DINÁMICA DEL RÍGIDO

Aprenderemos a:

- Plantear las ecuaciones que gobiernan la dinámica de un cuerpo rígido (ECUACIONES CARDINALES). Utilizarlas, en conjunto con el análisis de los vínculos, para hallar las ecuaciones del movimiento del rígido
- Utilizar en nuestro beneficio las libertades asociadas a la elección del origen y eje para que dichas ecuaciones adopten la forma más simple posible
- Obtener las expresiones de las ecuaciones cardinales para el caso particular de los PROBLEMAS PLANOS

⇨ Ya vimos que el movimiento de un rígido en el espacio tiene 6 grados de libertad (SI NO HAY VÍNCULOS)

⇨ Por ejemplo: $\begin{cases} \text{3 coordenadas para ubicar su C.M} \\ \text{3 ángulos para determinar su orientación} \end{cases}$

➡ PARA RESOLVER SU DINÁMICA NECESITAMOS 6 ECUACIONES INDEPENDIENTES

⇨ Lo más natural es emplear las ECUACIONES CARDINALES, que determinan las tasas de cambio de los momentos lineal ($\vec{p}$) y angular ($\vec{L}_Q$) en función de las fuerzas y los momentos externos $\vec{F}^{ext}$ y $\vec{M}_Q^{ext}$

⇨ c/una de ellas es una ecuación vectorial ⇨ $2 \times 3 = 6$ EC. escalares ⇨ PERMITEN RESOLVER EL PROBLEMA

1ª CARDINAL : $\boxed{\vec{F}_{NETA}^{EXT} = M\vec{a}_G = \dot{\vec{P}}_G}$

⇨ Utilizaremos principalmente la primera igualdad $\vec{F}_N^{EXT} = M\vec{a}_G$, para ello:

0) Determinar la ubicación de G en el rígido (esto puede ser trivial si hay simetrías, en el peor caso puede requerir integración)

i) Escribir $\vec{r}_G$ y derivar 2 veces para obtener $\vec{a}_G$ (alternativamente se puede usar Coriolis)

ii) Realizar el diagrama de cuerpo libre identificando las fuerzas aplicadas sobre el rígido

iv) Plantear $\vec{F}_{NETA}^{EXT} = M\vec{a}_G$ y proyectar en 3 direcciones convenientes :

$$\begin{cases} \vec{F}_N^{EXT} \cdot \hat{e}_1 = M\vec{a}_G \cdot \hat{e}_1 \\ \vec{F}_N^{EXT} \cdot \hat{e}_2 = M\vec{a}_G \cdot \hat{e}_2 \\ \vec{F}_N^{EXT} \cdot \hat{e}_3 = M\vec{a}_G \cdot \hat{e}_3 \end{cases}$$

2^{da} CARDINAL : $\boxed{\dot{\vec{L}}_Q = M\vec{v}_G \times \vec{v}_Q + \vec{M}_Q^{EXT}}$

Para aplicar esa forma de la 2^{da} cardinal tenemos que:

o) Elegir un punto Q adecuado (Fijo, CM, ...) y una base $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ (en la medida de lo posible, ejes principales del rígido respecto a Q) y calcular $\mathbb{I}_Q^{\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}}$

i) Calcular el momento angular respecto a Q, $\boxed{\vec{L}_Q = M(\vec{r}_G - \vec{r}_Q)\times \vec{v}_Q + \mathbb{I}_Q \vec{\omega}}$ y derivarlo

ii) A partir del DCL calcular los momentos externos respecto a Q, $\vec{M}_Q^{\vec{F}} = (\vec{r}_P - \vec{r}_Q)\times \vec{F}$

iii) Plantear $\dot{\vec{L}}_Q = M\vec{v}_G \times \vec{v}_Q + \vec{M}_Q^{ext}$ y proyectar en 3 direcciones adecuadas

Otra alternativa: obtendremos una relación que permite evaluar directamente la acción de los momentos externos sobre $\vec{\omega}$, sin tener que pasar por $\vec{L}$ (por analogía con $\vec{F}_{EXT} = M\vec{a}_G$, que describe los efectos de $\vec{F}_{EX}$ sobre el movimiento de G sin necesidad de pasar por $\vec{p}$)

$$\vec{L}_Q = M(\vec{r}_G - \vec{r}_Q) \times \vec{v}_Q + \mathbb{I}_Q \vec{\omega}$$

