CLASE 11 - CANTIDADES CONSERVADAS EN SISTEMAS RÍGIDOS

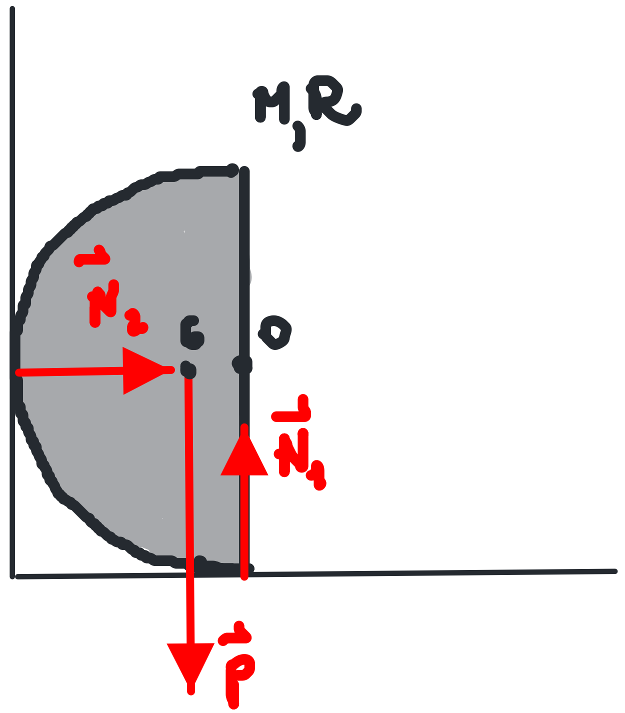
Aprenderemos a:

→ Calcular la potencia realizada por una fuerza sobre un sistema rígido

→ Investigar si la energía es una constante del movimiento. En caso afirmativo, obtener una de las ecuaciones de movimiento mediante argumentos energéticos

→ Analizar la existencia de otras cantidades conservadas y, en caso de encontrar alguna, utilizar su constancia para obtener otra ecuación de movimiento

EJEMPLO



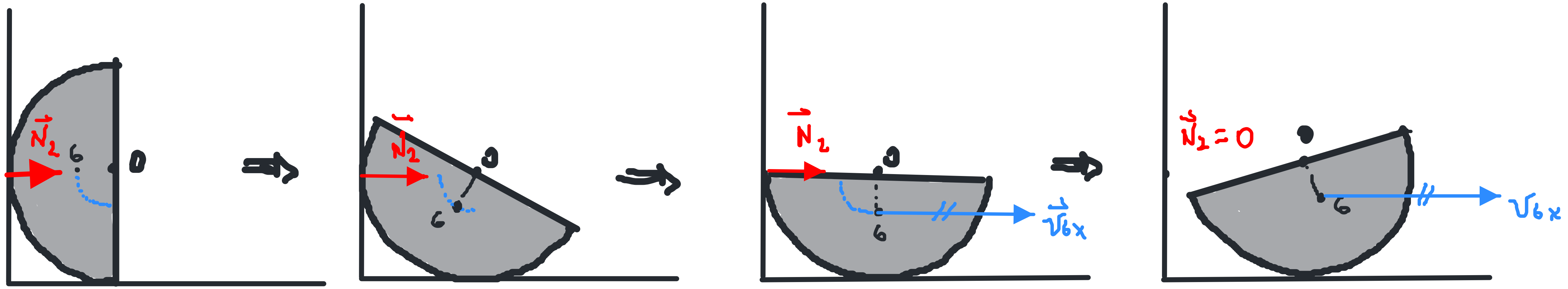
→ Semidisco homogeneo de masa M y radio R se coloca en reposo en la posición de la figura (contactos lisos). ¿Qué ocurre?

