CLASE 9: CINÉTICA DEL RÍGIDO

Aprenderemos:

⇨ Qué es el Tensor de Inercia

⇨ Cómo calcularlo tanto en el caso discreto como en el continuo

⇨ Cómo identificar sus ejes principales a partir de las simetrías del sistema

⇨ Cómo trasladarlo a un sistema de ejes paralelo al anterior, con otro origen

⇨ Cómo utilizarlo para: i) Calcular la energía cinética de un rígido

ii) " el momento angular " " "

TENSOR DE INERCIA

→ Describe cómo se distribuye la masa del sistema en relación a un origen en cierto sistema de ejes ⇒ DEPENDE DEL ORIGEN Y DE LA BASE ELEGIDA : $\mathbb{I}_O^{\{\hat{x},\hat{y},\hat{z}\}}$

→ Útil para determinar $\underbrace{\text{cómo responde}}_{\text{Cómo rota}}$ el sistema a los momentos (Torques) aplicados

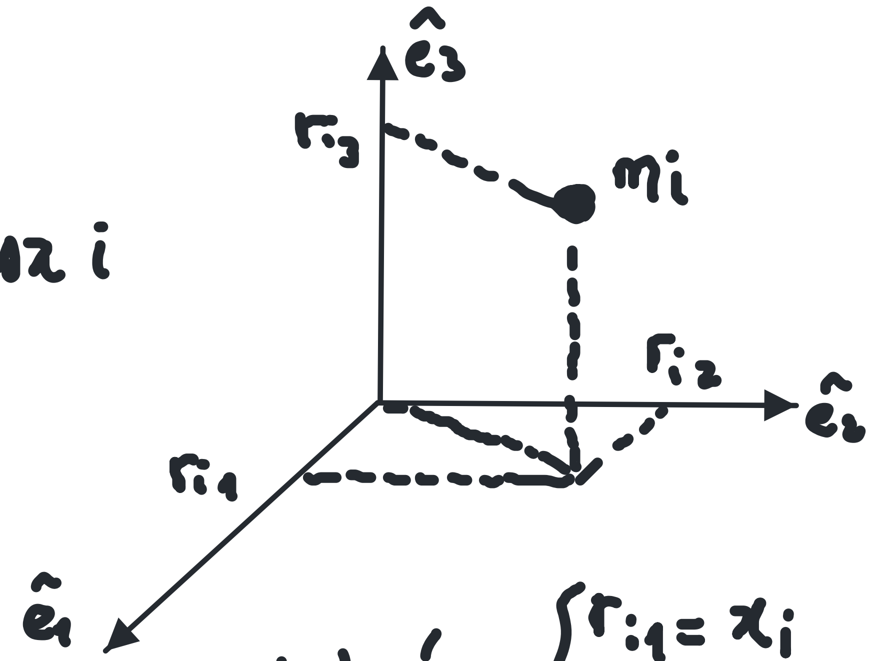
Cómo rota ⇒ GENERALIZA EL CONCEPTO DE "MOMENTO DE INERCIA" VISTO EN F1.

→ Aparece en las expresiones de → 2^{da} cardinal
→ Momento Angular
→ Energía cinética

Para un sistema de N partículas $\{m_1, \dots, m_N\}$:

DEF : $\boxed{\mathbb{I}_{\alpha\beta}^{\{\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3\}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\vec{r}_i^{\,2}\, \delta_{\alpha\beta} - r_{i\alpha} r_{i\beta} \right] \;, \; \alpha,\beta = 1,2,3}$

Expresión que permite determinar la componente $\alpha\beta$ del tensor



donde: $\begin{cases} m_i \rightarrow \text{masa de la partícula } i \\ \vec{r}_i = (r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}) \rightarrow \text{vector posición de la masa } i \\ \vec{r}_i^{\,2} = \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i = r_{i1}^2 + r_{i2}^2 + r_{i3}^2 \rightarrow (\text{módulo})^2 \text{ de } \vec{r}_i \\ \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 \text{ si } \alpha = \beta \\ 0 \text{ si } \alpha \neq \beta \end{cases} \text{ (delta de Kronecker)} \end{cases}$

