DINÁMICA DEL RÍGIDO - MOVIMIENTO EN EL ESPACIO

Aprenderemos a:

→ Modelar uniones rígidas y articuladas (lisas) en términos de las fuerzas y momentos que ejercen sobre un rígido, y calcular dichas cantidades

→ Obtener la(s) ecuaciones de movimiento de un rígido a partir de las ecuaciones cardinales

→ Identificar cantidades conservadas y obtener ecuaciones de movimiento de un rígido a partir de dichas leyes de conservación.

REPASO: ECUACIONES CARDINALES

→ 1ª Cardinal: $\boxed{\vec{F}_N^{EXT} = M\vec{a}_G}$

→ 2ª Cardinal: Forma 1 → i) calculamos $\vec{L}_Q = M(\vec{r}_G - \vec{r}_Q)\times\vec{v}_Q + \mathbb{I}_Q\vec{w}$ y derivamos

ii) Planteamos $\boxed{\dot{\vec{L}}_Q = M\vec{v}_G\times\vec{v}_Q + \vec{M}_Q^{EXT}}$

Forma 2 → $\vec{M}_Q^{EXT} = M(\vec{r}_G - \vec{r}_Q)\times\vec{a}_Q + \underbrace{\frac{d}{dt}(\mathbb{I}_Q\vec{w})}_{\mathbb{I}_Q\dot{\vec{w}} + \vec{w}\times(\mathbb{I}_Q\vec{w})}$ (Este último término se puede derivar directamente) (si $\mathbb{I}_Q$ es cte en la base elegida)

Recordar que → si $\mathbb{I}_Q^{\{\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3\}} \Rightarrow \vec{w} = w_1\hat{e}_1 + w_2\hat{e}_2 + w_3\hat{e}_3$

$\dot{\vec{w}} = \dot{w}_1\hat{e}_1 + \dot{w}_2\hat{e}_2 + \dot{w}_3\hat{e}_3$ pues $\frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{d'\vec{w}}{dt}$

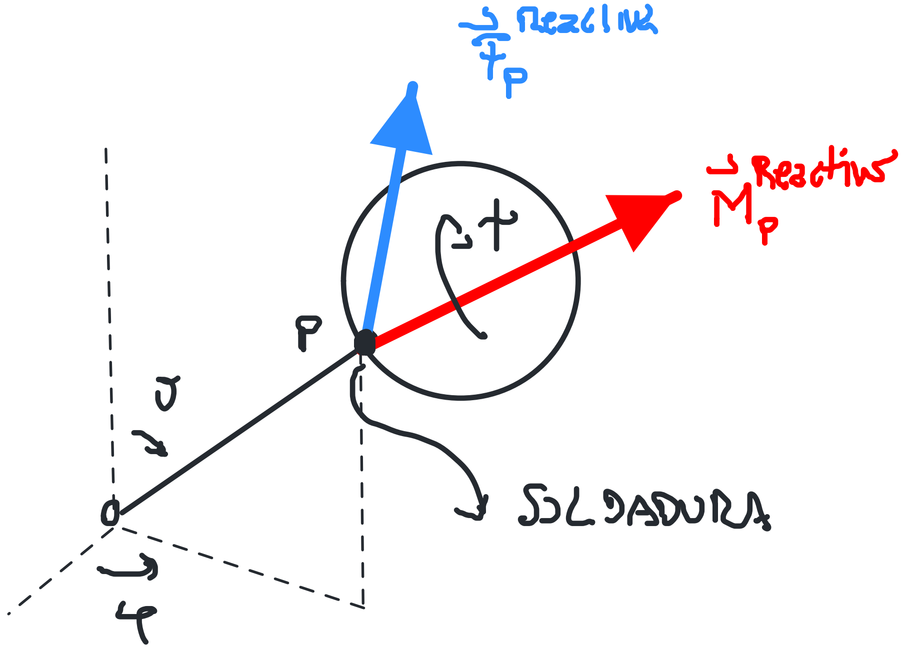
$\Rightarrow \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{w}} = \begin{pmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \end{pmatrix}$