OBS 1: La pared ejerce una normal no nula (para demostrarlo, se puede razonar cómo sería el movimiento en ausencia de la pared. Sug: plantear 1ª cardinal en la dir. horizontal

OBS 2: Las normales no producen momento respecto a O, ya que dicho punto pertenece a la recta sostén de ambas fuerzas

OBS 3: Como G se encuentra a la izquierda de O, el peso sí produce momento respecto a O

⟹ CUERPO ROTARÁ CON CENTRO O HASTA DESPEGARSE DE LA PARED



OBS 4: Mientras rota, el CM DESCRIBE UNA TRAYECTORIA CIRCULAR (está acelerado)

$\vec{N}_2$ es responsable de la aceleración horizontal de G
$\vec{N}_1 - \vec{P}$ " " " " " vertical " G

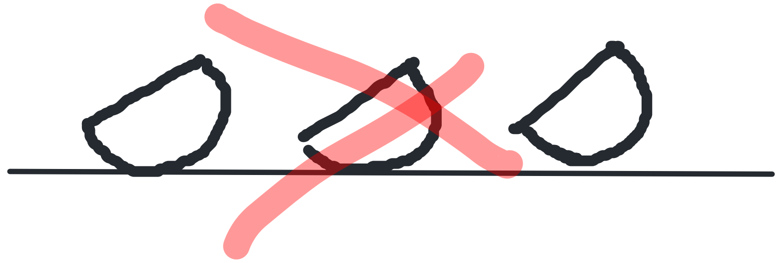
OBS 5: Al despegarse de la pared ($\vec{N}_2 = 0$) DEJA DE HABER FUERZA HORIZONTAL

Como $\vec{F}_x^{EXT} = \dot{\vec{p}}_x = 0 \Rightarrow \vec{p}_x = cte \neq 0$, $\vec{p}_x = M v_{Gx}$ $\Big\} \Rightarrow v_{Gx} = cte \Rightarrow$ SE VA HACIA LA DERECHA!

OBS 6: Como los contactos son lisos SE CONSERVA LA ENERGÍA (LUEGO LO VEREMOS EN DETALLE)

OBS 7: ¿Puede alcanzar la posición "parado" en el movimiento posterior? ¿Por qué?
Sugerencia: observar que si $v_G \neq 0 \Rightarrow$ algo de la energía será necesariamente cinética...

OBS 8: ¿Puede quedar en inclinación constante?
Sugerencia: Analizar los momentos producidos por $\vec{P}_g$ $\vec{N}_1$...



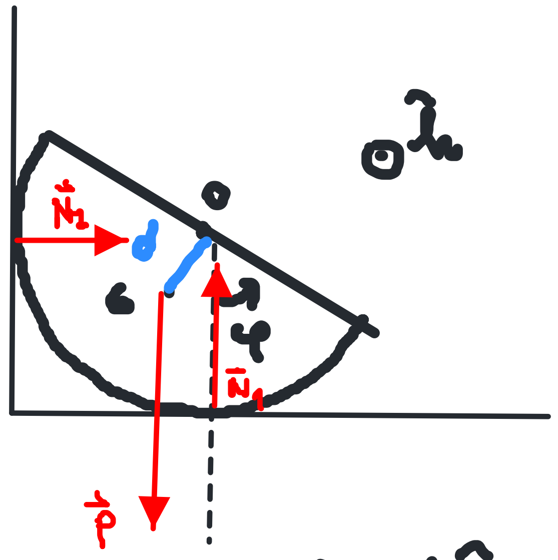
$\Rightarrow$ CONCLUSIÓN: Se irá hacia la derecha oscilando

$\Rightarrow$ Nos interesa calcular la máxima inclinación que alcanza en el movimiento posterior (agregaremos algunas preguntas intermedias para "guiar" el problema)

i) Calcular la velocidad angular del semidisco en el momento en que se separa de la pared

OBS: No se puede resolver por 1ª cardinal (aparecen 2 fuerzas ortogonales desconocidas → $\vec{N}_1, \vec{N}_2$)

OBS 2: Sin embargo, $\vec{N}_1$ y $\vec{N}_2$ NO PRODUCEN MOMENTO RESPECTO A O → SI APLICAMOS 2da CARDINAL RESPECTO A O, NO FIGURAN!



$$\vec{M}_O^{EXT} = \vec{M}_O^{\vec{N}_1} + \vec{M}_O^{\vec{N}_2} + \vec{M}_O^{\vec{P}} = Mgd\cos\varphi\,\hat{k}$$

2da Cardinal para un problema plano:

$$\underbrace{\vec{M}_O^{Ext} \cdot \hat{k}} = [M(\vec{r}_G - \vec{r}_O) \times \ddot{\vec{r}}_O^{\,0}] \cdot \hat{k} + I_{O33}\,\dot{w}_3$$

