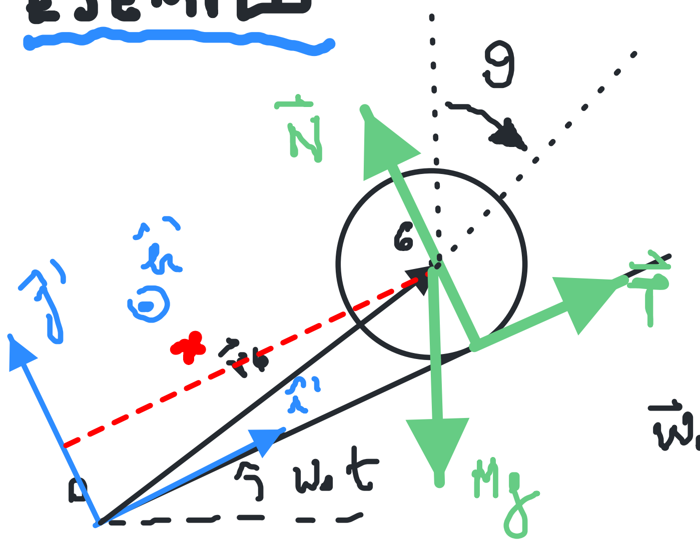
EJEMPLO



$\vec{w}_d = -\dot{\theta}\hat{k}'$

→ Varilla de masa M y largo L gira respecto a O fijo con $\vec{w} = w_0\hat{k}$

→ Disco de masa M y radio R RSD sobre varilla de masa m y largo L

→ Inicialmente → varilla horizontal
→ $x(0)=0$, $\vec{v}_G(0) = \frac{2g}{5R}\hat{\imath}$

i) Hallar la ley horaria (posición de G disco como función de t)

ii) Condición para que no se despegue en entorno de t=0

iii) Momento externo sobre la varilla para que el movimiento sea el indicado

i) 1° CARDINAL

$$\vec{r}_G = x\hat{\imath}' + R\hat{\jmath}'$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{\imath}}' = \vec{w}\times\hat{\imath}' = w_0\hat{k}'\times\hat{\imath}' = w_0\hat{\jmath}' \\ \dot{\hat{\jmath}}' = \vec{w}\times\hat{\jmath}' = w_0\hat{k}'\times\hat{\jmath}' = -w_0\hat{\imath}' \end{cases}$$

→ $\vec{v}_G = \dot{x}\hat{\imath}' + x\dot{\hat{\imath}}' + R\dot{\hat{\jmath}}'$ → $\boxed{\vec{v}_G = (\dot{x} - Rw_0)\hat{\imath}' + xw_0\hat{\jmath}'}$

→ $\vec{a}_G = \ddot{x}\hat{\imath}' + (\dot{x} - Rw_0)\dot{\hat{\imath}}' + \dot{x}w_0\hat{\jmath}' + xw_0\dot{\hat{\jmath}}'$

→ $\boxed{\vec{a}_G = (\ddot{x} - xw_0^2)\hat{\imath}' + (2\dot{x}w_0 - Rw_0^2)\hat{\jmath}'}$

$$\Rightarrow \vec F_N = M\vec a_c \Rightarrow \vec F_N\cdot\hat i = M\vec a_c\cdot\hat i \Rightarrow \boxed{T - Mg\sin(\omega_0 t) = M(\ddot x - x\omega_0^2)} \quad (1)$$

$$\vec F_N\cdot\hat j = M\vec a_G\cdot\hat j \Rightarrow \boxed{N - Mg\cos(\omega_0 t) = M(2\dot x\omega_0 - R\omega_0^2)} \quad (2)$$

2nd CARDINAL

(problema plano)

$$\vec M^{ext}_{Q\in R} = M(\vec r_G - \vec r_Q)\times\vec a_Q + I_Q\dot{\vec\omega} + \cancel{\vec\omega\times(I_Q\vec\omega)} \xRightarrow{Q=G} \vec M^{ext}_G\cdot\hat k = I_{33}\dot\omega_3$$

$$\vec\omega = -\dot\theta\hat k = (0,0,-\dot\theta) \Rightarrow \omega_3 = -\dot\theta \Rightarrow \dot\omega_3 = -\ddot\theta$$

$$I_{G_{33}} = \frac{MR^2}{2}$$

$$\vec M^{ext}_G = \cancel{\vec M^{P}_G} + \cancel{\vec M^{N}_G} + \vec M^{T}_G = \vec M^{T}_G = TR\hat k$$

$$\Rightarrow TR = -\frac{MR^2}{2}\ddot\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{T = -\frac{MR}{2}\ddot\theta} \quad (3)$$

