

# Fundamentos de Programación Entera

## Repartido de Ejercicios 2 - Vence 18/5/2023

El trabajo es individual. Se requiere responder en archivo de nombre y formato *respuesta.pdf* (puede ser en forma manuscrita, cuidando la legibilidad).

1. Dado el problema

$$\begin{array}{ll} \min & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 4x_1 + x_2 \geq 8 \quad (1) \\ & x_1 + 2x_2 \geq 6 \quad (2) \\ & x_1 + x_2 \geq 4 \quad (3) \\ & x_1, x_2 \geq 0, \text{ enteras.} \end{array}$$

Resolverlo mediante ramificado y acotamiento en base al pseudocódigo presentado en el teórico (cap. 5. *Ramificado y acotamiento*). Dibujar el árbol de subproblemas correspondiente indicando las cotas y soluciones encontradas en cada subproblema. Indicar el orden en que fueron procesados los subproblemas y las podas realizadas.

### Solución

Se resuelve relajación a PL del problema.

Se obtiene valor óptimo  $z = 9,33$  y solución óptima  $x = (1,33; 2,67)$ .

Dado que no hay solución entera, se ramifica según  $x_1 = 1,33$ .

La región factible del problema original,  $X$ , se particiona en dos problemas con regiones  $X_1 := X \cap \{x_1 \leq \lfloor 1,33 \rfloor = 1\}$  y  $X_2 := X \cap \{x_1 \geq \lceil 1,33 \rceil = 2\}$ .

Se resuelve  $X_1$  relajado a PL: valor óptimo  $z^1 = 11$  y solución óptima  $x^1 = (1; 4)$ . Se poda por optimalidad dado que es solución entera.

Se resuelve  $X_2$  relajado a PL: valor óptimo  $z^2 = 10$  y solución óptima  $x^2 = (2, 2)$ . Se poda por optimalidad dado que es solución entera.

Al terminarse la lista de problemas activos se tiene valor óptimo  $z^* = 10$  y solución óptima  $x^* = (2, 2)$ .

2. Dado el problema

$$\begin{aligned} \max \quad & -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 \\ \text{s.a} \quad & -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 \geq 2 \quad (1) \\ & 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 \leq 2 \quad (2) \\ & 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 1 \quad (3) \\ & x \in \mathbb{B}^4. \end{aligned}$$

Deducir inecuaciones lógicas que permitan simplificar la formulación y resolver.

### Solución

De (1)

$$x_4 = 0 \text{ (a)}$$

$$x_1 \leq x_2$$

$$x_1 \leq x_3 \text{ (b)}$$

$$x_2 + x_3 \geq 1 \text{ (c)}$$

De (2)

$$x_4 \leq x_2 \text{ (d)}$$

$$x_3 \leq x_2 \text{ (e)}$$

$$x_1 \leq x_2$$

$$x_1 + x_3 + x_4 \leq 1 \text{ (f)}$$

De (3)

$$x_1 \leq x_2 \text{ (g)}$$

$$x_2 \leq 1 - x_1 + x_3 + 1 - x_4$$

De (a) y (f):  $x_1 + x_3 \leq 1$  y (c) implica  $x_1 = 0$  (h)

De (c) y (e):  $x_2 = 1$  (i)

De (a), (h) e (i): el problema se reduce a  $\max_{x_3 \in \{0,1\}} -x_3$ . Este tiene solución óptima  $x^* = (0, 1, 0, 0)$  con valor óptimo 3.

3. Dado el problema

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 5x_1 + 13x_2 \leq 21 \quad (1) \\ & 11x_1 + 9x_2 \leq 23 \quad (2) \\ & x_1, x_2 \geq 0, \text{ enteras.} \end{aligned}$$

- a) Determinar una inecuación válida de redondeo a entero correspondiente a la restricción (1).
- b) Determinar una inecuación válida de redondeo a entero correspondiente a la restricción (2).
- c) Determinar la inecuación válida de Chvátal-Gomory de las restricciones (1) y (2) con coeficientes  $u_1 = \frac{1}{5}, u_2 = \frac{1}{9}$ .
- d) Determinar el caso convexo de las soluciones factibles del problema.

