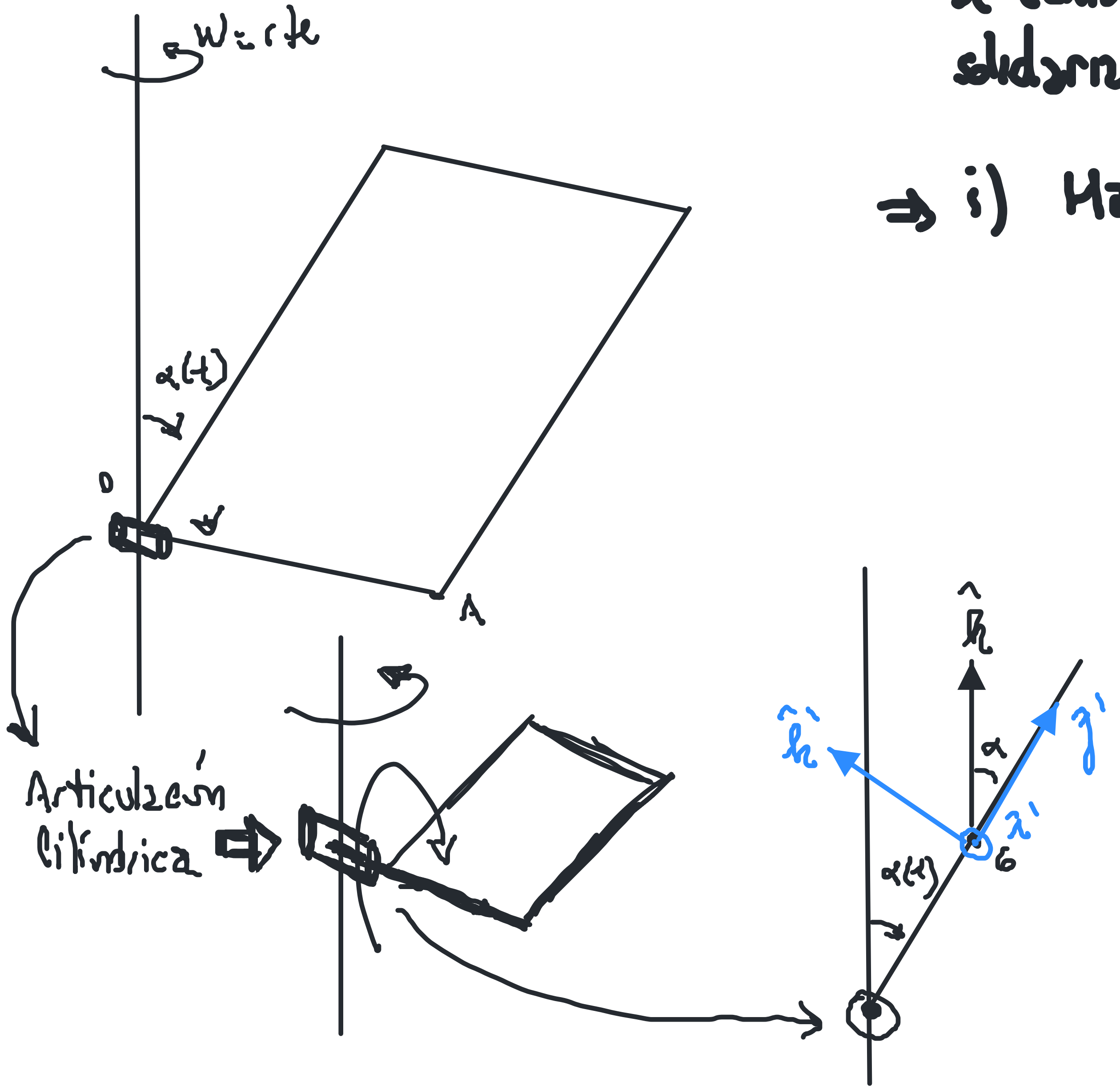
b)



Se cambia la soldadura por una articulación cilíndrica horizontal solidaria al eje móvil, paralela al lado OA de la placa

⇒ i) Hallar la ecuación de movimiento de la placa

OBS1: La articulación introduce una fuerza reactiva de DIRECCIÓN ARBITRARIA ⇒ NO SIRVE PLANTEAR LA 1ª CARDINAL (salvo que se quiera determinar esa fuerza)

OBS2: Puede ser necesaria la inyección de energía para mantener $\vec{\omega} = cte$ ⇒ TAMPOCO SIRVE EL ENFOQUE ENERGÉTICO

OBS3: En la articulación cilíndrica: $\vec{M}_O^R = M_1 \hat{j}' + M_2 \hat{k}'$

⇒ NO HAY MOMENTOS REACTIVOS SEGÚN $\hat{i}'$ ...