Notación: $\begin{cases} r_{i1} = x_i \\ r_{i2} = y_i \\ r_{i3} = z_i \end{cases}$

OBSERVACIONES:

1) Como $\alpha, \beta = 1,2,3 \Rightarrow$ Hay 9 componentes: $I_{11}, I_{12}, I_{13}, I_{21}, I_{22}, I_{23}, I_{31}, I_{32}, I_{33}$

$\Rightarrow$ ADMITE UNA EXPRESIÓN MATRICIAL:
$$\underline{\underline{I}}_0^{\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}$$

2) Es fácil verificar que $I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha} \Rightarrow$ SIMÉTRICO: $\begin{cases} I_{12} = I_{21} \\ I_{13} = I_{31} \\ I_{23} = I_{32} \end{cases} \Rightarrow$ "SÓLO" HAY QUE DETERMINAR 6 COMPONENTES

3) $\forall O$ existe una base $\{\hat{\imath}', \hat{\jmath}', \hat{k}'\}$ / $\underbrace{\underline{\underline{I}}_{O'}^{\{\hat{\imath}', \hat{\jmath}', \hat{k}'\}} \text{ es DIAGONAL}}$ $\Rightarrow$ CONVIENE TRABAJAR EN ESA BASE

LOS EJES EN LOS QUE QUEDA DIAGONAL SE DENOMINAN EJES PRINCIPALES

$$\underline{\underline{I}}_{O'}^{\{\hat{\imath}', \hat{\jmath}', \hat{k}'\}} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix}$$

(solo hay que determinar I_{11}, I_{22}, I_{33})

4) ¿Cómo determino los ejes principales?

i) Lo calculo en cualquier base y DIAGONALIZO → EJES PPALES SON LAS DIRECCIONES DE LOS VECTORES PROPIOS (NO RECOMENDADO)

ii) Utilizando ARGUMENTOS DE SIMETRÍA (RECOMENDADO)

5) Por lo general será conveniente →

$$\begin{cases} O = G \\ O = \text{punto fijo (si tiene)} \end{cases}$$

ESTAS ELECCIONES SIMPLIFICARÁN LOS CÁLCULOS DE $\vec{L}_O$ y E cinética

→ $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ SOLIDARIA AL RÍGIDO (HAY EXCEPCIONES) (De lo contrario el tensor dependerá del tiempo!)

6) Notación:

$$\mathbb{I}_O^{\{\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3\}} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}$$

PRODUCTOS DE INERCIA

MOMENTOS DE INERCIA

$$\boxed{\text{Si } \mathbb{I}_O^{\{\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3\}} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{I_{11}, I_{22}, I_{33}}_{\text{MOMENTOS PRINCIPALES DE INERCIA}}}$$

CASO DISCRETO: $\mathbb{I}_{0\,\alpha\beta}^{\{\hat e_1,\hat e_2,\hat e_3\}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \{ \vec r_i^{\,2}\, \delta_{\alpha\beta} - r_{i\alpha} r_{i\beta} \}$

$\alpha=\beta=1$

$\Rightarrow I_{11} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[(r_{i1}^2 + r_{i2}^2 + r_{i3}^2)\, \overbrace{\delta_{11}}^{=1} - \overbrace{r_{i1} \cdot r_{i1}}^{=r_{i1}^2} \right]$