UNIONES

1) RÍGIDAS (SOLDADURA)

→ Pueden trasmitir fuerzas y momentos arbitrarios con tal de mantener la unión (hasta una tolerancia máxima)

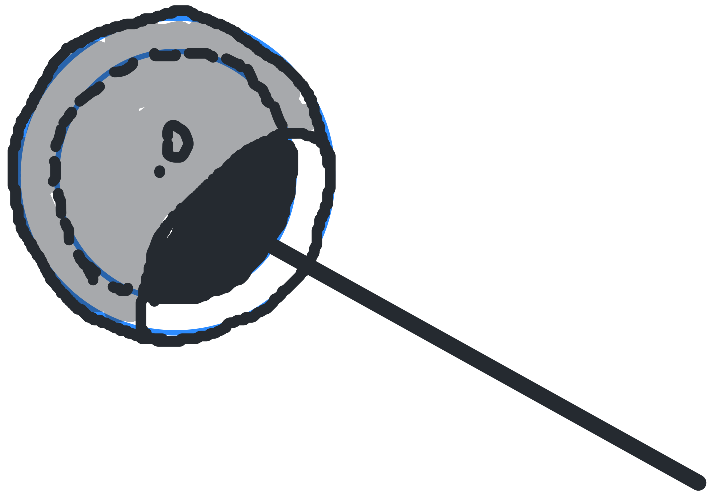
→ Ello implica que debo incluir una $\vec{F}^{\text{Reactiva}}$ en la 1ª cardinal y un $\vec{M}_P^{\text{Reactivo}}$ en la 2ª cardinal cuyas direcciones a priori son ARBITRARIAS (al despejarlo de las cardinales sabemos en qué direcciones actúan)



→ $\vec{F}^{\text{Reactiva}}$ y $\vec{M}_P^{\text{Reactivo}}$ DEBEN TRATARSE DE FORMA INDEPENDIENTE : $\vec{M}_P^R \neq (\vec{r}_P - \vec{r}_P) \times \vec{F}^R = 0$

2) <u>ARTICULADAS</u> (Giro libre)

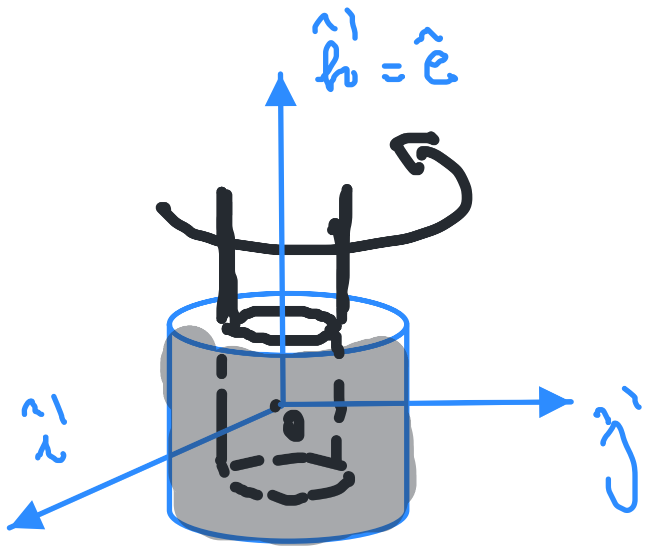
i) **ESFÉRICA LISA**



→ No existen fuerzas tangenciales ⇒ $\boxed{\vec{M}_0^{\text{Reactivo}} = 0}$

→ La resultante de las fuerzas radiales puede tener cualquier dirección ⇒ debemos incluir $\vec{F}^R$ arbitraria en la 1ª Cardinal.