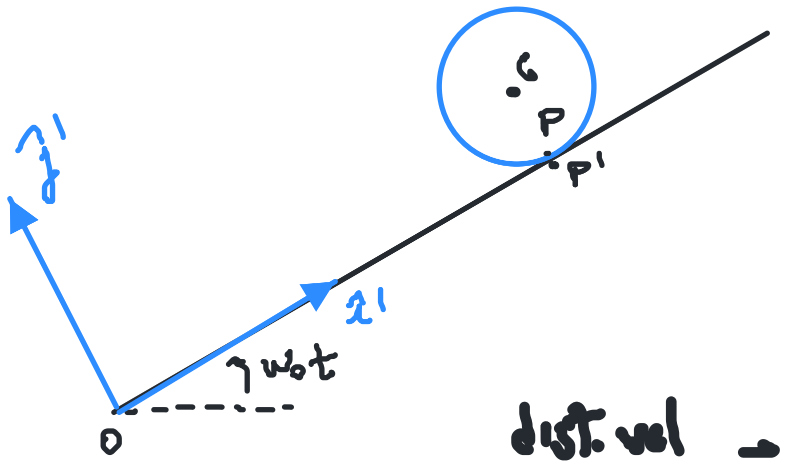
Por ahora: $\begin{cases} \text{4 incógnitas} \rightarrow T, N, x, \theta \ \text{(y sus derivadas)} \\ \text{3 ecuaciones} \rightarrow \begin{array}{l} 1^{a} \text{ cardinal según } \hat{\imath}', \hat{\jmath}' \\ 2^{a} \text{ cardinal } \text{"} \ \hat{k}' \end{array} \end{cases}$ $\Rightarrow$ ¿Qué falta?

Condición de rodadura: $\vec{v}_P = \vec{v}_{P'}$

$$\vec{v}_{P'} = \cancel{\vec{v}_O} + \vec{\omega}_{varilla} \times (\vec{r}_{P'} - \vec{r}_O) = \omega_0 \hat{k}' \times x\,\hat{\imath}' = \omega_0 x\,\hat{\jmath}'$$

(también se puede notar que los puntos de la varilla describen un MCU)

$$\Rightarrow \vec{v}_P = \omega_0 x\,\hat{\jmath}'$$



Por otro lado, teníamos que: $\vec{v}_G = (\dot{x} - R\omega_0)\hat{\imath}' + \omega_0 x\,\hat{\jmath}'$

dist. vel

$$\Rightarrow \vec{v}_G = \vec{v}_P + \vec{\omega}_{disco} \times (\vec{r}_G - \vec{r}_P)$$

$$(\dot{x} - R\omega_0)\hat{\imath}' + \cancel{\omega_0 x\,\hat{\jmath}'} = \cancel{\omega_0 x\,\hat{\jmath}'} - \dot{\theta}\hat{k}' \times R\hat{\jmath}' \Rightarrow (\dot{x} - R\omega_0)\cancel{\hat{\imath}'} = R\dot{\theta}\cancel{\hat{\imath}'} \Rightarrow \dot{x} - R\omega_0 = R\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} = R\ddot{\theta}} \ (4)$$

$$\left\{\begin{array}{ll} T - Mg\sin(\omega_0 t) = M(\ddot{x} - x\omega_0^2) & (1) \\ N - Mg\cos(\omega_0 t) = M(2\dot{x}\omega_0 - R\omega_0^2) & (2) \\ T = -\frac{MR}{2}\ddot{\theta} & (3) \\ \ddot{x} = R\ddot{\theta} & (4) \end{array}\right. \Rightarrow T = -\frac{MR}{2}\frac{\ddot{x}}{R} \Rightarrow T = -\frac{M}{2}\ddot{x}$$

$$\Rightarrow -\frac{M}{2}\ddot{x} - Mg\sin(\omega_0 t) = M\ddot{x} - Mx\omega_0^2$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}M\ddot{x} - Mx\omega_0^2 = -Mg\sin(\omega_0 t) \Rightarrow \boxed{\ddot{x} - \frac{2}{3}\omega_0^2 x = -\frac{2}{3}g\sin(\omega_0 t)}$$