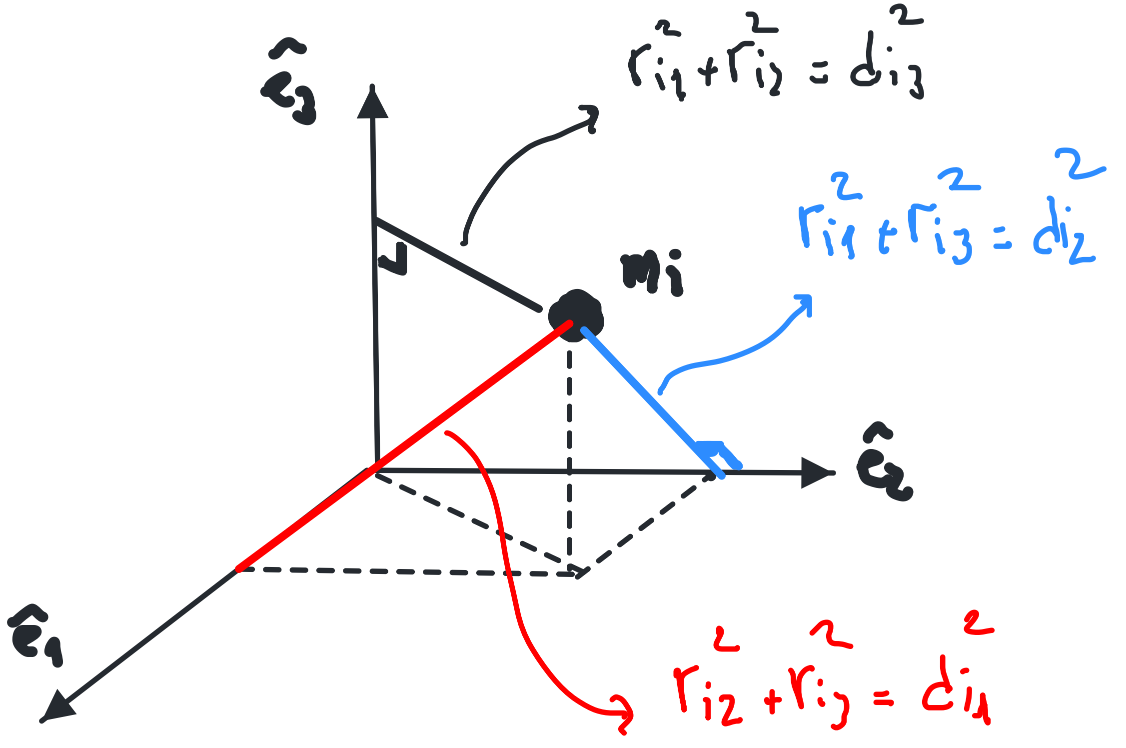
$= \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\cancel{r_{i1}^2} + r_{i2}^2 + r_{i3}^2 - \cancel{r_{i1}^2} \right]$

$= \sum_{i=1}^{N} m_i (r_{i2}^2 + r_{i3}^2) = \sum_{i=1}^{N} m_i\, d_{i1}^2$ → MOMENTO DE INERCIA!

$d_{i1}^2 = (\text{distancia})^2$ de la partícula i al eje $\hat e_1$

Análogamente:

$$\begin{cases} I_{22} = \sum_{i=1}^{N} m_i (r_{i1}^2 + r_{i3}^2) = \sum_{i=1}^{N} m_i\, d_{i2}^2 \\ I_{33} = \sum_{i=1}^{N} m_i (r_{i1}^2 + r_{i2}^2) = \sum_{i=1}^{N} m_i\, d_{i3}^2 \end{cases}$$



$I_{12} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[r_i^2\, \delta_{12} - r_{i1} r_{i2} \right] = -\sum_{i=1}^{N} m_i\, r_{i1} r_{i2}$

Análogamente:

$$\begin{cases} I_{13} = -\sum m_i\, r_{i1} r_{i3} \\ I_{23} = -\sum m_i\, r_{i2} r_{i3} \end{cases}$$

PASAJE AL CONTINUO

$$\sum_{i=1}^{N} m_i f(\vec{r}_i) \rightarrow \int dm\, f(\vec{r})$$

$$I_O^{\{\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3\}} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} m_i (r_{i2}^2 + r_{i3}^2) & -\sum_{i=1}^{N} m_i r_{i1} r_{i2} & -\sum_{i=1}^{N} m_i r_{i1} r_{i3} \\ \text{''} & \sum_{i=1}^{N} m_i (r_{i1}^2 + r_{i3}^2) & -\sum_{i=1}^{N} m_i r_{i2} r_{i3} \\ \text{''} & \text{''} & \sum_{i=1}^{N} m_i (r_{i1}^2 + r_{i2}^2) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \int dm (y^2+z^2) & -\int dm\, xy & -\int dm\, xz \\ \text{''} & \int dm (x^2+z^2) & -\int dm\, yz \\ \text{''} & \text{''} & \int dm (x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

donde: $\begin{cases} \text{dim} = 1 \Rightarrow dm = \lambda\, dl \rightarrow \int \\ \text{dim} = 2 \Rightarrow dm = \sigma\, da \rightarrow \iint \\ \text{dim} = 3 \Rightarrow dm = \rho\, dV \rightarrow \iiint \end{cases}$