ii) **CILÍNDRICA LISA**



→ Tampoco hay fuerzas tangenciales ⇒ $\boxed{\vec{M}_0^R = M_1^R \hat{i} + M_2^R \hat{j} + 0\hat{k}}$

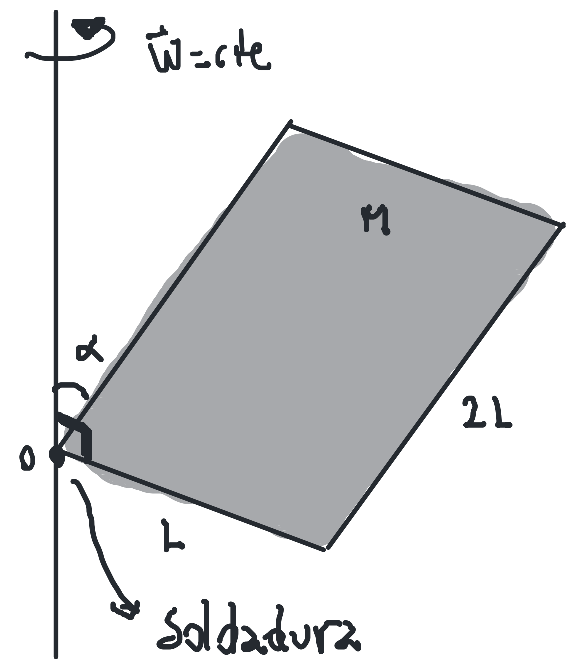
→ Fuerza resultante arbitraria ⇒ $\vec{F}^R = R_1\hat{i} + R_2\hat{j} + R_3\hat{k}$

⇒ PUEDO OBSERVAR LA E. MOV. PROYECTANDO LA 2ª CARDINAL EN LA DIRECCIÓN DEL EJE DE LA ARTICULACIÓN (NO HAY MOMENTOS REACTIVOS)

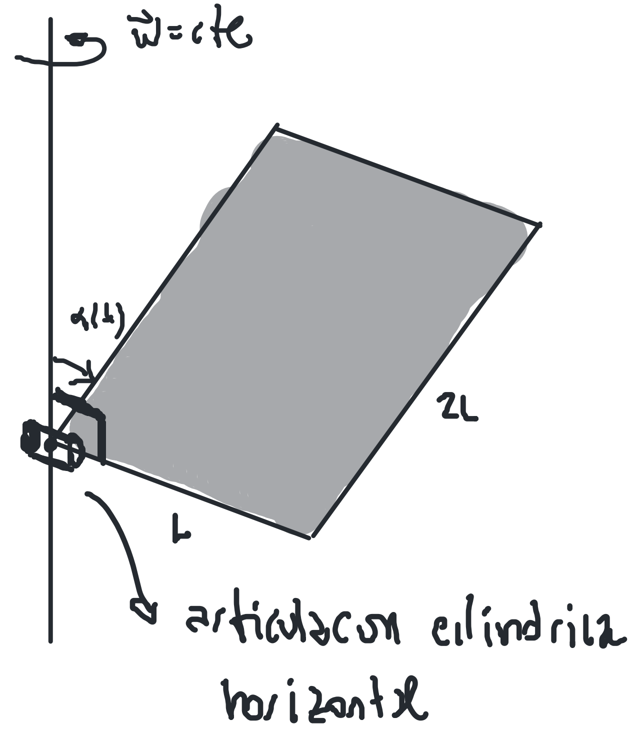
EJEMPLO

Estudiaremos el movimiento de una placa rectangular unida a un eje vertical rotante de 3 formas:

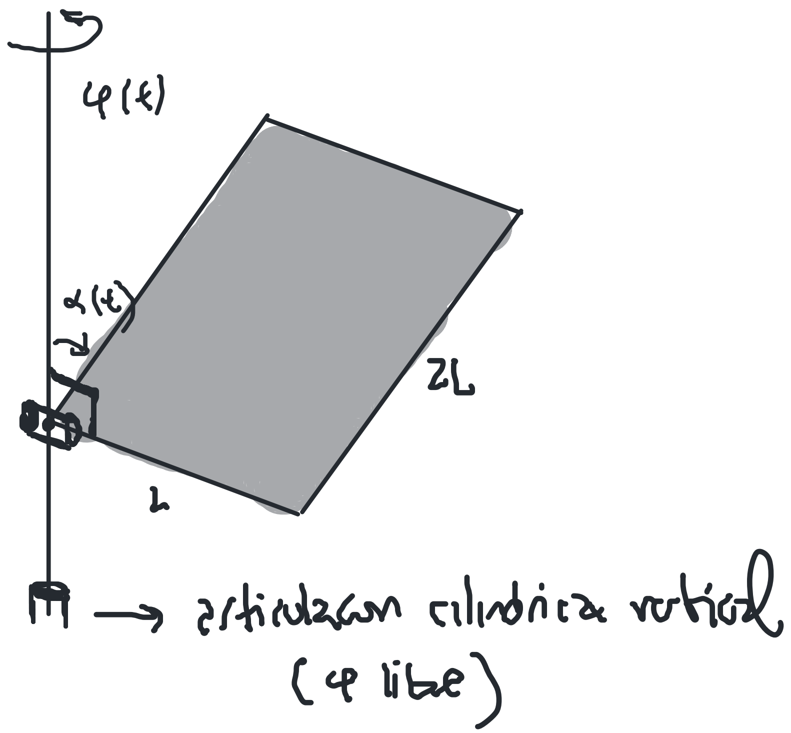
a)



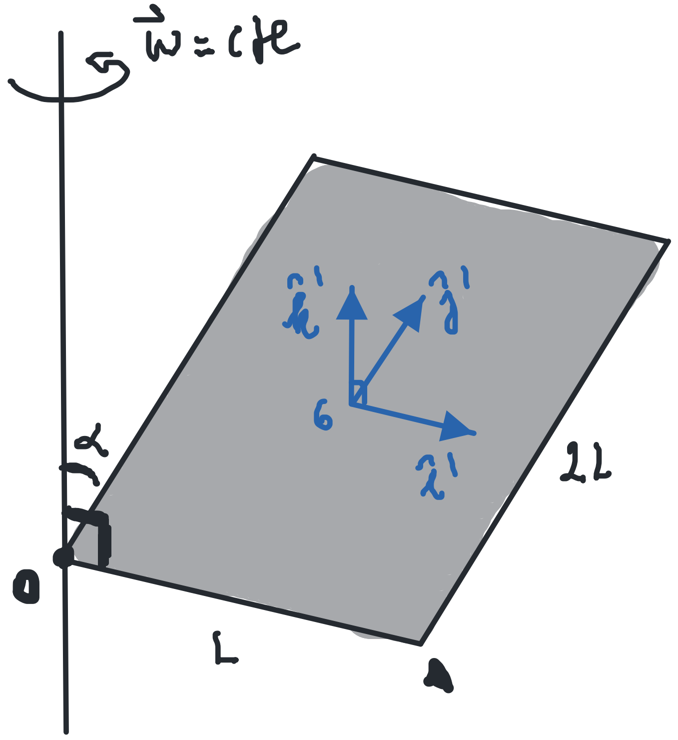
b)

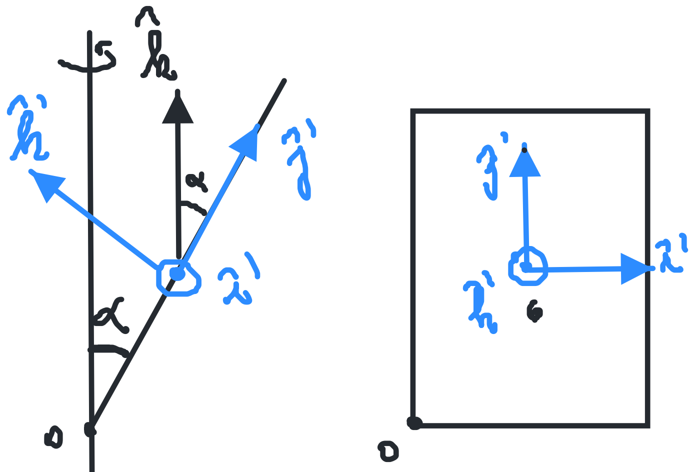


c)



a)





