes puede estar dentro de una misma clase o en dos clases distintas, por lo que hay 2 casos posibles. Por la regla del producto tenemos un total de $10 \times 3 \times 2 = 60$ relaciones que cumplen las restricciones indicadas. Luego, la opción correcta es la E.

Múltiple Opción 4

Consideremos el grafo mariposa $M = (V, E)$, cuyos vértices son $V = \{1,2,3,4,5\}$ y cuyas aristas son $E = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{4,5\}\}$. Hallar el polinomio cromático de M evaluado en 4. (A) 132; (B) 136; (C) 140; (D) 144; (E) 148.

Solución - Múltiple Opción 4

El grafo mariposa consiste en dos triángulos C_3 que tienen precisamente un vértice en común (y ninguna arista en común). El polinomio cromático de C_3 es $p_{C_3}(x) = x(x-1)(x-2)$. Como los dos ciclos C_3 se intersectan en un grafo completo K_1 y el polinomio cromático de K_1 es $p_{K_1}(x) = x$, el polinomio cromático del grafo mariposa es $p_M(x) = (x(x-1)(x-2))^2/x = x(x-1)^2(x-2)^2$, que evaluado en $x = 4$ es $p_M(4) = 4 \times 3^2 \times 2^2 = 144$. Luego, la opción correcta es la D.

Múltiple Opción 5

Sean $G = (V, E)$ y $H = (V', E')$ dos grafos simples, sin vértices en común. Se define un nuevo grafo $K = (V'', E'')$, donde $V'' = V \cup V'$ y $E'' = E \cup E' \cup \big\{\{v, v'\} : v \in V, v' \in V'\big\}$. Indicar la opción correcta.
(A) Si G y H son eulerianos entonces K es euleriano;
(B) Si G y H son planos entonces K es plano;
(C) Si G y H son hamiltonianos entonces K es hamiltoniano;
(D) Si G y H son bipartitos entonces K es bipartito;
(E) Si G y H son árboles entonces K es un árbol.

Solución - Múltiple Opción 5

Tomando G y H iguales a C_3 se ve que ambos son eulerianos pero el grafo $G+H$ no lo es, puesto que en C_3+C_3 todos los vértices tienen grado 5. Esto evidencia que la opción A es falsa. El mismo ejemplo sirve para mostrar que B es falsa, puesto que C_3+C_3 incluye a $K_{3,3}$ como subgrafo, y por el Teorema de Kuratowski se sigue que $C_3 + C_3$ no es un grafo plano. Tomando G y H iguales a P_2 se ve que G y H son bipartitos, mientras que $G + H$ es el grafo K_4, que no es bipartito, por lo que la opción D es también falsa. El mismo ejemplo permite mostrar que la opción E es falsa.

Probemos finalmente que la opción C es correcta. Como G y H son dos grafos hamiltonianos, existe un ciclo C_1 en G que contiene a todos sus vértices, y un ciclo C_2 en G que contiene a todos sus vértices. Sea v_1v_2 una arista de C_1 y w_2w_2 una arista de C_2, y definamos los caminos hamiltonianos $P_1 = C_1 - v_1v_2$ y $P_2 = C_2 - w_1w_2$. Entonces $C = P_1 + v_1w_1 + P_2 + w_2v_2$ es un ciclo que contiene a todos los vértices de $G + H$. Por lo tanto, $G + H$ es hamiltoniano, y la opción correcta es la C.

Ejercicio de Desarrollo 1

(1) Sea G un grafo simple y conexo. Recordemos que la suma de los grados de todos los vértices del grafo G es igual al doble del número de aristas de G, que es una cantidad par. Es claro que una suma finita de enteros es par únicamente si tiene una cantidad impar de sumandos impar. Entonces, la cantidad de vértices de grado impar es necesariamente par.

(2) Sea G un grafo simple que no es conexo y que tiene exactamente dos vértices u y v de grado impar. Supongamos por absurdo que u y v pertenecen a distintas componentes conexas de G. Sea G_u la componente conexa de G que contiene al vértice u. Como los únicos vértices de grado impar de G son u y v, y dado que v no pertenece a G_u, entonces G_u tiene exactamente un vértice de grado impar, que es precisamente u. Pero entonces tendríamos un grafo simple y conexo con una cantidad impar de vértices de grado impar. Esto contradice la parte anterior. La contradicción proviene del hecho de suponer que los vértices u y v de G pertenecen a distintas componentes conexas de G. Entonces, u y v pertenecen a la misma componente conexa de G, como queríamos demostrar.

(3) En las condiciones de la parte anterior, sean $G_1, G_2, \dots, G_r$ las componentes conexas de G, y sea G_1 la componente conexa de G que tiene a los vértices u y v. Por el teorema de caracterización de circuitos eulerianos, un grafo simple conexo tiene circuito euleriano si y sólo si todos sus vértices son de grado par. Como los únicos vértices de grado impar de G pertenecen a G_1, entonces cada una de las componentes conexas $G_2, \dots, G_r$ tiene un circuito euleriano. Por último, G_1 tiene a todos sus vértices de grado par excepto por u y v, y por lo tanto tiene algún recorrido euleriano cuyos extremos son precisamente los dos vértices de grado impar u y v. Hemos probado que cada componente conexa de G tiene un circuito euleriano o bien un recorrido euleriano, como se quería demostrar.

Ejercicio de Desarrollo 2

(1) Sea $G = (V, E)$ un grafo simple que es plano y conexo. Entonces, cualquier inmersión plana de G determina exactamente r regiones, donde r cumple que $|V| - |E| + r = 2$.

(2) Vamos a proceder a demostrar que todo grafo simple y plano $G = (V, E)$ con κ componentes conexas verifica que $|V| - |E| + r = \kappa + 1$, siendo r la cantidad de regiones determinadas por cualquier inmersión plana del grafo G. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, \kappa\}$, sea $G_i = (V_i, E_i)$ la i-ésima componente conexa de G. Como G es simple y plano entonces cada componente conexa G_i de G es un grafo simple, plano y conexo. Tomemos una inmersión plana cualquiera de G con r regiones. Sea entonces r_i la cantidad de regiones planas que delimita tal inmersión plana reducida al subgrafo G_i. Como cada componente conexa G_i satisface las hipótesis del teorema de Euler entonces $|V_i| - |E_i| + r_i = 2$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, \kappa\}$. Notemos que cada uno de los grafos G_i comparte la región no acotada. En consecuencia, la cantidad de regiones r incluye una región no acotada, y además cada componente conexa agrega $r_i - 1$ regiones no acotadas, por lo que $r = 1 + \sum_{i=1}^{\kappa}(r_i - 1) = 1 + \sum_{i=1}^{\kappa} r_i - \kappa$. Reescribiendo, tenemos que $\sum_{i=1}^{\kappa} r_i = r + \kappa - 1$. Como además sabemos que se cumple la identidad $|V_i| - |E_i| + r_i = 2$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, \kappa\}$, sumando en i conseguimos que:

$$\sum_{i=1}^{\kappa}(|V_i| - |E_i| + r_i) = |V| - |E| + r + \kappa - 1 = 2\kappa,$$

donde la última igualdad vale porque $\sum_{i=1}^{\kappa} 2 = 2\kappa$. Despejando conseguimos finalmente que $|V| - |E| + r = \kappa + 1$, como queríamos demostrar.