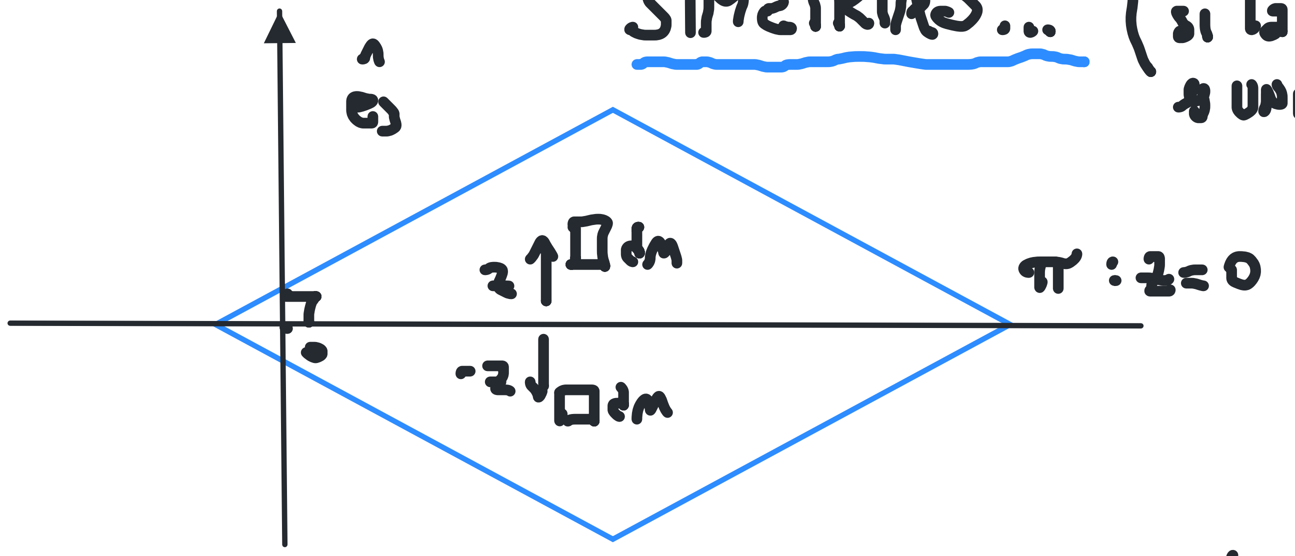
→ Puede ser necesario calcular hasta 6 (seis!) integrales múltiples para determinar $\mathbb{I}_0$

⟹ ES CONVENIENTE TRABAJAR EN EJES PRINCIPALES, PERO... ¿CÓMO LOS DETERMINO?

SIMETRÍAS... (si la densidad es UNIFORME!)

1) PLANO DE SIMETRÍA π

⇒ Cualquier eje $\perp \pi$ es eje principal respecto a un punto de dicho plano:



$$I_{13} = -\int dm\, x z \approx \sum_{dm} dm\, x z + dm\, x(-z) = 0$$

$$I_{23} = -\int dm\, y z \approx \sum_{dm} dm\, y z + dm\, y(-z) = 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{I}_0^{\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{21} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix}$$