→ Placa rectangular, homogénea, masa M y dimensiones L y 2L

→ Soldada en su vértice O a eje vertical de masa despreciable

→ Eje ⊥ perpendicular al lado OA y el ángulo entre el plano de la placa y el eje es α (cte)

→ Sistema gira con $\vec{w} = w\hat{k}$ (constante)

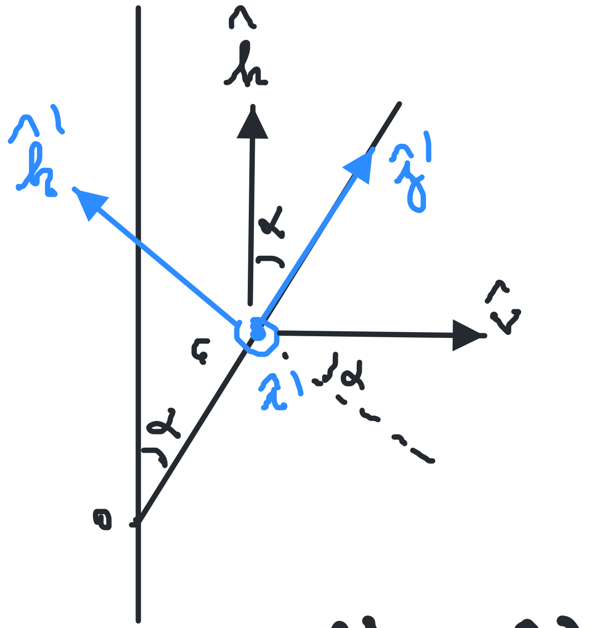
i) Calcular la resultante de las fuerzas y los momentos aplicados en O para que el movimiento sea el descrito

⇒ Modelaremos la acción de la fuerza distribuida en la soldadura como UNA FUERZA Y UN MOMENTO INDEPENDIENTES

⇒ La fuerza se obtiene de la 1ª CARDINAL: $\vec{F}^{EXT}_{NETA} = M\vec{a}_G$

⇒ $\vec{r}_G = \frac{L}{2}\hat{i}' + L\hat{j}'$ ⇒ $\vec{v}_G = \frac{L}{2}\dot{\hat{i}}' + L\dot{\hat{j}}'$

Nota: Como la base $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$ es solidaria ⇒ todos los versores giran con $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$



$\hat{v} = \sin\alpha\,\hat{j}' - \cos\alpha\,\hat{k}'$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{i}}' = \omega\hat{k}\times\hat{i}' = \omega\hat{v} = \omega\sin\alpha\,\hat{j}' - \omega\cos\alpha\,\hat{k}' \\ \dot{\hat{j}}' = \omega\hat{k}\times\hat{j}' = -\omega\sin\alpha\,\hat{i}' \\ \dot{\hat{k}}' = \omega\hat{k}\times\hat{k}' = \omega\sin(90-\alpha)\,\hat{i}' = \omega\cos\alpha\,\hat{i}' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_G = -L\omega\sin\alpha\,\hat{i}' + L/2\,\omega\sin\alpha\,\hat{j}' - L/2\,\omega\cos\alpha\,\hat{k}'$$

$$\Rightarrow \vec{a}_G = -L\omega\sin\alpha\,\dot{\hat{i}}' + L/2\,\omega\sin\alpha\,\dot{\hat{j}}' - L/2\,\omega\cos\alpha\,\dot{\hat{k}}' \Rightarrow \boxed{\vec{a}_G = -\frac{L}{2}\omega^2\hat{i}' - L\omega^2\sin^2\alpha\,\hat{j}' + L\omega^2\sin\alpha\cos\alpha\,\hat{k}'}$$

