CLASE 12: ESTÁTICA DEL CUERPO RÍGIDO

Aprenderemos a:

- → Plantear las condiciones de equilibrio de un cuerpo rígido
- → Modelar sistemas de fuerzas distribuidas
- → Clasificar los distintos tipos de ruptura del equilibrio
- → Identificar cómo se rompe el equilibrio en situaciones concretas

ESTÁTICA

→ Condiciones de equilibrio: $\begin{cases} \vec{a}_G = 0 \\ \dot{\vec{w}} = 0 \end{cases} \forall t \quad (1)$

→ Lo anterior NO IMPLICA ausencia de movimiento, pero sí implica que: $\begin{cases} \vec{v}_G = cte = \vec{v}_G(t=0) \\ \vec{w} = cte = \vec{w}(t=0) \end{cases} \quad (2)$

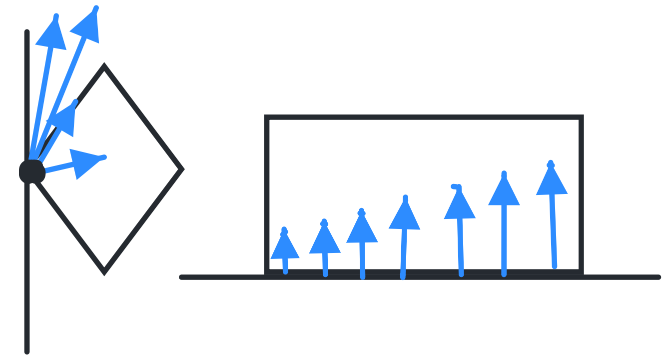
→ Luego, si se parte del reposo: $\begin{cases} \vec{v}_G(t=0) = 0 \\ \vec{w}(t=0) = 0 \end{cases}$ (3) $\overset{(2),(3)}{\Longrightarrow} \begin{cases} \vec{v}_G = 0 \\ \vec{w} = 0 \end{cases} \forall t$ → EL RÍGIDO PERMANECERÁ EN REPOSO

→ A partir de las ecuaciones cardinales $\underbrace{\text{es posible mostrar que}}_{\text{HACERLO!}}$ $\vec{a}_G = 0 \Longleftrightarrow \vec{F}_{\text{fuerzas}}^{\text{EXT}} = 0$, $\dot{\vec{w}} = \dot{\vec{W}} = 0 \Longleftrightarrow \vec{M}_Q^{\text{EXT}} = 0 \ \forall Q$ ¿Por qué?

SISTEMAS DE FUERZAS

→ Vimos que el equilibrio estático está dado por las condiciones $\begin{cases} \vec{F}^{EXT}_{NETA} = 0 \\ \vec{M}^{EXT}_{Q} = 0 \quad \forall Q \end{cases}$

→ El cálculo de $\vec{F}^{EXT}_{NETA}$ y $\vec{M}^{EXT}_{Q}$ implica muchas veces trabajar con sistemas de fuerzas complejos, por ejemplo soldaduras o normales distribuidas en una superficie:



→ Idea: reemplazar el sistema complejo por uno EQUIVALENTE más simple

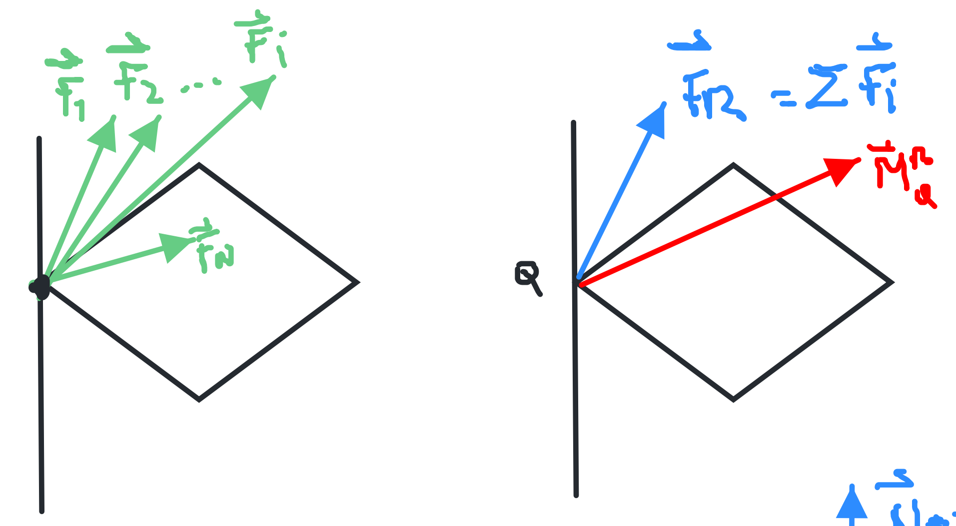
→ ¿Qué significa equivalente? Que produce LA MISMA RESULTANTE y EL MISMO MOMENTO

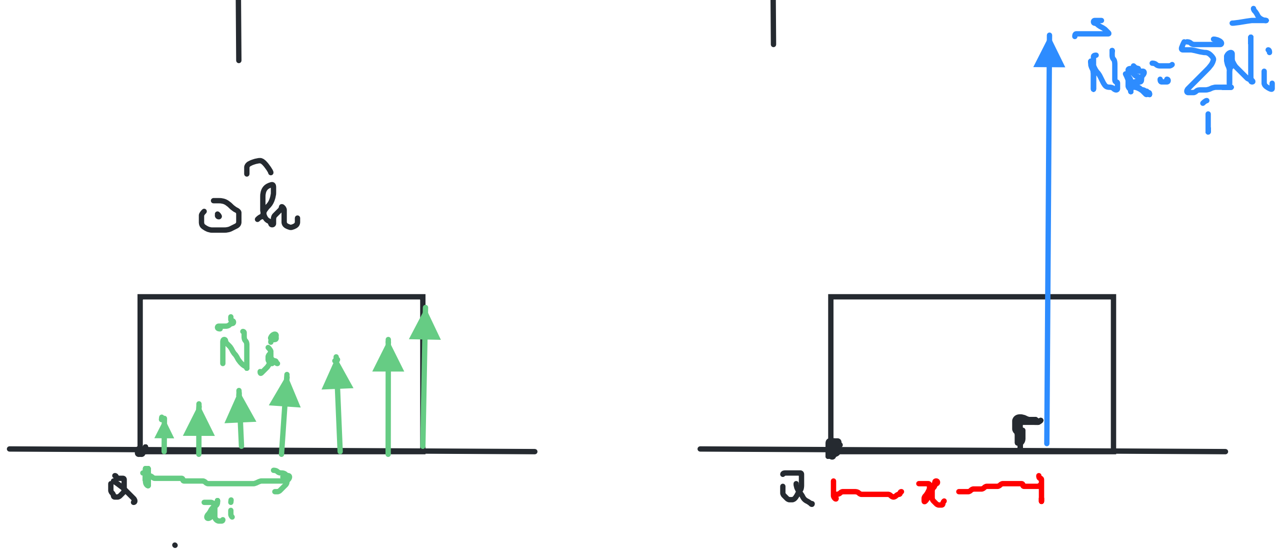
→ Esto se puede hacer de muchas formas...