→ El eje $\hat{e}_3 \perp \pi$ es principal

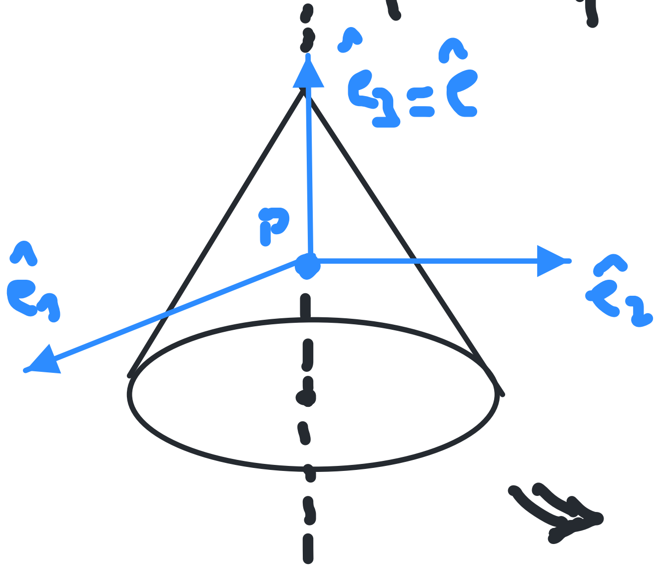
→ En particular, lo anterior vale para RÍGIDOS PLANOS

→ Adicionalmente, si lo ubicamos en el plano $z = 0$

$$\Rightarrow \boxed{I_{11} + I_{22} = I_{33}}$$ (convencerse)

2) SIMETRÍA DE REVOLUCIÓN

→ Es fácil verificar que:



i) El eje $\hat{e}$ de simetría es principal (tomando $O \in e$)

ii) Cualquier eje $\perp \hat{e}$ por O es principal

$\Rightarrow$ puedo tomar 2 cualquiera perpendiculares entre sí

iii) Los momentos de inercia respecto a dichos ejes SON IGUALES

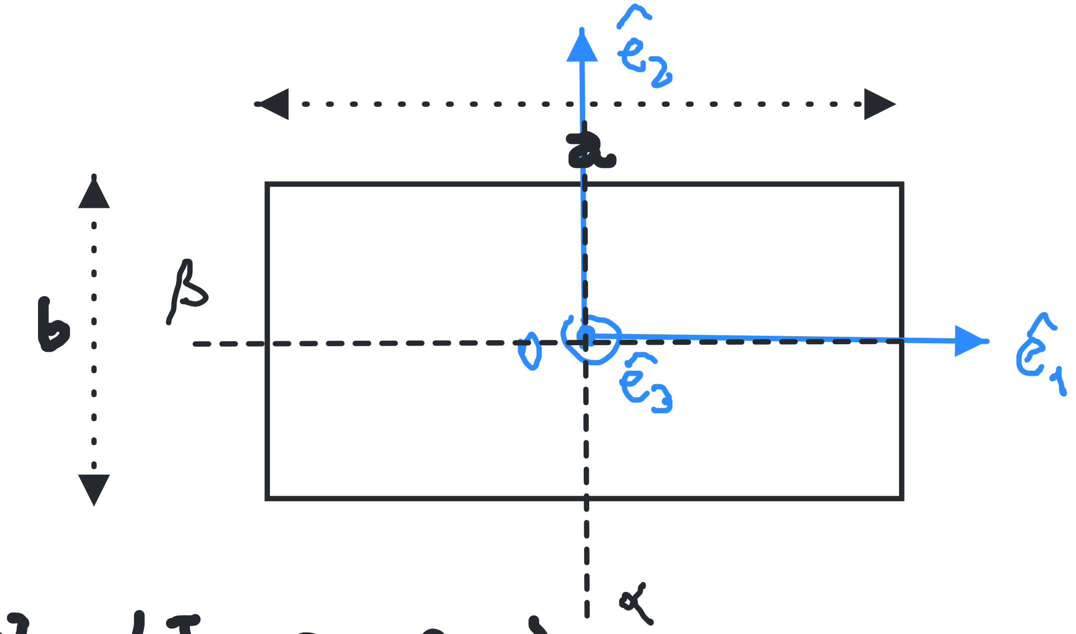
$\Rightarrow$

$$\mathbb{I}_P^{\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{11} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix}$$

3) SIMETRÍA CENTRAL

→ Cualquier eje que pasa por el centro de simetría es principal respecto a dicho punto