$Q \in R$

$$\Rightarrow \dot{\vec{L}}_Q = M(\vec{v}_G - \vec{v}_Q) \times \vec{v}_Q + M(\vec{r}_G - \vec{r}_Q) \times \vec{a}_Q + \frac{d}{dt}(\mathbb{I}_Q \vec{\omega})$$

$$= M\vec{v}_G \times \vec{v}_Q + M(\vec{r}_G - \vec{r}_Q) \times \vec{a}_Q + \frac{d'(\mathbb{I}_Q \vec{\omega})}{dt} + \vec{\omega} \times (\mathbb{I}_Q \vec{\omega})$$

$$\left(\frac{d\square}{dt} = \frac{d'\square}{dt} + \vec{\omega} \times \square \right)$$

$$= M\vec{v}_G \times \vec{v}_Q + M(\vec{r}_G - \vec{r}_Q) \times \vec{a}_Q + \frac{d'\mathbb{I}_Q}{dt}\vec{\omega} + \mathbb{I}_Q \underbrace{\frac{d'\vec{\omega}}{dt}}_{= \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}} + \vec{\omega} \times (\mathbb{I}_Q \vec{\omega})$$

SIGUE...

Teníamos: $\dfrac{d\vec{L}_Q}{dt} = M\vec{v}_G \times \vec{v}_Q + M(\vec{r}_G - \vec{r}_Q)\times \vec{a}_Q + \dfrac{d\mathbb{I}_Q}{dt}\,\vec{\omega} + \mathbb{I}_Q\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega}\times(\mathbb{I}_Q\vec{\omega})$

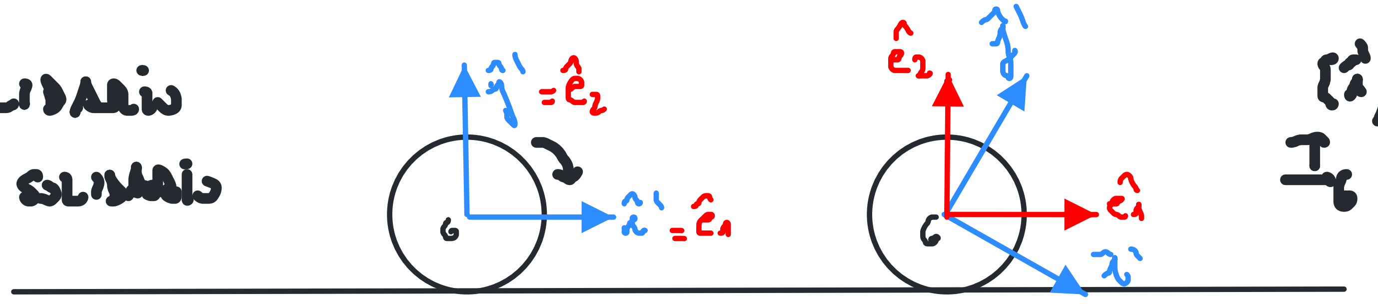
Conviene elegir S' $\{Q, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ / $\underbrace{\mathbb{I}_Q = cte \text{ en } S'}$

ADEMÁS, SI LA BASE ES PRINCIPAL MUCHO MEJOR!

(queremos que $\mathbb{I}_Q$ quede expresado en términos de M y las dimensiones características del rígido y NO del tiempo (de las coordenadas))

→ Una forma de asegurarlo es elegir una BASE SOLIDARIA AL RÍGIDO, pero esto no es estrictamente necesario:

$\begin{cases} \{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\} \text{ SOLIDARIA} \\ \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\} \text{ NO SOLIDARIA} \end{cases}$



$$\underset{\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}}{\mathbb{I}_G} = \underset{\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}}{\mathbb{I}_G} = \frac{MR^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

→ Si calculamos $\mathbb{I}_Q$ en una base / $\mathbb{I}_Q = cte \Rightarrow \frac{d\mathbb{I}_Q}{dt} = 0$

→ $\dot{\vec{L}}_Q = M\vec{V}_G \times \vec{V}_Q + M(\vec{r}_G - \vec{r}_Q) \times \vec{a}_Q + \mathbb{I}_Q \dot{\vec{w}} + \vec{w} \times (\mathbb{I}_Q \vec{w})$