<u>CONCLUSIÓN</u>: PODEMOS OBTENER LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO PROYECTANDO LA SEGUNDA CARDINAL EN LA DIRECCIÓN DE LA ARTICULACIÓN $(\hat{i}')$

$$\Rightarrow \vec{M}_O^{Ext} \cdot \hat{i}' = \left[M(\vec{r}_G - \vec{r}_O) \times \ddot{\vec{r}}_O + \mathbb{I}_O \dot{\vec{w}} + \vec{w} \times (\mathbb{I}_O \vec{w}) \right] \cdot \hat{i}'$$

$$\rightarrow \vec{M}_O^{Ext} = \vec{M}_O^{P} + M_1^R \hat{j}' + M_2^R \hat{k}' \Rightarrow \boxed{\vec{M}_O^{Ext} \cdot \hat{i}' = \vec{M}_O^{P} \cdot \hat{i}' = -MgL \sin\alpha}$$

$\rightarrow$ La nueva $\vec{w}$ es

$$\left.\begin{aligned} \vec{w} &= w\hat{k} - \dot{\alpha}\hat{i}' \\ \hat{k} &= \cos\alpha\,\hat{j}' + \sin\alpha\,\hat{k}' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{w} = \underbrace{-\dot{\alpha}\hat{i}' + w\cos\alpha\,\hat{j}' + w\sin\alpha\,\hat{k}'}_{\text{NO OLVIDAR EXPRESARLA EN LA BASE DEL TENSOR}} \Rightarrow \vec{w} = \begin{pmatrix} -\dot{\alpha} \\ w\cos\alpha \\ w\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Para calcular $\dot{\vec{w}}$ usamos que

$$\dot{\vec{w}} = \frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{d'\vec{w}}{dt} = -\ddot{\alpha}\hat{i}' - w\sin\alpha\,\dot{\alpha}\,\hat{j}' + w\cos\alpha\,\dot{\alpha}\,\hat{k}' \Rightarrow \dot{\vec{w}} = \begin{pmatrix} -\ddot{\alpha} \\ -w\sin\alpha\,\dot{\alpha} \\ w\cos\alpha\,\dot{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left[\mathbb{I}_O \dot{\vec{w}} + \vec{w} \times (\mathbb{I}_O \vec{w})\right] \cdot \hat{i}' = \tfrac{4}{3} m L^2 \left[-\ddot{\alpha} + w^2 \sin\alpha \cos\alpha\right]} \text{ (VERIFICARLO)}$$

Finalmente : $\underbrace{\vec{M}_O^{ext}\cdot\hat{i}'} = M(\cancel{\vec{r}_G-\vec{r}_O})\times\ddot{\vec{r}}_O + I_O\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega}\times(I_O\vec{\omega})$

$$-MgL\sin\alpha = \frac{1}{3}ML^2\left[-\ddot{\alpha}+\omega^2\sin\alpha\cos\alpha\right] \Rightarrow \boxed{\ddot{\alpha}-\sin\alpha\left[\frac{3g}{4L}+\omega^2\cos\alpha\right]=0}$$

EC. DE MOVIMIENTO

<u>OBS1</u>: Para calcular los momentos ejercidos por la articulación debemos proyectar en las otras direcciones : $\vec{M}_O^{EXT} = M(\cancel{\vec{r}_G-\vec{r}_O})\times\ddot{\vec{r}}_O + I_O\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega}\times(I_O\vec{\omega})$

$$\vec{M}_O^{EXT} = \vec{M}_O^P + M_1^R\hat{j}' + M_2^R\hat{k}' \Rightarrow \begin{cases} \vec{M}_O^{ext}\cdot\hat{j}' = M_1^R + \vec{M}_O^P\cdot\hat{j}' \Rightarrow \\ \vec{M}_O^{ext}\cdot\hat{k}' = M_2^R + \vec{M}_O^P\cdot\hat{k}' \Rightarrow \end{cases} \boxed{\begin{aligned} M_1^R &= \left[I_O\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega}\times(I\vec{\omega})\right]\cdot\hat{j}' - \vec{M}_O^P\cdot\hat{j}' \\ M_2^R &= \left[I\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega}\times(I\vec{\omega})\right]\cdot\hat{k}' - \vec{M}_O^P\cdot\hat{k}' \end{aligned}}$$