1° cardinal: $\underbrace{\vec{F}^{ext}_{neta}} = M\vec{a}_G$

$$\vec{F}^R - Mg\hat{k} = M\vec{a}_G \Rightarrow \boxed{\vec{F}^R = Mg\hat{k} + M\left[-\frac{L}{2}\omega^2\hat{i}' - L\omega^2\sin^2\alpha\,\hat{j}' + L\omega^2\sin\alpha\cos\alpha\,\hat{k}'\right]}$$

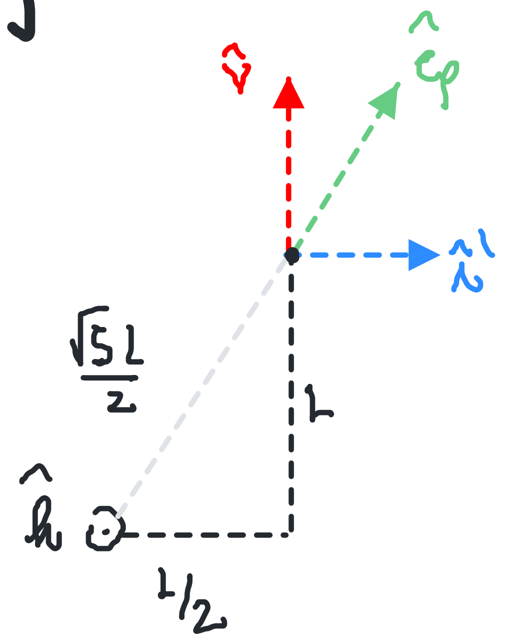
Notar que: $\vec{a}_G = -\frac{L}{2}\omega^2\hat{i}' - L\omega^2\sin^2\alpha\,\hat{j}' + L\omega^2\sin\alpha\cos\alpha\,\hat{k}'$

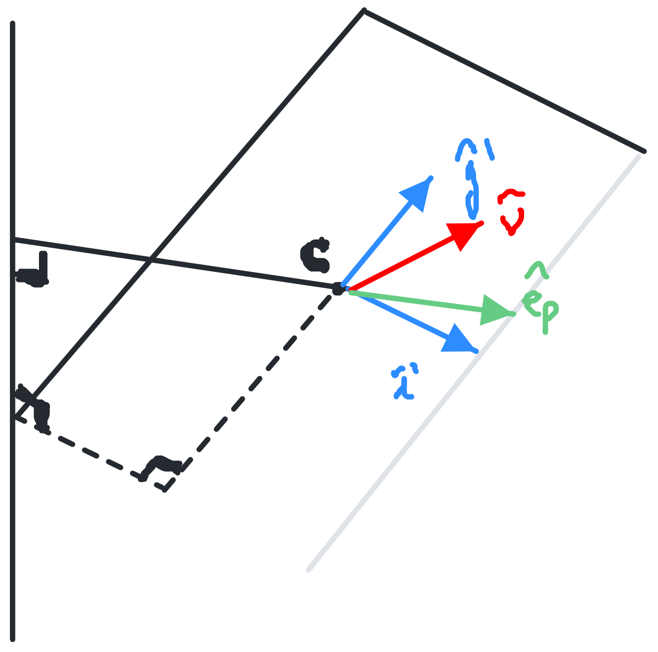
$$= -\frac{L}{2}\omega^2\hat{i}' - L\omega^2\sin\alpha\left[\underbrace{\sin\alpha\,\hat{j}' - \cos\alpha\,\hat{k}'}_{=\hat{v}}\right]$$