EC. DE MOVIMIENTO

lineal, coef. ctes, heterogénea

$\Rightarrow$ ADMITE SOLUCIÓN ANALÍTICA

1) Homogénea: $\ddot{x} - \frac{2}{3}\omega_0^2 x = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \frac{2}{3}\omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2/3}\,\omega_0 \Rightarrow x_H(t) = C_1 e^{\sqrt{2/3}\,\omega_0 t} + C_2 e^{-\sqrt{2/3}\,\omega_0 t}$

2) Particular: Proponemos $x_p(t) = A\sin(\omega_0 t) \Rightarrow \ddot{x} = -\omega_0^2 A\sin(\omega_0 t)$

Sustituyendo: $-\omega_0^2 A\cancel{\sin(\omega_0 t)} - \frac{2}{3}\omega_0^2 A\cancel{\sin(\omega_0 t)} = -\frac{2}{3}g\cancel{\sin(\omega_0 t)} \Rightarrow A = \frac{2g}{5\omega_0^2} \Rightarrow x_p(t) = \frac{2g}{5\omega_0^2}\sin(\omega_0 t)$

3) $x(t) = x_H(t) + x_p(t) = C_1 e^{\sqrt{2/3}\,w_0 t} + C_2 e^{-\sqrt{2/3}\,w_0 t} + \frac{2g}{5w_0^2}\sin(w_0 t)$

C_1 y C_2 se determinan a partir de los datos iniciales $x(0)=0$, $\dot{x}(0) = \frac{2g}{5w_0}$

$\Rightarrow C_1 = C_2 = 0$

$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{2g}{5w_0^2}\sin(w_0 t)}$

válida mientras no deslice ni se desprenda

ii) De 1ª cardinal: $N - Mg\cos(w_0 t) = M(2\dot{x}w_0 - Rw_0^2)$

$\Rightarrow N(t) = M\left[g\cos(w_0 t) + 2\dot{x}(t)w_0 - Rw_0^2\right]$, $\dot{x}(t) = \frac{2g}{5w_0}\cos(w_0 t)$

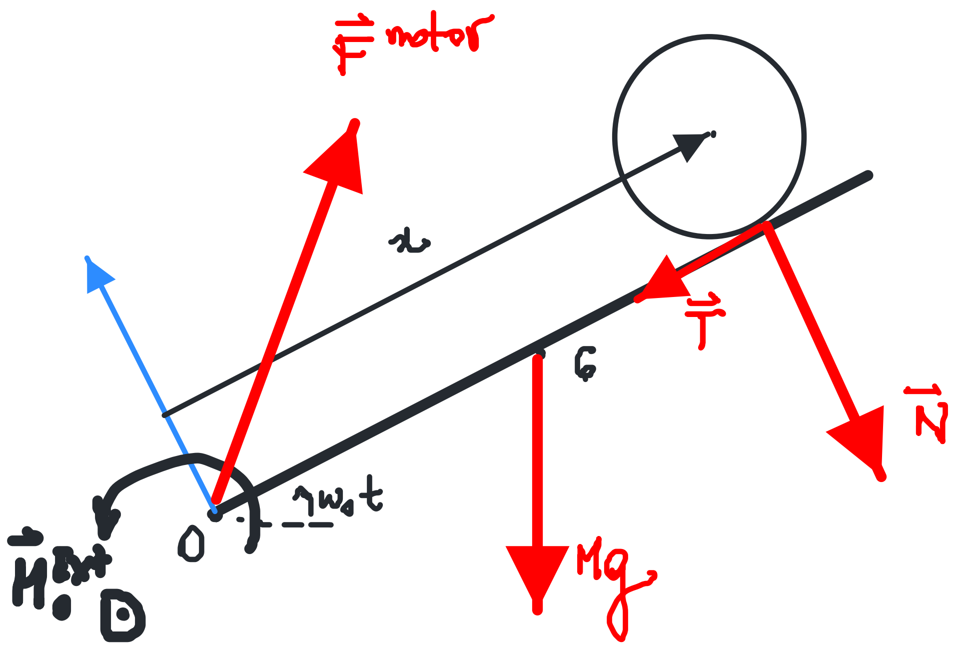
$\Rightarrow N(t) = M\left[\left(g + \frac{4}{5}g\right)\cos(w_0 t) - Rw_0^2\right]$

$\Rightarrow N(0) = M\left(\frac{9}{5}g - Rw_0^2\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{9}{5}g > Rw_0^2 \Leftrightarrow \boxed{w_0^2 < \frac{9g}{5R}}$

iii) Momento externo sobre la varilla / $\omega_0 = cte$

Obs 1: En la región próxima a O existe una distribución de fuerzas desconocidas que se puede modelar como una fuerza resultante (con 2 componentes) y UN MOMENTO