<u>OBS2</u>: Puede ser más cómodo calcular $\dfrac{d(I_O\vec{\omega})}{dt}$ directamente en lugar de $I_O\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega}\times(I_O\vec{\omega})$ (A gusto del consumidor) En ese caso...

$$\mathbb{I}_0 = mL^2 \begin{pmatrix} 4/3 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} -\dot{\alpha} \\ \omega \cos\alpha \\ \omega \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbb{I}_0 \vec{\omega} = mL^2 \left[\left(-\frac{4}{3}\dot{\alpha} - \frac{1}{2}\omega\cos\alpha \right) \hat{i}' + \left(\frac{1}{2}\dot{\alpha} + \frac{1}{3}\omega\cos\alpha \right) \hat{j}' + \frac{5}{3}\omega\sin\alpha\, \hat{k}' \right]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\mathbb{I}_0\vec{\omega}) = mL^2 \left[\left(-\frac{4}{3}\ddot{\alpha} + \frac{1}{2}\omega\sin\alpha\,\dot{\alpha} \right) \hat{i}' + \left(-\frac{4}{3}\dot{\alpha} - \frac{1}{2}\omega\cos\alpha \right) \dot{\hat{i}}' \right.$$
$$+ \left(\frac{1}{2}\ddot{\alpha} - \frac{1}{3}\omega\sin\alpha\,\dot{\alpha} \right) \hat{j}' + \left(\frac{1}{2}\dot{\alpha} + \frac{1}{3}\omega\cos\alpha \right) \dot{\hat{j}}'$$
$$\left. + \frac{5}{3}\omega\cos\alpha\,\dot{\alpha}\, \hat{k}' + \frac{5}{3}\omega\sin\alpha\, \dot{\hat{k}}' \right]$$

$\Rightarrow$ Necesitamos:

$$\begin{cases} \dot{\hat{i}}' = (-\dot{\alpha}\hat{i}' + \omega\cos\alpha\,\hat{j}' + \omega\sin\alpha\,\hat{k}') \times \hat{i}' = -\omega\cos\alpha\,\hat{k}' + \omega\sin\alpha\,\hat{j}' \\ \dot{\hat{j}}' = (\qquad '' \qquad) \times \hat{j}' = -\dot{\alpha}\hat{k}' - \omega\sin\alpha\,\hat{i}' \\ \dot{\hat{k}}' = (\qquad '' \qquad) \times \hat{k}' = \dot{\alpha}\hat{j}' + \omega\cos\alpha\,\hat{i}' \end{cases}$$

Me interesa solamente $\frac{d(I_o\vec{w})}{dt}\cdot\hat{i}$:

$$\frac{d(I\vec{w})}{dt}\cdot\hat{i} = \left[-\frac{4}{3}\ddot{\alpha} + \cancel{\frac{1}{2}w\sin\alpha\,\dot{\alpha}} + \left(\cancel{\frac{1}{2}\dot{\alpha}} + \frac{1}{3}w\cos\alpha\right)(-w\sin\alpha) + \frac{5}{3}w^2\sin\alpha\cos\alpha\right]ML^2$$

$$= \left[-\frac{4}{3}\ddot{\alpha} + \frac{4}{3}w^2\sin\alpha\cos\alpha\right]ML^2$$

