El tensor de Inercia es necesario para calcular $\rightarrow$ ENERGÍA CINÉTICA / MOMENTO ANGULAR } DE UN CUERPO RÍGIDO

ENERGÍA CINÉTICA

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M \vec{v}_Q^{\,2} + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot(\mathbb{I}_Q\vec{\omega}) + M\vec{v}_Q\cdot[\vec{\omega}\times(\vec{r}_G-\vec{r}_Q)]}$$

$$\frac{1}{2}(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\cdot\underbrace{\left[\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13}\\ I_{21} & I_{22} & I_{23}\\ I_{31} & I_{32} & I_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix}\right]}_{=\begin{pmatrix}-\\-\\-\end{pmatrix}}$$

donde:
- Q punto cualquiera DEL RÍGIDO
- $\mathbb{I}_Q$ = Tensor de inercia centrado en Q en alguna base conveniente
- $\vec{\omega}$ = Velocidad angular del rígido

ATENCIÓN: Si $\mathbb{I}_0^{\{\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3\}}$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \omega_1\hat{e}_1 + \omega_2\hat{e}_2 + \omega_3\hat{e}_3 \Rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix}$$

(DEBO EXPRESAR $\vec{\omega}$ EN LA MISMA BASE EN LA QUE SE CALCULÓ EL TENSOR)

CONVIENE
- $\rightarrow Q / \vec{v}_Q = 0 \Rightarrow T = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot(\mathbb{I}_Q\vec{\omega})$
- $\rightarrow Q = G \Rightarrow T = \frac{1}{2} m \vec{v}_G^{\,2} + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot(\mathbb{I}_G\vec{\omega})$

MOMENTO ANGULAR

$\boxed{\vec{L}_Q = M(\vec{r}_G - \vec{r}_Q) \times \vec{V}_Q + I_Q \vec{w}}$ → De nuevo conviene tomar $\left\{ \begin{array}{l} Q / \vec{V}_Q = 0 \text{ (si existe)} \\ Q = G \end{array} \right\} \vec{L}_Q = I_Q \vec{w}$

→ Notar que en general $\vec{L} \not\parallel \vec{w}$ (esto ocurre solamente si rota respecto a uno de los ejes principales)

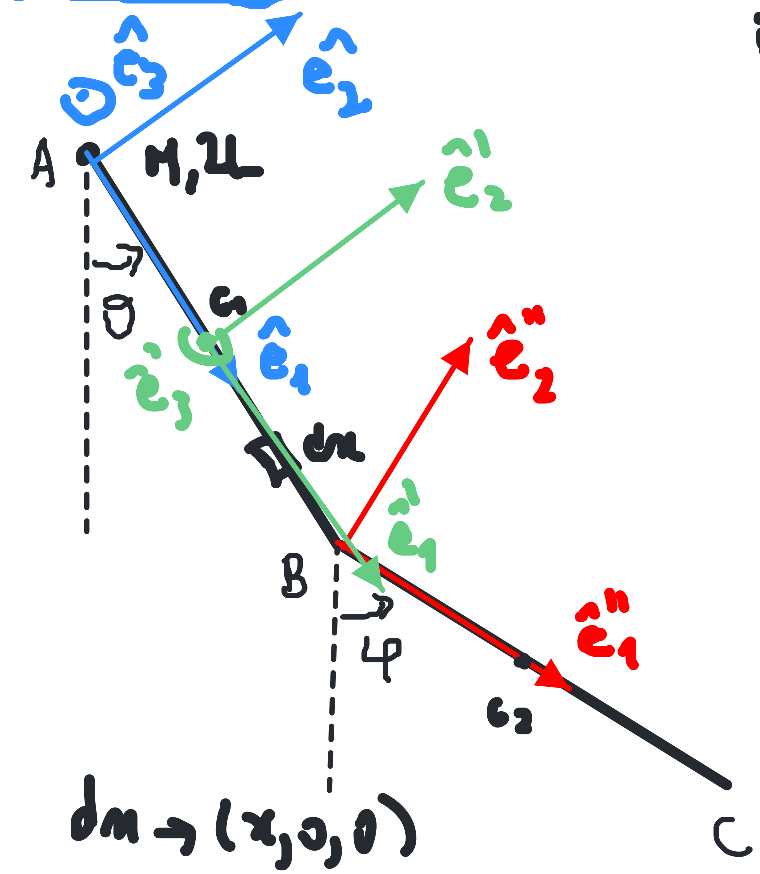
→ Si conozco I_Q pero quiero $\vec{L}_{A}, A \neq Q$ tengo 2 alternativas:

i) Traslado $I_Q \to I_A$ (Steiner)

ii) Calculo $\vec{L}_Q = M(\vec{r}_G - \vec{r}_Q) \times \vec{V}_Q + I_Q \vec{w}$ y luego aplico

CAMBIO DE MOMENTOS ANGULARES: $\boxed{\vec{L}_A = \vec{L}_Q + \vec{p} \times (\vec{r}_A - \vec{r}_Q) \;,\; \vec{p} = M\vec{V}_G}$

EJEMPLO



$dm \to (x,0,0)$

i) Hallar la energía cinética total

ii) Hallar $\vec{L}_A$

i) OBS1: El sistema NO es UN RÍGIDO $\Rightarrow$ DEBEMOS CALCULAR $\underbrace{T(AB)\ y\ T(BC)}_{\text{por separado y luego sumarlas}}$

OBS2: Necesitamos sus $\underbrace{CM}_{\text{triviales}}$ y Tensores de Inercia y $\underbrace{\vec{\omega}'_s}_{\text{triviales}}$

OBS3: Como AB tiene un punto fijo $\Rightarrow$ conviene tomar $O = A$

OBS4: $\hat{e}_1$ es principal (revolución)

$\hat{e}_2, \hat{e}_3$ principales (por rígido plano), $I_{33} = I_{11} + I_{22}$

$$I_{11} = \int dm\,(\cancel{y^2} + \cancel{z^2}) = 0$$

$$I_{22} = \int dm\,(x^2 + \cancel{z^2}) = \frac{M}{2L}\int_0^{2L} x^2\,dx = \frac{4}{3}ML^2 \Rightarrow \underbrace{I_A}_{\text{De barra AB}}^{\{\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3\}} = \frac{4}{3}ML^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$dm = \lambda\,dx = \frac{M}{2L}\,dx$$

Ya podemos calcular la $T_{(AB)}$:

$$T_{(AB)} = \frac{1}{2}M\vec{V}_Q^2 + \vec{\omega}\cdot\left(\mathbb{I}_Q\vec{\omega}\right) + M\vec{V}_Q\cdot\left[\vec{\omega}\times(\vec{r}_G-\vec{r}_Q)\right] \overset{Q=A}{=} \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\left(\mathbb{I}_Q\vec{\omega}\right)$$

$$\vec{\omega}_{AB} = \dot{\vartheta}\,\hat{e}_3 = \dot{\theta}\,\hat{e}_3 = 0\,\hat{e}_1 + 0\,\hat{e}_2 + \dot{\theta}\,\hat{e}_3$$ (RECORDAR EXPRESARLA EN LA BASE DEL TENSOR!)

$$\Rightarrow T_{(AB)} = \frac{1}{2}\vec{\omega}_{AB}\cdot\mathbb{I}_A^{\{\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3\}}\,\vec{\omega}_{AB} = \frac{1}{2}(0,0,\dot{\theta})\cdot\frac{4}{3}mL^2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\\dot{\theta}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{3}ML^2\,(0,0,\dot{\theta})\begin{pmatrix}0\\0\\\dot{\theta}\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{T_{(AB)} = \frac{2}{3}mL^2\dot{\theta}^2}$$

Notar que si el rígido es plano y rota en ese plano $\Rightarrow$ $\underbrace{\frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot(\mathbb{I}\vec{\omega}) = \frac{1}{2}I_{33}\dot{\theta}^2}_{\text{SOLO SE REQUIERE } I_{33}!}$

¿Qué pasa si hubiéramos elegido otro punto? $\rightarrow$ EL RESULTADO ES EL MISMO.