Obs 2: DICHO MOMENTO **NO** SE PUEDE calcular a partir de $\vec{M}_O = (\vec{r}_P - \vec{r}_O) \times \vec{F}_P$ pues dicha ecuación predice $\vec{M}_O = 0$ si $\vec{F}$ aplicada en O $(P = O)$ $\Rightarrow$ FUERZAS Y MOMENTOS REACTIVOS DEBEN TRATARSE COMO SI FUERAN INDEPENDIENTES



Momentos:

$$
\begin{cases}
\vec{M}_O^{\vec{P}} = -mg\,L/2 \cos(\omega_0 t)\,\hat{k} \\
\vec{M}_O^{\vec{N}} = -N x\,\hat{k} \\
\vec{M}_O^{\vec{T}} = 0 \\
\vec{M}_O^{\vec{F}_{motor}}
\end{cases}
$$

En este caso aplicaremos la 2ª cardinal a la barra en términos de $\vec{L}_o$:

$$\vec{L}_o = \cancel{m(\vec{r}_G - \vec{r}_o)\times\vec{v}_o} + \mathbb{I}_o\vec{w} = \mathbb{I}^{barra}_{o_{33}}\, w_0 \quad\Rightarrow\quad \dot{\vec{L}}_o = 0 \quad (\text{no es necesario calcular } \mathbb{I}^{barra}_{o33})$$

$$\cancel{\dot{\vec{L}}_o} = \cancel{m\vec{v}_G\times\vec{v}_o} + \vec{M}_o^{Ext} \quad\Rightarrow\quad \underbrace{\vec{M}_o^{Ext}}_{\vec{M}_o^{\vec{P}} + \vec{M}_o^{\vec{N}} + \cancel{\vec{M}_o^{\vec{T}}} + \vec{M}_o^{motor} = 0} = 0$$

$$\vec{M}_o^{\vec{P}} + \vec{M}_o^{\vec{N}} + \cancel{\vec{M}_o^{\vec{T}}} + \vec{M}_o^{motor} = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{M}_o^{motor} = -\vec{M}_o^{\vec{P}} - \vec{M}_o^{\vec{N}}$$

Luego: $\vec{M}_o^{motor} = [mgL\cos w_0 t + Nx]\,\hat{k}$ en

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{2g}{5w_0^2}\sin(w_0 t) \\[2mm] N(t) = M[g\cos(w_0 t) + 2w_0\dot{x}(t) - Rw_0^2] \\[1mm] \qquad = M\left[\dfrac{9}{5}g\cos(w_0 t) - Rw_0^2\right] \end{cases}$$

¿Cómo podríamos calcular la fuerza resultante aplicada por el motor?

Ciertamente NO a partir del momento calculado antes... $\Rightarrow$ 1ª cardinal a la varilla

$$\vec{r}_G = \frac{L}{2}\hat{i}' \Rightarrow \vec{V}_G = \frac{L}{2}\omega_0\hat{j}' \Rightarrow \vec{a}_G = -\frac{L}{2}\omega_0^2\hat{i}'$$

$$\vec{F}^{ext}_{NETA} = m\vec{a}_G \Rightarrow \vec{F}^{ext}_N\cdot\hat{i}' = m\vec{a}_G\cdot\hat{i}' \Rightarrow -mg\sin(\omega_0 t) - T + F^{motor}_{x'} = -m\frac{L}{2}\omega_0^2$$

$$\vec{F}^{ext}_N\cdot\hat{j}' = m\vec{a}_G\cdot\hat{j}' \Rightarrow -N - mg\cos(\omega_0 t) + F^{motor}_{y'} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow F^{motor}_{x'} = T + mg\sin(\omega_0 t) - m\frac{L}{2}\omega_0^2 \\ &\text{Pero } T = M(\ddot{x} - x\omega_0^2 + g\sin(\omega_0 t)) = \frac{4}{5}Mg\sin(\omega_0 t)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{F^{motor}_{x'} = g\left(m + \frac{M}{5}\right)\sin(\omega_0 t) - m\frac{L}{2}\omega_0^2}$$

$$\left.\begin{aligned} &F^{motor}_{y'} = mg\cos(\omega_0 t) + N \\ &N = 9/5\, Mg\cos(\omega_0 t) - MR\omega_0^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{F^{motor}_{y'} = g\left(m + \frac{9M}{5}\right)\cos(\omega_0 t) - MR\omega_0^2}$$