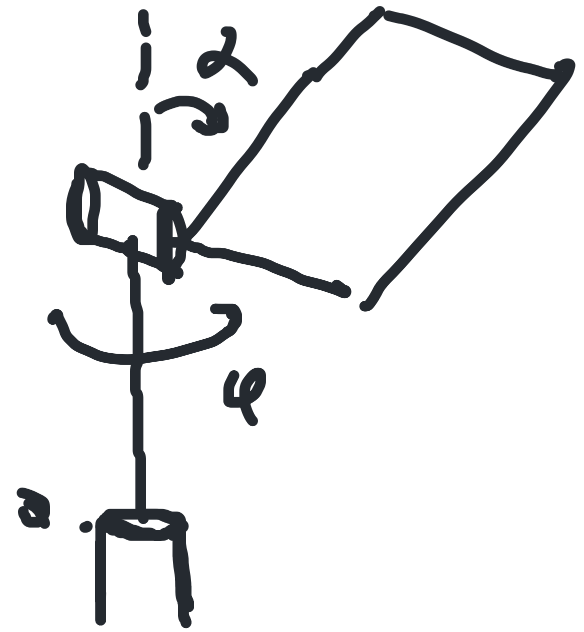
$$\Rightarrow \underbrace{\vec{M}_o^{ext}\cdot\hat{i}}_{=} = \frac{d(I_o\vec{w})}{dt}\cdot\hat{i}$$

$$-\cancel{M}g\cancel{L}\sin\alpha = \left[-\frac{4}{3}\ddot{\alpha} + \frac{4}{3}w^2\sin\alpha\cos\alpha\right]\cancel{M}L^{\cancel{2}} \Rightarrow \boxed{\ddot{\alpha} - \sin\alpha\left[\frac{3g}{4L} + w^2\cos\alpha\right] = 0}$$

OBS : Si quisiera las configuraciones de equilibrio $\Rightarrow \ddot{\alpha}=0 \Rightarrow \sin\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0, \pi$

$\cos\alpha = -3g/4Lw^2$

c)



Por último, discutiremos estrategias para analizar el problema en el caso en que el giro vertical también es libre

Notamos que ahora el problema tiene 2 grados de libertad ...

$\Rightarrow$ NECESITAMOS 2 ECUACIONES DE MOVIMIENTO

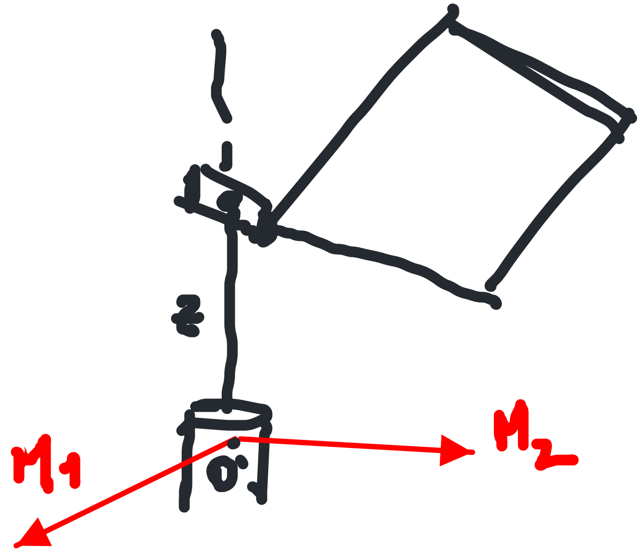
OBS 1: las articulaciones son lisas (no hay disipación por fricción)

OBS 2: las fuerzas y momentos en las articulaciones son de potencia nula (verificarlo)

OBS 3: El peso es conservativo

$\overset{1),2),3)}{\Longrightarrow}$ LA ENERGÍA SE CONSERVA (utilizaremos este hecho para obtener una ec. de mov.)

OBS 4: los momentos EXTERNOS respecto a O' (considerando como sistema a la placa, la articulación horizontal y el eje) son:



→ M_1^R, M_2^R introducidos por la articulación, HORIZONTALES

$$\vec{M}_{O'}^{peso} = \left(z\hat{k} + \frac{L}{2}\hat{i}' + l\hat{j}'\right) \times \left(-Mg\hat{k}\right) = \underbrace{-\frac{MgL}{2}\hat{v} - MgL\sin\alpha\,\hat{i}'}_{\text{TAMBIÉN HORIZONTAL}}$$

2da cardinal:

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \cancel{M\vec{V}_G \times \vec{V}_O} + \vec{M}_{O'}^{ext}$$