1) Una fuerza y un momento independientes: (útil para modelar soldaduras, empotramientos, etc)

2) Una fuerza $\vec{F}_R$ y $\underbrace{\text{un brazo } x}$ respecto a Q

El punto de aplicación de $\vec{F}_R$ debe ser tal que el momento producido respecto a Q sea igual a la suma de los momentos de la distribución original





$$\vec{M}_Q^{F_i} = \left(\sum_i x_i N_i\right)\hat{k} = (x N_R)\hat{k}$$

3) Un par de fuerzas (verb)

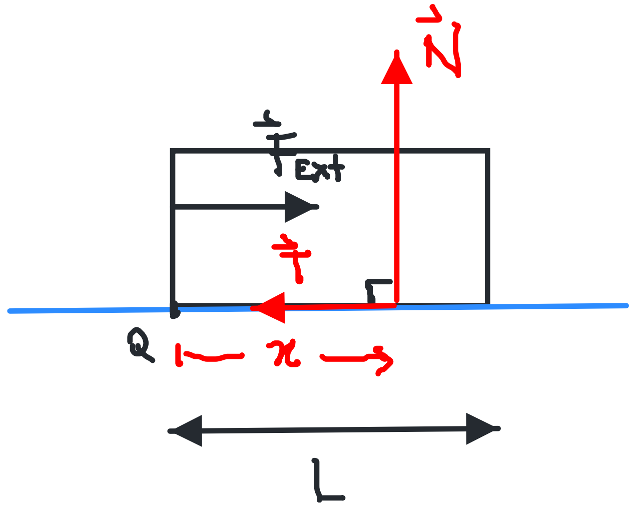
RUPTURA DEL EQUILIBRIO

→ Los vínculos se modelan mediante $\overbrace{\text{FUERZAS REACTIVAS}}^{\text{En realidad, sistema de fuerzas}}$ que, en el afán de preservar el vínculo, pueden modificar su valor y punto de aplicación (de la fuerza equivalente resultante)

→ Pero a veces no lo logran ⟹ RUPTURA DEL EQUILIBRIO

1) DESLIZAMIENTO → La condición de no deslizamiento es $|\vec{T}| \leq f_E |\vec{N}|$

→ Caso límite: $|\vec{T}| = f_E |\vec{N}|$



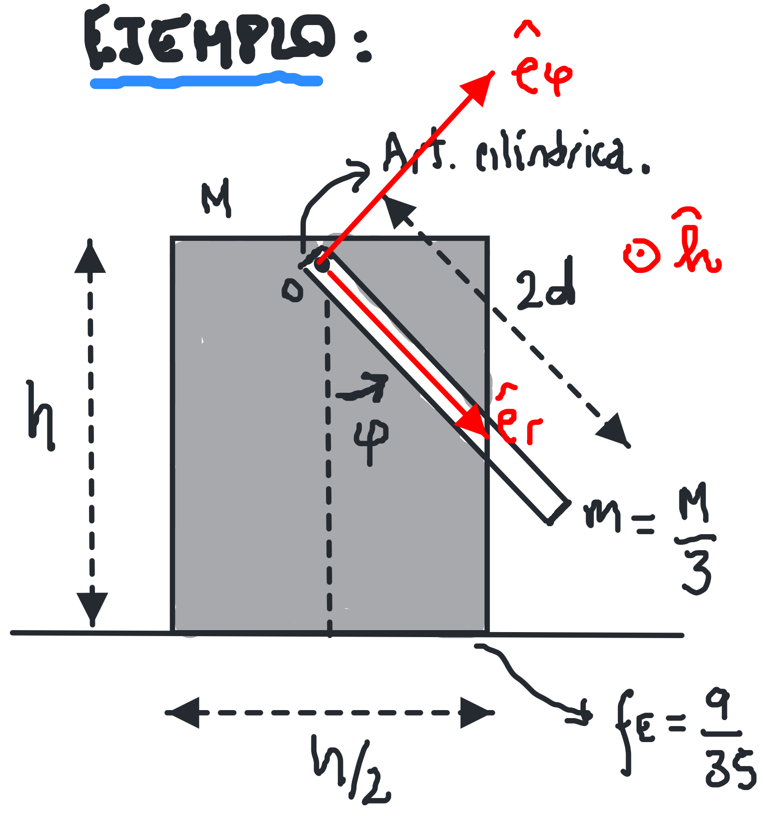
2) DESPRENDIMIENTO (vínculo unilateral) → Condición de no desprendimiento: $\vec{N} \neq 0$