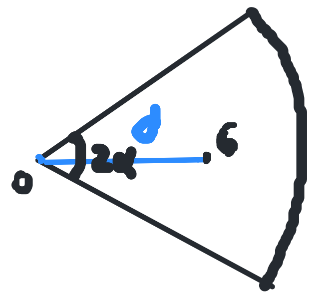
$$Mgd\cos\varphi = I_{O33}\ddot{\varphi} \Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} = \frac{Mgd\cos\varphi}{I_{O33}}}$$

EC. MOV. MIENTRAS ESTA APOYADO EN LA PARED.

$$\vec{w} = \dot{\varphi}\hat{k} = (0, 0, \dot{\varphi})$$

Paréntesis: Es necesario caracterizar el rígido $\Rightarrow d,\ I_{O33}$

$\underline{d}$: Ya demostramos que para un sector de círculo de ángulo 2α $\Rightarrow d = \dfrac{2R\sin\alpha}{3\alpha}$



En este caso $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ $\boxed{d = \dfrac{2R\sin(\pi/2)}{3\pi/2} = \dfrac{4R}{3\pi}}$ (si no conoce ese resultado, integre!)

$\underline{I_{O33}}$: Disco de masa M y radio R $\Rightarrow I_{O33} = \dfrac{MR^2}{2}$

Disco de masa $2M$ y radio R $\Rightarrow I_{O33} = \dfrac{(2M)R^2}{2} = MR^2$

Como el semidisco de masa M y radio R tiene la mitad de la inercia del caso anterior

$\Rightarrow$ $\boxed{I^{\,◓\, M,R}_{O33} = \dfrac{1}{2}\, I^{\,\bigcirc\, 2M,R}_{O33} = \dfrac{1}{2}MR^2}$ (También se puede obtener mediante integración)

Teníamos: $\ddot{\varphi} = \frac{Mgd\cos\varphi}{I_{33}} \xRightarrow{\text{preintegrando}} \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \cancel{\frac{\dot{\varphi}_0^2}{2}} = \frac{Mgd}{I_{33}}\left(\sin\varphi - \cancel{\sin\varphi_0}\right) \Rightarrow \dot{\varphi}(\varphi) = \sqrt{\frac{2Mgd\sin\varphi}{I_{33}}}$

Se separa cuando $\varphi = \pi/2 \Rightarrow \boxed{\dot{\varphi}(\pi/2) = \sqrt{\frac{2Mgd}{I_{33}}} = 4\sqrt{\frac{g}{3\pi R}}}$

OTRA ALTERNATIVA: ENERGÍA

→ En este caso es más directo ya que la conservación de E se representa mediante una ecuación de 1ª orden en φ ⇒ Permite despejar $\dot{\varphi}$ directamente

→ Para demostrar que la energía se conserva debemos mostrar que NO ACTÚAN FUERZAS RESIDUALES

→ En particular, debemos ser capaces de calcular la POTENCIA realizada por $\vec{F}$ sobre un rígido...

POTENCIA

→ $\boxed{P^{\vec{F}} = \vec{F}\cdot\vec{v}_P}$ (1) donde P es el punto de aplicación de $\vec{F}$

→ A veces conviene expresarla en términos de la velocidad de otro punto del rígido ⇒ DIST. VELOCIDADES

$$\left.\begin{array}{l} P^{\vec{F}} = \vec{F}\cdot\vec{v}_P \\ \vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega}\times(\vec{r}_P-\vec{r}_Q) \end{array}\right\} \Rightarrow P^{\vec{F}} = \vec{F}\cdot(\vec{v}_Q + \vec{\omega}\times(\vec{r}_P-\vec{r}_Q))$$

$$= \vec{F}\cdot\vec{v}_Q + \vec{F}\cdot[\vec{\omega}\times(\vec{r}_P-\vec{r}_Q)]$$

prop. cíclica

$$= \vec{F}\cdot\vec{v}_Q + [\underbrace{(\vec{r}_P-\vec{r}_Q)\times\vec{F}}_{M_Q^{\vec{F}}}]\cdot\vec{\omega} \Rightarrow \boxed{P^{\vec{F}} = \vec{F}\cdot\vec{v}_Q + M_Q^{\vec{F}}\cdot\vec{\omega}} \quad (2)$$