EJEMPLO: Placa rectangular homogénea de lados a y b



Calculemos el tensor respecto a su centro de masa O

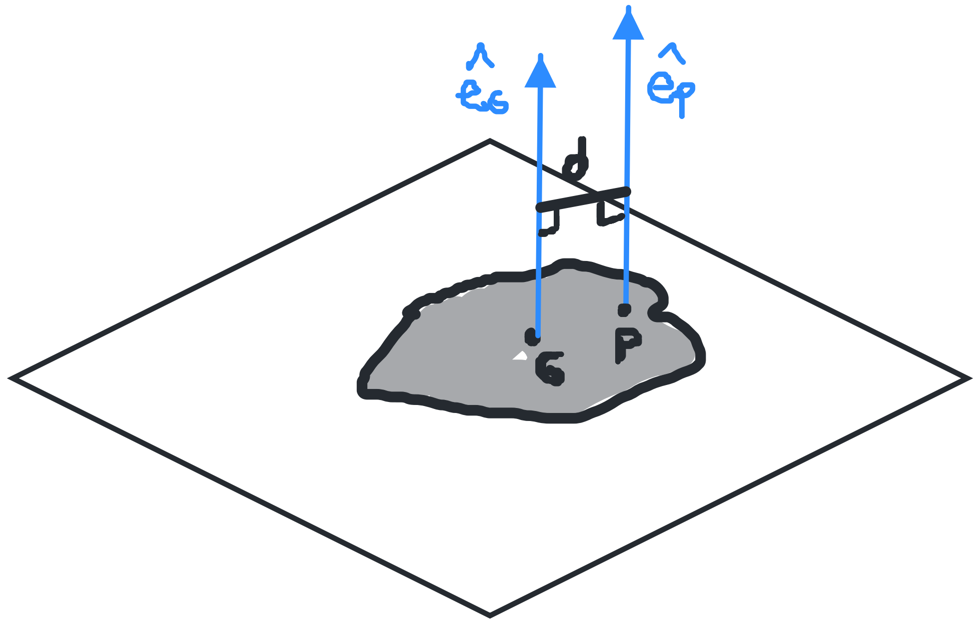
Notamos que: $\begin{cases} \text{Rígido plano} \Rightarrow \hat{e}_3 \text{ principal} \\ \alpha \text{ plano de simetría y } \hat{e}_1 \perp \alpha \Rightarrow \hat{e}_1 \text{ principal} \\ \beta \text{ '' '' '' y } \hat{e}_2 \perp \beta \Rightarrow \hat{e}_2 \text{ principal} \\ \text{por ser plano: } I_{11} + I_{22} = I_{33} \Rightarrow \underline{\underline{I}}_O^{\{\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3\}} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11}+I_{22} \end{pmatrix} \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} I_{11} = \int (y^2 + \cancel{z^2})\, dm \\ dm = \sigma\, da = \frac{M}{ab}\, dx\, dy \end{array}\right\} \Rightarrow I_{11} = \frac{M}{ab} \iint y^2\, dx\, dy = \frac{M}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} y^2\, dy = \frac{M\cancel{a}}{\cancel{a}b} \left.\frac{y^3}{3}\right|_{-b/2}^{b/2} = \frac{Mb^2}{12}$$

Análogamente: $I_{22} = \frac{Ma^2}{12} \Rightarrow I_{33} = \frac{M(a^2+b^2)}{12} \Rightarrow \underline{\underline{I}}_O^{\{\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3\}} = \frac{M}{12} \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$

TEOREMA DE STEINER (DE LOS EJES PARALELOS)

