Segundo Parcial – Matemática Discreta I

Viernes 7 de julio de 2023

Versión 2

Número de lista	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Desarrollo 1	Desarrollo 2	Total Desarrollo

Recomendamos pasar las respuestas de los ejercicios de múltiple opción cuidadosamente en la hoja de escáner, llenando en su totalidad el círculo correspondiente con lapicera.
Nada de lo marcado en esta hoja será tenido en cuenta al corregir la parte de múltiple opción.
Cada respuesta correcta de múltiple opción vale 8 *puntos.*
Respuestas incorrectas restan 1 *punto.*
Cada ejercicio de desarrollo correcto y completo vale 10 *puntos.*
La duración del parcial es de 4 *horas.*

RECORDAR: Usamos el término "grafo simple" para referirnos a un grafo finito, no dirigido y sin lazos ni aristas múltiples.

Múltiple Opción 1

Consideremos la relación binaria R en $A = \{0, 1, \dots, 10\}$ tal que $(a, b) \in R$ si y sólo si existe un número entero $n \geq 0$ tal que $b = na$. Indicar la opción correcta:

(A) R no es un orden parcial;
(B) R es un orden parcial pero no tiene mínimo;
(C) R es un orden parcial pero no tiene máximo;
(D) R es un orden parcial, tiene mínimo y máximo, y el tamaño máximo de una anticadena es 4;
(E) R es un orden parcial, tiene mínimo y máximo, y el tamaño máximo de una anticadena es 5.

Múltiple Opción 2

El hipercubo H_n de dimensión n es el grafo cuyos vértices son todas las n-uplas de ceros y unos, tales que dos n-uplas son adyacentes si y sólo si coinciden en todas sus coordenadas salvo exactamente en una de ellas. Determinar la cantidad de 4-ciclos de H_5.
(A) 60;
(B) 70;
(C) 80;
(D) 90;
(E) 100.

Múltiple Opción 3

Determinar la cantidad de relaciones de equivalencia sobre el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ que cumplen que la clase de equivalencia del elemento 1 tiene cardinal 3, mientras que la clase de equivalencia del elemento 2 tiene cardinal 2.

(A) 20;
(B) 30;
(C) 40;
(D) 50;
(E) 60.

Múltiple Opción 4

Consideremos el grafo mariposa $M = (V, E)$, cuyos vértices son $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y cuyas aristas son $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$. Hallar el valor del polinomio cromático de M evaluado en 4.

(A) 132;
(B) 136;
(C) 140;
(D) 144;
(E) 148.

Múltiple Opción 5

Sean $G = (V, E)$ y $H = (V', E')$ dos grafos simples, sin vértices en común. Se define un nuevo grafo $K = (V'', E'')$, donde $V'' = V \cup V'$ y $E'' = E \cup E' \cup \big\{\{v, v'\} : v \in V, v' \in V'\big\}$.

Indicar la opción correcta.

(A) Si G y H son eulerianos entonces K es euleriano;
(B) Si G y H son planos entonces K es plano;
(C) Si G y H son hamiltonianos entonces K es hamiltoniano;
(D) Si G y H son bipartitos entonces K es bipartito;
(E) Si G y H son árboles entonces K es un árbol.

Ejercicio de Desarrollo 1

(1) Sea G un grafo simple y conexo. Demostrar que la cantidad de vértices de grado impar pertenecientes a G es necesariamente par.
(2) Sea G un grafo simple que no es conexo y que tiene exactamente dos vértices u y v de grado impar. Probar que u y v pertenecen a la misma componente conexa.
(3) En las condiciones de la parte anterior, probar que cada una de las componentes conexas de G tiene un recorrido euleriano o bien un circuito euleriano.

Ejercicio de Desarrollo 2

(1) Enunciar el teorema de las regiones de Euler para grafos simples, planos y conexos.
(2) Demostrar que todo grafo simple y plano $G = (V, E)$ con κ componentes conexas verifica que $|V| - |E| + r = \kappa + 1$, siendo r la cantidad de regiones determinadas por el grafo G.

Importante: justificar detalladamente cada paso de las demostraciones.