$\hat{k} = cte$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_{O'}}{dt}\cdot\hat{k} = \underbrace{\vec{M}_{O'}^{ext}\cdot\hat{k}}_{= 0} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_{O'}}{dt}\cdot\hat{k} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d(\vec{L}_{O'}\cdot\hat{k})}{dt} = 0}$$

SE CONSERVA LA COMPONENTE VERTICAL DE $\vec{L}_{O'}$

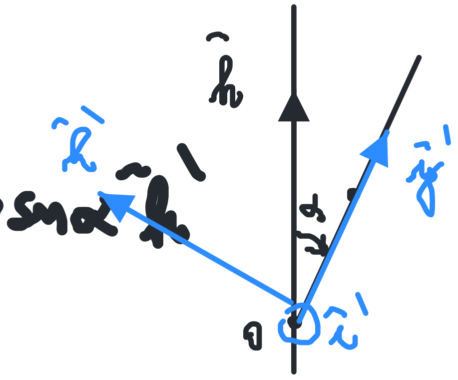
PERMITE OBTENER UNA SEGUNDA EC. DE MOV.

ENERGÍA:

$$T = \frac{1}{2}M\vec{v}_Q^{\,2} + \frac{1}{2}\vec{w}\cdot(\mathbb{I}_Q\vec{w}) + M\vec{v}_Q\cdot[\vec{w}\times(\vec{r}_G-\vec{r}_Q)] \overset{Q=O}{=} \frac{1}{2}\vec{w}\cdot(\mathbb{I}_O\vec{w})$$

Como el giro en $\hat{h}$ es libre $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} \vec{w} &= \dot\varphi\hat{h} - \dot\alpha\hat{i}' \\ \hat{h} &= \cos\alpha\,\hat{j}' + \sin\alpha\,\hat{k}' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{w} = -\dot\alpha\,\hat{i}' + \dot\varphi\cos\alpha\,\hat{j}' + \dot\varphi\sin\alpha\,\hat{k}'$$



$$\mathbb{I}_O\vec{w} = ML^2\begin{pmatrix} 4/3 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\dot\alpha \\ \dot\varphi\cos\alpha \\ \dot\varphi\sin\alpha \end{pmatrix} = ML^2\left[\left(-\frac{4}{3}\dot\alpha - \frac{1}{2}\dot\varphi\cos\alpha\right)\hat{i}' + \left(\frac{1}{2}\dot\alpha + \frac{1}{3}\dot\varphi\cos\alpha\right)\hat{j}' + \frac{5}{3}\dot\varphi\sin\alpha\,\hat{k}'\right]$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\vec{w}\cdot(\mathbb{I}_O\vec{w}) = \frac{1}{2}ML^2\left[\frac{4}{3}\dot\alpha^2 + \frac{1}{2}\dot\alpha\dot\varphi\cos\alpha + \frac{1}{2}\dot\alpha\dot\varphi\cos\alpha + \frac{1}{3}\dot\varphi^2\cos^2\alpha + \frac{5}{3}\dot\varphi^2\sin^2\alpha\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{ML^2}{6}\left[4\dot{\alpha}^2 + 3\dot{\alpha}\dot{\varphi}\cos\alpha + \dot{\varphi}^2(1+4\sin^2\alpha)\right]}$$

Energía potencial: $U = Mgh \xRightarrow{h=0 \text{ en } O} \boxed{U = MgL\cos\alpha}$

$$\Rightarrow E = T + U = cte$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{2}{3}ML^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{6}ML^2\dot{\varphi}^2(1+4\sin^2\alpha) + \frac{1}{2}\dot{\alpha}\dot{\varphi}\cos\alpha + MgL\cos\alpha = E_0}$$

OBS: Típicamente el problema incluirá los valores de $\dot{\alpha}(0)$, $\dot{\varphi}(0)$ y $\alpha(0)$ necesarios para calcular E_0. Por ejemplo, si la placa parte del reposo desde $\alpha = \pi/2 \Rightarrow E_0 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{2}{3}ML^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{6}ML^2\dot{\varphi}^2(1+4\sin^2\alpha) + \frac{1}{2}ML^2\dot{\alpha}\dot{\varphi}\cos\alpha + MgL\cos\alpha = 0}$$