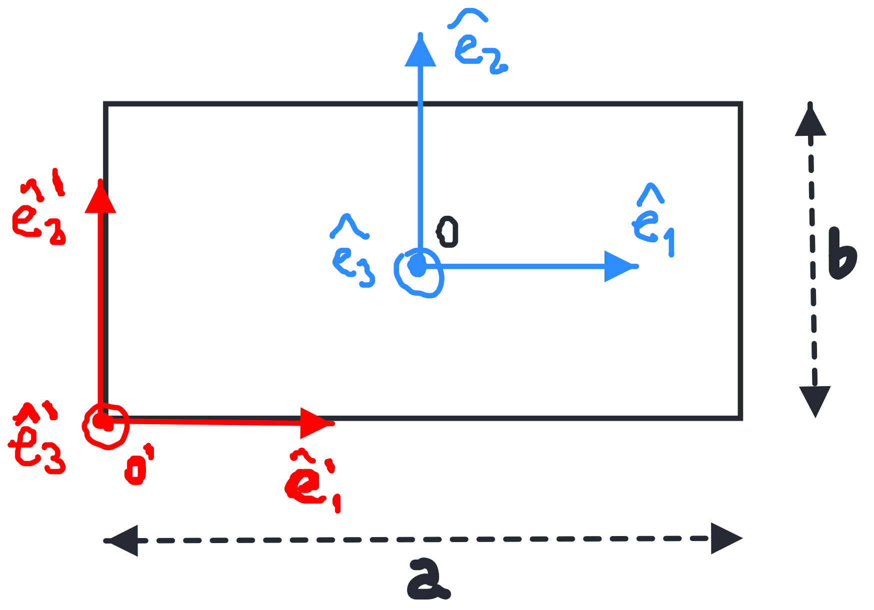
→ Para rígidos planos teníamos que: $\boxed{I_{\hat{e}_P} = I_{\hat{e}_G} + Md^2}$



donde: $\begin{cases} I_{\hat{e}_P} = \text{momento de inercia respecto a eje por P} \\ I_{\hat{e}_G} = \text{" " " " " " por } \underbrace{G}_{\text{C.M.}} \\ d = \text{distancia entre los ejes} \\ M = \text{masa del rígido} \end{cases}$

→ En general: $\boxed{\mathbb{I}_O^{\{\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3\}} = \mathbb{I}_G^{\{\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3\}} + \mathbb{J} \quad / \quad \mathbb{J}_{\alpha\beta} = M\left[(\vec{r}_O-\vec{r}_G)^2\delta_{\alpha\beta} - (\vec{r}_O-\vec{r}_G)_\alpha(\vec{r}_O-\vec{r}_G)_\beta\right]}$

EJEMPLO: Hallar $\mathbb{I}_{O'}^{\{\hat{e}_1', \hat{e}_2', \hat{e}_3'\}}$ sin calcular integrales



$\vec{r}_{O'} - \vec{r}_G = -\frac{a}{2}\hat{e}_1 - \frac{b}{2} e_2$

$\rightarrow J_{11} = M\left[(\vec{r}_{O'} - \vec{r}_G)^2 \delta_{11} - (\vec{r}_{O'} - \vec{r}_G)_1 (\vec{r}_{O'} - \vec{r}_G)_1\right] = M\left[\frac{a^2+b^2}{4} - \frac{a^2}{4}\right] = \frac{Mb^2}{4}$

$\rightarrow J_{22} = M\left[\frac{a^2+b^2}{4} - \frac{b^2}{4}\right] = \frac{Ma^2}{4}$

$\rightarrow J_{33} = M\left[\frac{a^2+b^2}{4} - 0^2\right] = M\left(\frac{a^2+b^2}{4}\right)$

$\Rightarrow$ MOMENTOS DE INERCIA TRANSFORMAN SUMANDO Md^2 $\Rightarrow$
$\begin{cases} \hat{e}_1 \rightarrow \hat{e}_1' : d = b/2 \\ \hat{e}_2 \rightarrow \hat{e}_2' : d = a/2 \\ \hat{e}_3 \rightarrow \hat{e}_3' : d = \sqrt{(a/2)^2 + (b/2)^2} \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} \rightarrow J_{12} = M\left[0 - \left(-\frac{a}{2}\right)\left(-\frac{b}{2}\right)\right] = \frac{Mab}{4} \\ \rightarrow \hat{e}_3' \text{ es principal} \Rightarrow J_{13} = J_{23} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{I}_{O'}^{\{\hat{e}_1', \hat{e}_2', \hat{e}_3'\}} = \mathbb{I}_{O}^{\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}} + \mathbb{J} = M \begin{pmatrix} b^2/3 & ab/4 & 0 \\ ab/4 & a^2/3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2+b^2}{3} \end{pmatrix}$