Veámoslo, por ejemplo, para $Q = G_1$:

$$T = \frac{1}{2} M \vec{V}_Q^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot(\mathbb{I}_Q \vec{\omega}) + M\vec{V}_Q\cdot[\vec{\omega}\times(\vec{r}_G - \vec{r}_Q)] \overset{Q=G_1}{=} \underbrace{\frac{1}{2} M V_{G_1}^2}_{\text{Traslación}} + \underbrace{\frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot(\mathbb{I}_{G_1}\vec{\omega})}_{\text{Rotación}}$$

$\vec{V}_{G_1} = L\dot{\theta}\hat{e}_2$

Necesitamos $\mathbb{I}_{G_1}^{\{\hat{e}_1', \hat{e}_2', \hat{e}_3'\}} \rightarrow$ sistema paralelo a $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ por G_1

Por ser perpendiculares a los planos de simetría $\Longrightarrow \mathbb{I}_{G_1}^{\{\hat{e}_1', \hat{e}_2', \hat{e}_3'\}}$ es DIAGONAL

$$\Longrightarrow \mathbb{J} = M\begin{pmatrix} d_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & d_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3^2 \end{pmatrix}, \text{ con } \begin{array}{l} d_1^2 = (\text{distancia})^2 \text{ entre } \hat{e}_1 \text{ y } \hat{e}_1' = 0^2 = 0 \\ d_2^2 = (\text{distancia})^2 \text{ entre } \hat{e}_2 \text{ y } \hat{e}_2' = L^2 \\ d_3^2 = (\text{distancia})^2 \quad '' \quad \hat{e}_3 \text{ y } \hat{e}_3' = L^2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \mathbb{I}_A^{\{\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3\}} = \mathbb{I}_{G_1}^{\{\hat{e}'_1,\hat{e}'_2,\hat{e}'_3\}} + \mathbb{J} \Rightarrow \mathbb{I}_{G_1}^{\{\hat{e}'_1,\hat{e}'_2,\hat{e}'_3\}} = \mathbb{I}_A^{\{\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3\}} - \mathbb{J}$$

$$\Rightarrow \mathbb{I}_{G_1}^{\{\hat{e}'_1,\hat{e}'_2,\hat{e}'_3\}} = \frac{4}{3}ML^2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} - ML^2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}ML^2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T_{(AB)} = \frac{1}{2}MV_{G_1}^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot(\mathbb{I}_{G_1}\vec{\omega}) \quad , \quad \vec{\omega} = 0\hat{e}'_1 + 0\hat{e}'_2 + \dot{\theta}\hat{e}'_3 = (0,0,\dot{\theta})$$

$$= \frac{1}{2}M(L\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}(0,0,\dot{\theta})\,\frac{1}{3}ML^2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\\dot{\theta}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{6}ML^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow \boxed{T_{(AB)} = \frac{4}{3}ML^2\dot{\theta}^2}$$

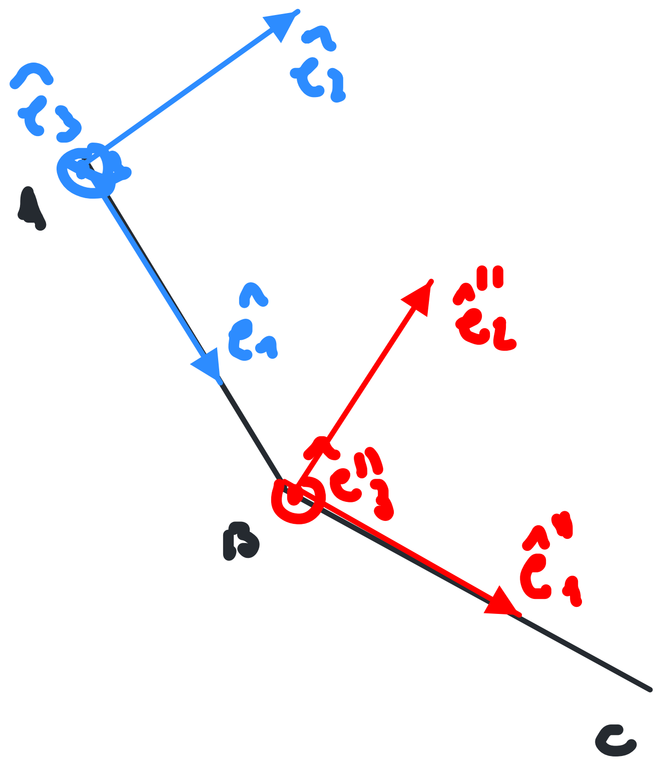
Coincide con el calculado tomando Q = A.