→ Caso límite: $\vec{N} = 0$

3) VUELCO → Condición de no vuelco: $0 \leq x \leq L$ (normal dentro de la superficie de apoyo)

→ Caso límite: $x = 0$ ó $x = L$

EJEMPLO:



$\rightarrow$ En $t=0 \Rightarrow \varphi = \pi/2,\ \dot{\varphi} = 0$

a) Asumiendo que la placa no vuelca, hallar el ángulo en el que se encuentra el péndulo cuando comienza a deslizar

b) Asumiendo que no desliza, hallar el ángulo en el que se encuentra el péndulo cuando comienza a volcar

c) ¿Cómo se rompe el equilibrio?

IDEA: i) Estudiar la dinámica del péndulo para hallar las fuerzas que le genera la placa.

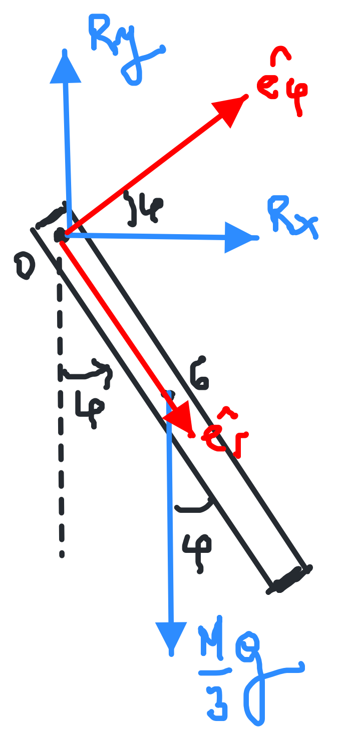
ii) Colocar las correspondientes reacciones sobre la placa y recién ahí plantear sus condiciones de equilibrio

LAS REACCIONES SE OBTIENEN DE LA 1ª CARDINAL: $\vec{F}_N^{EXT} = M\vec{a}_G$

$$\vec{r}_G = d\hat{e}_r \Rightarrow \vec{v}_G = d\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi \Rightarrow \boxed{\vec{a}_G = d\ddot{\varphi}\hat{e}_\varphi - d\dot{\varphi}^2\hat{e}_r}$$

$$\vec{F}_N = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} - \frac{M}{3}g\hat{j}$$

$$\Rightarrow R_x\hat{i} + R_y\hat{j} - \frac{M}{3}g\hat{j} = \left[-d\dot{\varphi}^2(\sin\varphi\,\hat{i} - \cos\varphi\,\hat{j}) + d\ddot{\varphi}(\cos\varphi\,\hat{i} + \sin\varphi\,\hat{j})\right]M/3$$



$\hat{e}_r = \sin\varphi\,\hat{i} - \cos\varphi\,\hat{j}$

$\hat{e}_\varphi = \cos\varphi\,\hat{i} + \sin\varphi\,\hat{j}$

$$\vec{F}_N\cdot\hat{i} = \frac{M}{3}\vec{a}_G\cdot\hat{i} \Rightarrow \boxed{R_x = \frac{M}{3}d\left[-\dot{\varphi}^2\sin\varphi + \ddot{\varphi}\cos\varphi\right]}$$

$$\vec{F}_N\cdot\hat{j} = \frac{M}{3}\vec{a}_G\cdot\hat{j} \Rightarrow \boxed{R_y = \frac{M}{3}\left[g + d(\dot{\varphi}^2\cos\varphi + \ddot{\varphi}\sin\varphi)\right]} \quad (1)$$

OBS: Como la discusión debe hacerse en función del ángulo, es necesario hallar $\ddot{\varphi}(\varphi)$ y $\dot{\varphi}^2(\varphi)$ $\Rightarrow$ VARIAS FORMAS...