TM → $\dot{\vec{L}}_Q = M\vec{V}_G \times \vec{V}_Q + \vec{M}_Q^{Ext}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{M}_Q^{EXT} = M(\vec{r}_G - \vec{r}_Q) \times \vec{a}_Q + \mathbb{I}_Q \dot{\vec{w}} + \vec{w} \times (\mathbb{I}_Q \vec{w})}$$

Obs 1: La ecuación es válida para $Q \in \mathcal{R}$ o a su extensión rígida y si $\frac{d\mathbb{I}_Q}{dt} = 0$

Obs 2: Si $\mathbb{I}_Q^{\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}} \Rightarrow \vec{w} = w_1\hat{e}_1 + w_2\hat{e}_2 + w_3\hat{e}_3$ (DEBEMOS EXPRESARLA EN LA BASE DEL TENSOR)

Obs 3: Como $\dot{\vec{w}} = \frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{d\vec{w}}{dt} \Rightarrow$ Si $\vec{w} = w_1\hat{e}_1 + w_2\hat{e}_2 + w_3\hat{e}_3 \Rightarrow \dot{\vec{w}} = \dot{w}_1\hat{e}_1 + \dot{w}_2\hat{e}_2 + \dot{w}_3\hat{e}_3$ (A PESAR DE QUE LOS VERSORES SON MÓVILES, NO HACE FALTA DERIVARLOS)

Obs 4: A partir de lo anterior : $\vec{w} = w_1\hat{e}_1 + w_2\hat{e}_2 + w_3\hat{e}_3 = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{w}} = \begin{pmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow I_Q \dot{\vec{w}} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11}\dot{w}_1 + I_{12}\dot{w}_2 + I_{13}\dot{w}_3 \\ I_{21}\dot{w}_1 + I_{22}\dot{w}_2 + I_{23}\dot{w}_3 \\ I_{31}\dot{w}_1 + I_{32}\dot{w}_2 + I_{33}\dot{w}_3 \end{pmatrix} \text{ FEO}$$

Obs : El término $\vec{w} \times (\mathbb{I}_Q \vec{w}) = (w_1, w_2, w_3) \times \left(I_{11}w_1 + I_{12}w_2 + I_{13}w_3,\ I_{21}w_1 + I_{22}w_2 + I_{23}w_3,\ I_{31}w_1 + I_{32}w_2 + I_{33}w_3 \right)$

$$= \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{vmatrix} = \dots$$

ó

$$= (w_1\hat{e}_1 + w_2\hat{e}_2 + w_3\hat{e}_3) \times (\bigcirc\, \hat{e}_1 + \bigcirc\, \hat{e}_2 + \bigcirc\, \hat{e}_3) = \dots$$

$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3$

$\hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \hat{e}_1$

$\hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = \hat{e}_2$

$\boxed{\text{MORALEJA: INTENTAR TRABAJAR EN EJES PRINCIPALES!}}$

Obs 5: PROBLEMAS PLANOS

→ Rígido plano cuyo movimiento está confinado a un plano π (para fijar ideas, $\pi: z=0$)

⇒ 3 G.L. → 2 coordenadas para determinar G (por ejemplo, x_G e y_G)
→ $\underbrace{\text{1 ángulo para describir su orientación}}$

SU VELOCIDAD ANGULAR SÓLO PUEDE SER $\perp \pi$ ⇒ $\vec{\omega} = (0, 0, \dot{\omega}_3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbb{I}_Q \dot{\vec{\omega}} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{33}\dot{\omega}_3 \end{pmatrix} = I_{33}\dot{\omega}_3 \hat{e}_3 \\ \vec{\omega} \times (\mathbb{I}_Q \vec{\omega}) = \omega_3 \hat{e}_3 \times I_{33} \omega_3 \hat{e}_3 = 0 \end{cases}$$

2ª CARDINAL – PROBLEMA PLANO

$$\Rightarrow \boxed{\vec{M}_Q^{ext} \cdot \hat{e}_3 = M(\vec{r}_G - \vec{r}_Q) \times \vec{a}_Q \cdot \hat{e}_3 + I_{33} \dot{\omega}_3}$$

Ya apuntan según $\hat{e}_3$

⇒ $\boxed{\text{NO SE NECESITA HALLAR TODO EL TENSOR (SÓLO } I_{Q} \perp \pi)}$