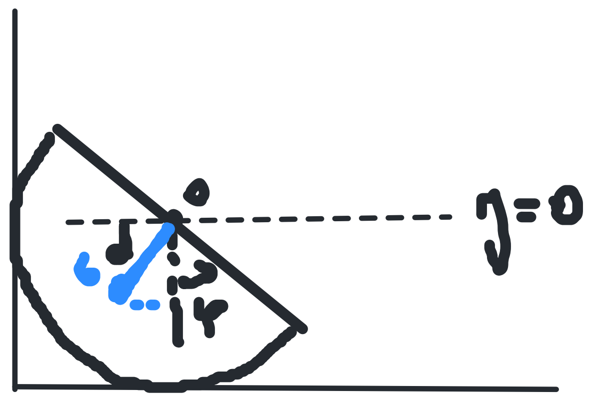
OBS: La ec.(2) es más general, ya que la (1) predice potencia nula para distribuciones de fuerzas modeladas con una resultante y un momento en puntos fijos, cuando en realidad EL MOMENTO PUEDE ENTREGAR ENERGÍA AL SISTEMA

Volviendo al problema: $\rightarrow \vec{P}$ conservativo

$\rightarrow P^{\vec N_1} = \vec N_1 \cdot \underbrace{\vec v_0}_{=0} + \underbrace{\vec M_0^{\vec N_1}}_{=0} \cdot \vec w = 0$, idem $P^{\vec N_2} = 0$ $\Big\}$ SISTEMA CONSERVATIVO

$$T = \underbrace{\cancel{\frac{1}{2} M v_0^2}}_{q=0} + \frac{1}{2}\vec w \cdot (\mathbb{I}_0 \vec w) + \cancel{M\vec v_0 \cdot [\vec w \times (\vec r_G - \vec r_0)]} = \frac{1}{2} I_{33}\dot\varphi^2$$

$$U = U_{P_G} \overset{y=0 \text{ en } O}{=} -Mgd\sin\varphi$$



$y_G = -d\sin\varphi$

$$E = T + U = \frac{1}{2} I_{o33}\dot\varphi^2 - Mgd\sin\varphi \overset{t=0}{=} \frac{1}{2} I_{o33}\cancel{\dot\varphi_0^2} - \cancel{Mgd\sin\varphi_0} = 0$$

$$\Rightarrow \dot\varphi^2 = \frac{2Mgd\sin\varphi}{I_{33}} \Rightarrow \dot\varphi(\pi/2) = \sqrt{\frac{2Mgd}{I_{33}}} = 4\sqrt{\frac{g}{3\pi R}}$$

se llega de forma mucho más directa!

NOTA: Si quisiera calcular las normales $\Rightarrow$ Aplicar 1ª cardinal (ya conozco $\dot\varphi(\varphi)$, $\ddot\varphi(\varphi)$, necesario para escribir $\vec a_G$)

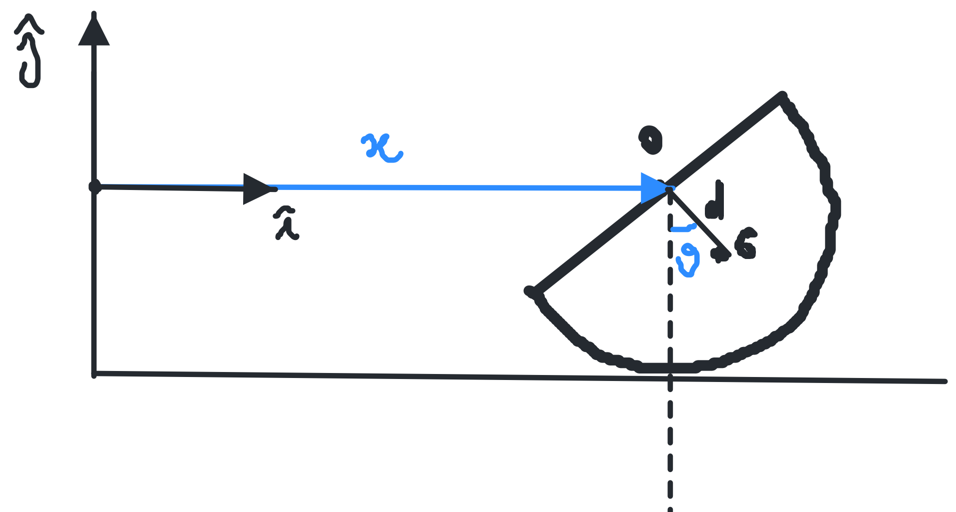
ii) ¿Qué cantidades se conservan en el movimiento posterior?