Falta calcular $T_{(BC)}$ $\rightarrow$ En este caso no tenemos punto fijo $\Rightarrow$ i) $Q = G_2$

ii) $Q = B$

Lo haremos tomando $Q = B$ (verificarlo usando G_2)

OBS: EL TENSOR DE INERCIA DE AB EN LA BASE $\{A, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ ES IDÉNTICO AL TENSOR DE BC EN LA BASE $\{B, \hat{e}''_1, \hat{e}''_2, \hat{e}''_3\}$ (LA MASA SE DISTRIBUYE IGUAL ALREDEDOR DE C/SISTEMA)



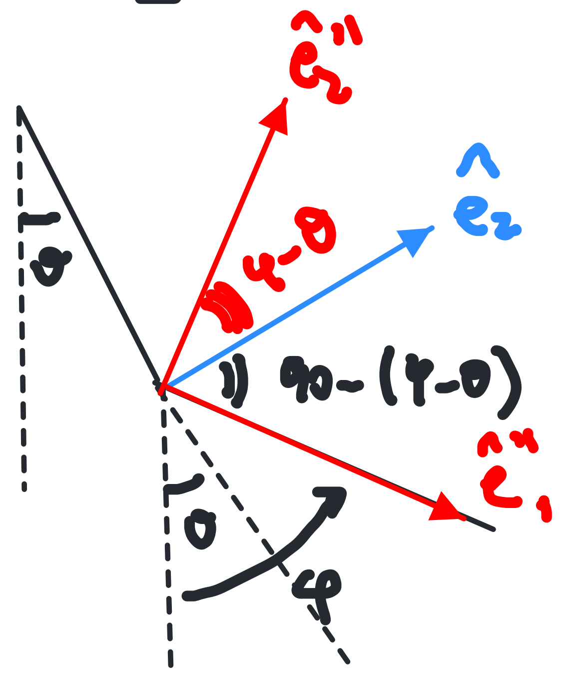
$$\Rightarrow \underbrace{\mathbb{I}_B^{\{\hat{e}''_1, \hat{e}''_2, \hat{e}''_3\}}}_{\text{DE BC}} = \frac{1}{3} M L^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T_{(BC)} = \frac{1}{2} M \vec{V}_B^{\,2} + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\left(\mathbb{I}_B \vec{\omega}\right) + M\vec{V}_B\cdot\left[\vec{\omega}\times\left(\vec{r}_{G_2}-\vec{r}_B\right)\right]$$

$$\vec{V}_B = 2L\dot{\theta}\,\hat{e}_2$$

$$\vec{\omega}_{BC} = 0\,\hat{e}''_1 + 0\,\hat{e}''_2 + \dot{\varphi}\,\hat{e}''_3 = (0,0,\dot{\varphi})$$

$$\vec{r}_{G_2} - \vec{r}_B = L\,\hat{e}''_1$$



$$\Rightarrow \frac{1}{2}MV_B^2 = \frac{1}{2}M(2L\dot{\theta})^2 = 2ML^2\dot{\theta}^2$$

$$\frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\left(\mathbb{I}_B\vec{\omega}\right) = \frac{2}{3}ML^2\dot{\varphi}^2$$