Necesitamos hallar $\ddot{\varphi}(\varphi)$ (ec. de movimiento) y $\dot{\varphi}^2(\varphi)$

FORMA 1 (natural): 2da CARDINAL $\longrightarrow$ $\underbrace{\vec{M}^{ext}_{O} \cdot \hat{k}} = [M(\vec{r}_G - \vec{r}_O) \times \ddot{\vec{r}}_O \cdot \hat{k} + I_O \dot{\vec{w}} + \vec{w} \times (I_O \vec{w})] \cdot \hat{k}$

$$-\frac{M}{3} g d \sin\varphi = I_{O33} \ddot{\varphi} \Rightarrow \ddot{\varphi}(\varphi) = -\frac{Mgd}{3 I_{O33}} \sin\varphi$$

$I_G = \frac{ML^2}{12}$

STEINER

Falta $I_{O33} = I_{G33} + \frac{M}{3} d^2 = \frac{M (2d)^2}{3 \cdot 12} + \frac{Md^2}{3} = \frac{Md^2}{9} + \frac{Md^2}{3} = \frac{4}{9} Md^2 \Longrightarrow \boxed{\ddot{\varphi}(\varphi) = -\frac{3}{4}\frac{g}{d} \sin\varphi}$ (2)

Luego, $\dot{\varphi}(\varphi)$ se puede obtener preintegrando la relación anterior, o, alternativamente...

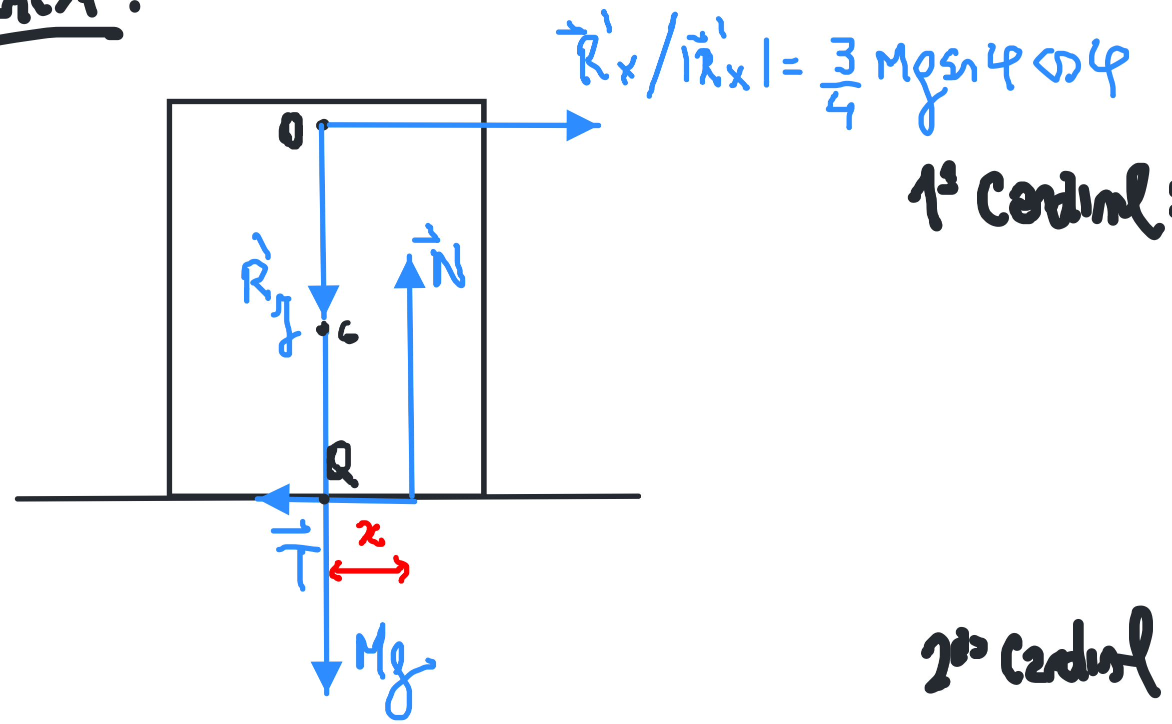
FORMA 2: ENERGÍA $\rightarrow$ $T = \frac{1}{2} M v_O^2 + \frac{1}{2} \vec{w} \cdot (I_O \vec{w}) + M \vec{v}_O \cdot [\vec{w} \times (\vec{r}_G - \vec{r}_O)] = \frac{1}{2} I_{O33} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\frac{4}{9} Md^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{2}{9} Md^2 \dot{\varphi}^2$