Esta pregunta implica:
1) Identificarlas
2) Justificar su constancia
3) Calcularlas en función de las coordenadas y sus derivadas
4) Calcular su valor numérico (evaluarlas en $t=0$ o donde haya info.)

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{F}^{ext} = \vec{N}_1 - \vec{P} \Rightarrow \vec{F}^{ext}\cdot\hat{\lambda} = 0 \\ \vec{F}^{ext} = \dot{\vec{p}} \Rightarrow \vec{F}^{ext}\cdot\hat{\lambda} = \dot{\vec{p}}\cdot\hat{\lambda} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{\vec{p}}\cdot\hat{\lambda} = 0 \\ \hat{\lambda}\ \text{cte} \Rightarrow \frac{d(\vec{p}\cdot\hat{\lambda})}{dt} = \dot{\vec{p}}\cdot\hat{\lambda} \end{array} \left|\ \frac{d(\vec{p}\cdot\hat{\lambda})}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p}\cdot\hat{\lambda} = \text{cte}\right.$$

$\Rightarrow$ SE CONSERVA EL MOMENTO LINEAL SEGÚN $\hat{\lambda}$ (Equivalentemente, como $\vec{p}\cdot\hat{\lambda} = M\vec{v}_G\cdot\hat{\lambda}$, se conserva la velocidad horizontal de G, v_{Gx})

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{P}\ \text{conservativo} \\ \vec{P}^{N_1} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{SE CONSERVA LA ENERGÍA MECÁNICA}$$



MOMENTO LINEAL

$$\vec{r}_G = (x + d\sin\theta)\hat{\imath} - d\sin\theta\,\hat{\jmath} \Rightarrow \vec{v}_G = [\dot{x} + d\cos\theta\,\dot{\theta}]\hat{\imath} - d\cos\theta\,\dot{\theta}\,\hat{\jmath}$$

Luego $\vec{v}_G \cdot \hat{\imath} =$ $\boxed{\dot{x} + d\cos\theta\,\dot{\theta} \overset{t=0}{=} d\dot{\varphi}(\pi/2) = 4d\sqrt{\frac{g}{3\pi R}}}$

ENERGÍA

$$T \overset{Q\equiv G}{=} \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot(I_G\vec{\omega}) + \cancel{M\vec{v}_Q\cdot[\vec{\omega}\times(\vec{r}_G - \vec{r}_Q)]} = \frac{1}{2}M(\dot{x} + d\cos\theta\,\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}Md^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(\overbrace{I_{O33} - Md^2}^{\text{STEINER}})\dot{\theta}^2$$

$$U = -Mgd\cos\theta$$

$$\Rightarrow E = \boxed{\frac{1}{2}M(\dot{x} + d\cos\theta\,\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}Md^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(I_{O33} - Md^2)\dot{\theta}^2 - Mgd\cos\theta \overset{t=0}{=} 0}$$

$\Rightarrow$ Tenemos 2GL y 2 cantidades conservadas $\Rightarrow$ Problema "resuelto"

iii) Hallar la máxima inclinación alcanzada en el movimiento posterior

OBS: Cuando se alcanza la máxima inclinación $\Rightarrow \dot{\theta} = 0$

$$\dot{x} + d\cos\theta\,\dot{\theta} = 4d\sqrt{\frac{g}{3\pi R}}$$

$$\frac{1}{2}M(\dot{x} + d\cos\theta\,\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}Md^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(I_{33} - Md^2)\,\dot{\theta}^2 - Mgd\cos\theta_m = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}M\,\frac{16d^2g}{3\pi R} = Mgd\cos\theta_m$$

$$\Rightarrow \frac{8d}{3\pi R} = \cos\theta_m$$

$$d = \frac{4R}{3\pi}$$

$$\Rightarrow \cos\theta_m = \frac{8\cdot 4R}{9\pi^2 R} \Rightarrow \boxed{\theta_m = \arccos\left(\frac{32}{9\pi^2}\right) \approx 69^\circ}$$