$$= -\omega^2\left[\frac{L}{2}\hat{i}' + L\hat{v}\right]$$

$$\boxed{\vec{a}_G = \left(-\frac{\sqrt{5}L}{2}\right)\omega^2\hat{e}_p}$$

: Radio de giro



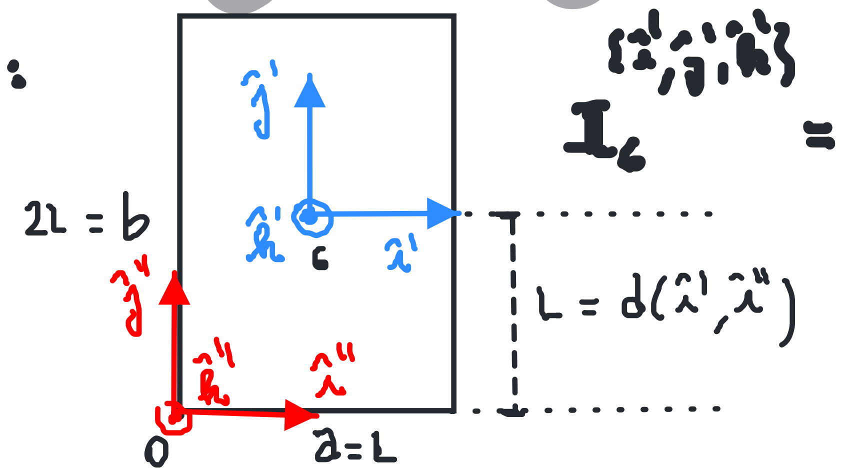


$$\frac{L^2}{4} + L^2 = \frac{5L^2}{4}$$

⇒ G describe un MCU (su aceleración es $-R\omega^2\hat{e}_p$)

2ª Cardinal : $\vec{M}_O^{EXT} = m(\vec{r}_G - \vec{r}_O)\times \underset{(\vec{a}_O = 0)}{\vec{a}_O} + \underset{(\vec{\omega} = cte)}{I_O\dot{\vec{\omega}}} + \vec{\omega}\times(I_O\vec{\omega})$ $\Rightarrow$ Necesitamos el tensor de inercia en O

Ya mostramos que :



$$I_G^{\{\hat{i}',\hat{j}',\hat{k}'\}} = \frac{M}{12}\begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2+a^2 \end{pmatrix} \overset{\substack{a=L \\ b=2L}}{=} ML^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{r}_O = (-L/2, -L, 0)}$$

$I_{O11} = I_{G11} + M d^2(\hat{i}', \hat{i}'') = ML^2/3 + ML^2 = 4/3\, ML^2$

$I_{O22} = I_{G22} + M d^2(\hat{j}', \hat{j}'') = ML^2/12 + M(L/2)^2 = ML^2/3$

$I_{O33} = I_{O11} + I_{O22} = 5/3\, ML^2$

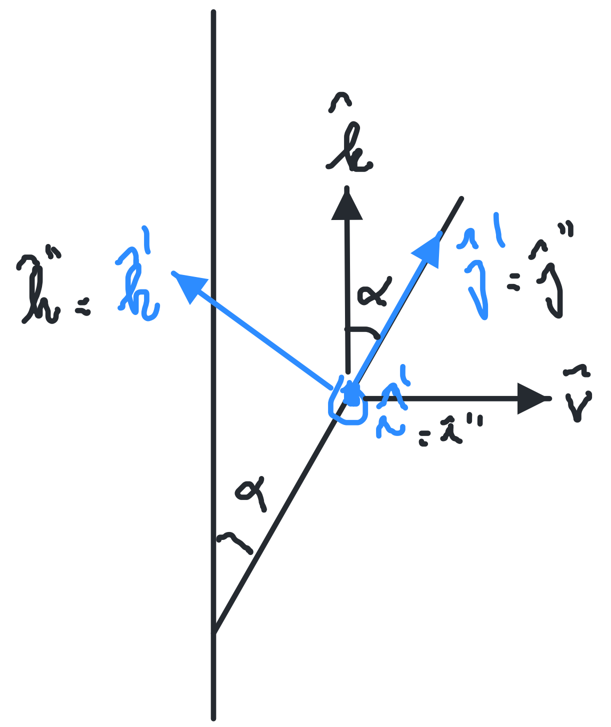
Rígido plano $\Rightarrow$ $\hat{k}''$ principal $\Rightarrow$ $J_{12} = J_{13} = 0$