MOMENTO ANGULAR

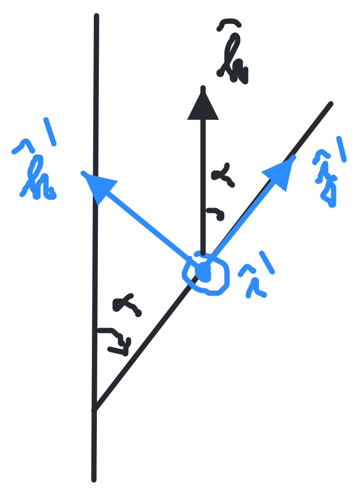
OBS: $\vec{L}_O = \vec{L}_{O'} + M\vec{v}_G \times (\underbrace{\vec{r}_O - \vec{r}_{O'}}_{= z\hat{k}}) \Rightarrow \vec{L}_O\cdot\hat{k} = \vec{L}_{O'}\cdot\hat{k} + \cancel{(M\vec{v}_G \times z\hat{k})\cdot\hat{k}} \Rightarrow \vec{L}_O\cdot\hat{k} = \vec{L}_{O'}\cdot\hat{k}$

Luego, como $\vec{L}_{O'}\cdot\hat{k} = cte \rightarrow \vec{L}_O\cdot\hat{k} = cte \Rightarrow$ Trabajaremos en O (no hace falta trasladar $\mathbb{I}$)

$$\Rightarrow \vec{L}_O = M(\vec{r}_G - \vec{r}_O)\times\vec{v}_O + \mathbb{I}_O\vec{\omega} = ML^2\left[\left(-\tfrac{4}{3}\dot{\alpha} - \tfrac{1}{2}\dot{\varphi}\cos\alpha\right)\hat{i}' + \left(\tfrac{1}{2}\dot{\alpha} + \tfrac{1}{3}\dot{\varphi}\cos\alpha\right)\hat{j}' + \tfrac{5}{3}\dot{\varphi}\sin\alpha\,\hat{k}'\right]$$

$$\Rightarrow \vec{L}_O\cdot\hat{k} = \left[\left(\tfrac{1}{2}\dot{\alpha} + \tfrac{1}{3}\dot{\varphi}\cos\alpha\right)\underbrace{(\hat{j}'\cdot\hat{k})}_{=\cos\alpha} + \tfrac{5}{3}\dot{\varphi}\sin\alpha\underbrace{(\hat{k}'\cdot\hat{k})}_{=\sin\alpha}\right]ML^2$$

$\dot{\alpha}(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$



$$= \left[\frac{\dot{\alpha}\cos\alpha}{2} + \dot{\varphi}\left(\frac{\cos^2\alpha}{3} + \frac{5\sin^2\alpha}{3}\right)\right]ML^2 = (\vec{L}_O\cdot\hat{k})(t=0) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\dot{\alpha}\cos\alpha}{2} + \frac{\dot{\varphi}}{3}\left(1 + 4\sin^2\alpha\right) = 0}$$

Las ecuaciones de movimiento son: $\begin{cases} \frac{2}{3} ML^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} ML^2 \dot{\varphi}^2 (1+4\sin^2\alpha) + \frac{ML^2}{2}\dot{\alpha}\dot{\varphi}\cos\alpha + MgL\cos\alpha = 0 \\ \frac{\dot{\alpha}\cos\alpha}{2} + \frac{\dot{\varphi}}{3}(1+4\sin^2\alpha) = 0 \quad (2) \end{cases}$

El sistema se puede desacoplar despejando $\dot{\varphi}$ de la ec. (2): $\boxed{\dot{\varphi} = \frac{-3\dot{\alpha}\cos\alpha}{2(1+4\sin^2\alpha)}}$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{9\dot{\alpha}^2\cos^2\alpha}{4(1+4\sin^2\alpha)^{\cancel{2}}}\right)\cancel{(1+4\sin^2\alpha)} + \frac{1}{2}\dot{\alpha}\left(\frac{-3\dot{\alpha}\cos\alpha}{2(1+4\sin^2\alpha)}\right)\cos\alpha + g/L\cos\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{5(5+11\sin^2\alpha)}{24(1+4\sin^2\alpha)}\dot{\alpha}^2 + g/L\cos\alpha = 0}$$

PERMITEN HALLAR $\dot{\varphi}$ y $\dot{\alpha}$ PARA CUALQUIER α.