$U = -\frac{M}{3} g d \cos\varphi$

$\Rightarrow E = T + U = \frac{2}{9} Md^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{M}{3} g d \cos\varphi \overset{t=0}{=} 0 \Rightarrow \boxed{\dot{\varphi}^2 = \frac{3}{2}\frac{g}{d} \cos\varphi}$ (3) (luego, $\ddot{\varphi}(\varphi)$ se obtiene derivando)

A partir de (1), (2) y (3), se obtiene que: $\boxed{\begin{cases} R_x = -\frac{3}{4} Mg \sin\varphi \cos\varphi \\ R_y = \frac{Mg}{12}(9\cos^2\varphi + 1) \end{cases}}$ Ahora estamos en condiciones de analizar la placa...

PLACA:



1ª Cardinal: $\begin{cases} \vec{R}'_x + \vec{T} = 0 \Rightarrow \boxed{|\vec{T}| = \frac{3}{4} Mg \sin\varphi \cos\varphi} \quad (\text{asumiendo } 0 \leq \varphi \leq \pi/2) \\ \vec{R}'_y + \vec{N} + \vec{P} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{N} = \frac{Mg}{12}(13 + 9\cos^2\varphi)} \end{cases}$

2ª Cardinal: $\vec{M}_Q = 0 \Rightarrow -R'_x h \hat{k} + N x \hat{k} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{R'_x h}{N} = \frac{9h \sin\varphi \cos\varphi}{9\cos^2\varphi + 13}}$$

$\underline{\text{OBS}}$: $\vec{N} = Mg\left(\dfrac{13+9\cos^2\varphi}{12}\right) \neq 0 \;\forall \varphi \Rightarrow$ PERMANECE APOYADA (AUNQUE PUEDE VOLCAR)

c) Asumiendo que no vuelca, hallar $\varphi_{\text{deslizamiento}}$

$|\vec{T}| = f_E |\vec{N}| \Rightarrow \dfrac{3}{4} Mg \sin\varphi \cos\varphi = \dfrac{9}{35} Mg \left(\dfrac{13+9\cos^2\varphi}{12}\right) \Rightarrow 35 \sin\varphi \cos\varphi = 13 + 9\cos^2\varphi$

TRUCO: $/\!/.\ \cos^2\varphi$ y uso que $\dfrac{1}{\cos^2\varphi} = \dfrac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{\cos^2\varphi} = 1 + tg^2\varphi \Rightarrow$ Expreso la ecuación en términos de $tg\,\varphi$

$\Rightarrow \dfrac{35 \sin\varphi \cos\varphi}{\cos^2\varphi} = \dfrac{13}{\cos^2\varphi} + 9 \Rightarrow 35\, tg\varphi = 13(1+tg^2\varphi) + 9 \Rightarrow \boxed{13\, tg^2\varphi - 35\, tg\varphi + 22 = 0}$