$$M\vec{V}_B\cdot\left[\vec{\omega}\times(\vec{r}_{G_2}-\vec{r}_B)\right] = 2ML\dot{\theta}\,\hat{e}_2\cdot\left[\overbrace{\dot{\varphi}\,\hat{e}''_3\times L\,\hat{e}''_1}^{L\dot{\varphi}\,\hat{e}''_1}\right] = 2ML^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\,\overbrace{\left(\hat{e}_2\cdot\hat{e}''_2\right)}^{\cos(\varphi-\theta)} = 2ML^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\varphi-\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{(BC)} = 2ML^2\dot{\theta}^2 + \frac{2}{3}ML^2\dot{\varphi}^2 + 2ML^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\varphi-\theta)}\;,\quad T = T_{(AB)} + T_{(BC)}$$

ii) MOMENTO ANGULAR $\vec{L}_A$

$$\vec{L}_A^{(AB)} = M(\vec{r}_{G_1} - \vec{r}_A) \times \vec{V}_A + \mathbb{I}_A \vec{w} = \frac{4}{3} ML^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \frac{4}{3} ML^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\vec{L}_A^{(AB)} = \frac{4}{3} ML^2 \dot{\theta} \, \hat{e}_3}$$

$\vec{L}^{BC}$ es relativamente fácil de calcular respecto a B

$$\Rightarrow \vec{L}_B^{(BC)} = M(\vec{r}_{G_2} - \vec{r}_B) \times \vec{V}_B + \mathbb{I}_B \vec{W}$$

$$= ML \hat{e}_1'' \times 2L\dot{\theta} \hat{e}_2 + \frac{4}{3} ML^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

$$\hat{e}_2'' \times \hat{e}_1 = \sin(90 - (\varphi - \theta)) \hat{e}_3 = \cos(\varphi - \theta) \hat{e}_3$$

$$= 2ML^2 \dot{\theta} \cos(\varphi - \theta) \hat{e}_3 + \frac{4}{3} ML^2 \dot{\theta} \hat{e}_3 \rightarrow \boxed{\vec{L}_B^{(BC)} = \left[2ML^2 \dot{\theta} \cos(\varphi - \theta) + \frac{4}{3} ML^2 \dot{\theta} \right] \hat{e}_3}$$

PERO OJO! NO PODEMOS OBTENER $\vec{L}_A^{TOTAL}$ SUMANDO PUES ESTÁN CALCULADOS RESPECTO A DISTINTOS PUNTOS $\Rightarrow$ CAMBIO DE MOMENTOS ANGULARES

FÓRMULA DE CAMBIO DE MOMENTOS

$$\vec{L}_A = \vec{L}_B + \vec{p} \times (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \quad , \quad \vec{p} = M\vec{V}_G \quad \underbrace{\text{cantidad de movimiento}}_{\text{Momento lineal}} \text{ del sistema.}$$

$$\Rightarrow \vec{p}^{\,BC} = M\vec{V}_{G_2}$$

$$\vec{V}_{G_2} \overset{\text{dist. vel}}{=} \vec{V}_B + \vec{\omega}_{BC} \times (\underbrace{\vec{r}_{G_2} - \vec{r}_B}_{L\hat{e}_1''}) = 2L\dot{\theta}\,\hat{e}_2 + L\dot{\varphi}\,\hat{e}_2'' \Bigg\} \Rightarrow \vec{p} = 2ML\dot{\theta}\hat{e}_2 + ML\dot{\varphi}\hat{e}_2''$$

$$\vec{r}_A - \vec{r}_B = -2L\hat{e}_1$$

$$\Rightarrow \vec{L}_A^{(BC)} = \vec{L}_B^{(BC)} + \vec{p}^{\,(BC)} \times (\vec{r}_A - \vec{r}_B)$$

$$= \left[2ML^2\dot{\theta}^2 \cos(\varphi - \theta) + \frac{4}{3} ML^2\dot{\varphi}\right]\hat{e}_3 + (2ML\dot{\theta}\,\hat{e}_2 + ML\dot{\varphi}\,\hat{e}_2'') \times (-2L\hat{e}_1) \quad \text{ETC.}$$

FINALMENTE : $\vec{L}_A^{TOT} = \vec{L}_A^{(AB)} + \vec{L}_A^{(BC)}$