### Solución

- a) Si se multiplica la inecuación (1) por  $\frac{1}{5}$  se tiene la inecuación válida

$$x_1 + \frac{13}{5}x_2 \leq \frac{21}{5}.$$

Dado que las variables son no negativas, si se aplica la función piso a los coeficientes del miembro izquierdo se tiene la inecuación válida

$$x_1 + 2x_2 \leq \frac{21}{5}.$$

Dado que el miembro izquierdo es entero se puede ajustar el miembro derecho a su entero menor más próximo, obteniéndose la inecuación válida

$$x_1 + 2x_2 \leq 4.$$

- b) Si se multiplica la inecuación (2) por  $\frac{1}{9}$  se tiene la inecuación válida

$$\frac{11}{9}x_1 + x_2 \leq \frac{23}{9}.$$

Dado que las variables son no negativas, si aplica la función piso a los coeficientes del miembro izquierdo se tiene la inecuación válida

$$x_1 + x_2 \leq \frac{23}{9}.$$

Dado que el miembro izquierdo es entero se puede ajustar el miembro derecho a su entero menor más próximo, obteniéndose la inecuación válida

$$x_1 + x_2 \leq 2.$$

- c) La inecuación válida de Chvátal-Gomory de dos inecuaciones, según columnas  $a_1$  y  $a_2$ , variables  $x_1$  y  $x_2$ , término independiente  $b$  y coeficiente  $u$  es

$$\lfloor u^T a_1 \rfloor x_1 + \lfloor u^T a_2 \rfloor x_2 \leq \lfloor u^T b \rfloor$$

Dados los vectores columna:  $a_1 := (a_{11} \ a_{21})^T$ ,  $a_2 := (a_{12} \ a_{22})^T$ , y  $u := (u_1 \ u_2)^T$  se tiene

$$\left\lfloor (u_1 \ u_2) \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \right\rfloor x_1 + \left\lfloor (u_1 \ u_2) \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \right\rfloor x_2 \leq \left\lfloor (u_1 \ u_2) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\rfloor$$

Dados los valores de  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b$  y  $u$  se tiene

$$\left\lfloor \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix} \right\rfloor x_1 + \left\lfloor \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \end{pmatrix} \right\rfloor x_2 \leq \left\lfloor \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 \\ 23 \end{pmatrix} \right\rfloor.$$

De donde se obtiene

$$\left\lfloor \frac{20}{9} \right\rfloor x_1 + \left\lfloor \frac{18}{5} \right\rfloor x_2 \leq \left\lfloor \frac{304}{45} \right\rfloor$$

De donde se obtiene la inecuación válida

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6.$$

- d) El casco convexo de la región factible es

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \leq 2, x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

4. Sea el problema de localización de instalación capacitada (CFL) con demanda absoluta (ver cap. 6. *Resolución mediante planos de corte*, página 8, del teórico). Para la instancia definida según los parámetros  $m = 5$ ,  $n = 4$ ,

$$(f_j) = ( 34 \ 42 \ 38 \ 46 ), \quad (b_j) = ( 110 \ 140 \ 130 \ 100 ).$$

$$(a_i) = ( 55 \ 75 \ 70 \ 45 \ 60 ), \quad (c_{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

se requiere resolver mediante GLPK el problema y una variante del mismo que incluye además las inecuaciones válidas  $x_{ij} \leq \min\{a_i, b_j\}y_j, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ .

- a) Determinar el valor y la solución óptima del problema.
- b) Determinar el valor y la solución óptima de la relajación a programación lineal del problema.
- c) Determinar el valor y la solución óptima de la relajación a programación lineal de la variante.
- d) Comparar y justificar los valores del óptimo y de la variable  $y$  según los resultados obtenidos en (a), (b) y (c).

Nota: Además de responder los apartados en el archivo de respuestas, se solicita entregar en archivos, según apartado, el código en GLPK y su solución estándar en archivo empaquetado de nombre y formato *anexo.zip*.