C.V: $u = tg\varphi \Rightarrow$ EC. DE 2^{do} GRADO

$\Rightarrow tg\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 45^\circ$

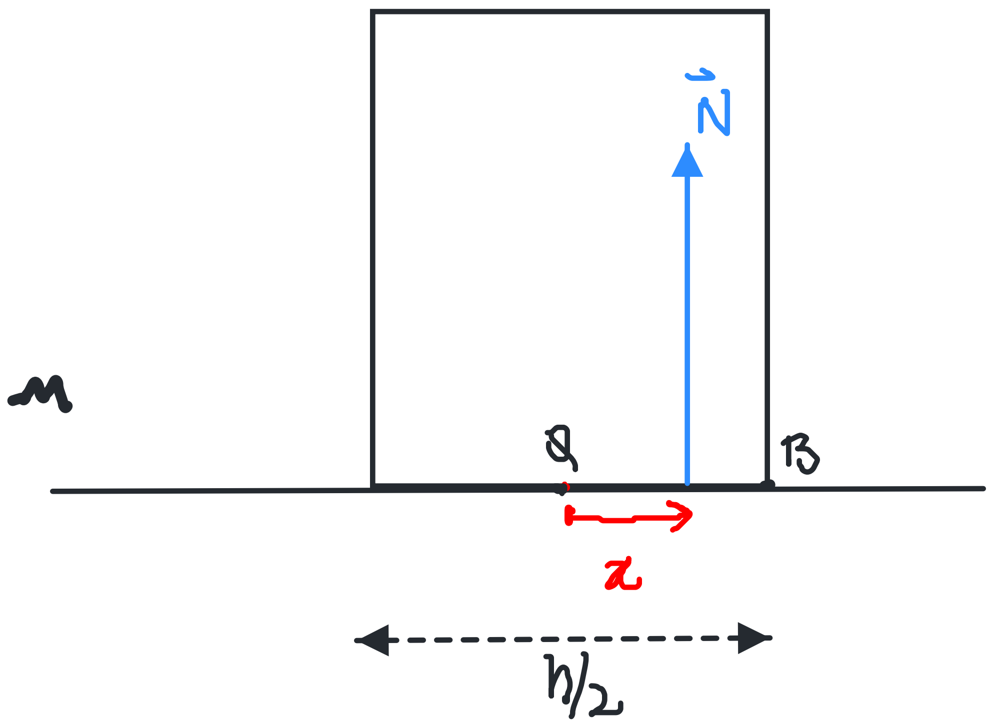
$\Rightarrow tg\varphi = \dfrac{22}{13} \Rightarrow \boxed{\varphi = 59{,}42^\circ = \varphi_d}$

(se alcanza antes que el otro porque partimos de $\varphi = 90^\circ$)

b) Asumiendo que no desliza, hallar φ_V

$$x = \frac{9h\sin\varphi\cos\varphi}{9\cos^2\varphi + 13}$$

La condición de no vuelco es: $\overbrace{-\frac{h}{4} \leq x}^{\checkmark} \leq \frac{h}{4}$ $\Rightarrow$ si vuelca, lo hará en sentido horario (respecto de B)



$$\Rightarrow \frac{9\cancel{h}\sin\varphi\cos\varphi}{9\cos^2\varphi+13} = \frac{\cancel{h}}{4} \Rightarrow 36\sin\varphi\cos\varphi = 9\cos^2\varphi + 13$$

$$\xrightarrow{\cdot/\cos^2\varphi} 36\tan\varphi = 9 + 13(1+\tan^2\varphi)$$

$$\Rightarrow 13\tan^2\varphi - 36\tan\varphi + 22 = 0$$

$\boxed{\varphi \simeq 61{,}72^\circ = \varphi_V}$

$\varphi \simeq 42{,}36^\circ$

CONCLUSIÓN:

Como $\varphi_V \simeq 61{,}72^\circ > 57{,}42^\circ = \varphi_d$ y φ decrece partiendo de los 90°

$\Rightarrow$ VUELCA CUANDO $\varphi \simeq 61{,}72^\circ$

(En un principio, sin deslizar)