$J_{12} = -M x_O y_O = -M(-L/2)(-L) = -ML^2/2$

$$\Rightarrow \boxed{I_O^{\{\hat{i}'',\hat{j}'',\hat{k}''\}} = ML^2 \begin{pmatrix} 4/3 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 \end{pmatrix}}$$

$$\vec{M}_O^{EXT} = \vec{M}_O^{R} + \vec{M}_O^{PESO}$$

$$\boxed{\vec{M}_O^{PESO} = \left(\frac{L}{2}\hat{i} + L\hat{j}'\right) \times \left(-Mg\hat{k}\right) = Mg\frac{L}{2}\hat{v} - MgL\sin\alpha\,\hat{i}'}$$



NOTA: NO OLVIDAR EXPRESAR $\vec{w}$ EN LA BASE DEL TENSOR!

$$\vec{w} = w\hat{k} = w\left(\cos\alpha\,\hat{j}' + \sin\alpha\,\hat{k}'\right) \Rightarrow \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ w\cos\alpha \\ w\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbb{I}_O\vec{w} = ML^2 \begin{pmatrix} 4/3 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ w\cos\alpha \\ w\sin\alpha \end{pmatrix} = \left[-\frac{1}{2}w\cos\alpha\,\hat{i}' + \frac{1}{3}w\cos\alpha\,\hat{j}' + 5/3\,w\sin\alpha\,\hat{k}'\right]ML^2$$

$$\Rightarrow \vec{w} \times (\mathbb{I}_O\vec{w}) = w^2\left[\left(\cos\alpha\,\hat{j}' + \sin\alpha\,\hat{k}'\right) \times \left(-\frac{1}{2}\cos\alpha\,\hat{i}' + \frac{1}{3}\cos\alpha\,\hat{j}' + 5/3\sin\alpha\,\hat{k}'\right)\right] = ML^2w^2\left[4/3\sin\alpha\cos\alpha\,\hat{i}' - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2}\hat{j}' + \frac{\cos^2\alpha}{2}\hat{k}'\right]$$

Finalmente: $\underbrace{\vec{M}_o^{Ext}} = \vec{\omega} \times (\mathbb{I}_o \vec{\omega})$

$$\vec{M}_o^R + Mg\frac{L}{2}\hat{v} - MgL\sin\alpha\,\hat{i}' = ML^2\omega^2\left[\frac{1}{3}\sin\alpha\cos\alpha\,\hat{i}' \underbrace{- \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2}\hat{j}' + \frac{\cos^2\alpha}{2}\hat{k}'}_{-\frac{\cos\alpha}{2}(\underbrace{\sin\alpha\,\hat{j} - \cos\alpha\,\hat{k}}_{"\ \hat{v}})}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{M}_o^{React} = ML\left[\left(g + \frac{1}{3}L\omega^2\cos\alpha\right)\sin\alpha\,\hat{i}' - \frac{1}{2}\left(g + L\omega^2\cos\alpha\right)\hat{v}\right]}$$ ES HORIZONTAL ...

OBS: Notar que $P^{Reactiva} = \vec{F}^R \cdot \cancel{\vec{v}_o} + \vec{M}_o^R \cdot \vec{\omega} = 0$ pues $\begin{cases} O \text{ Fijo} \\ \vec{M}^R \perp \vec{\omega} \end{cases}$. ¿Qué concluye?