CLASE 8: SISTEMAS DE PARTÍCULAS (PARTE 2)

Aprenderemos:

- Qué es un rígido, cuantos grados de libertad tiene y cómo se define su velocidad angular
- Cómo es su distribución de velocidades y cómo emplearla para:
  1) Obtener expresiones analíticas para los vínculos de rodadura
  2) Hallar la velocidad angular del rígido en situaciones no triviales
- Cómo es su distribución de aceleraciones

CUERPO RÍGIDO

⇨ Un sistema de partículas $\mathcal{R}$ constituye un cuerpo rígido $\Leftrightarrow$ $\underbrace{\forall P, Q \in \mathcal{R}, \ |\vec{r}_P - \vec{r}_Q| = cte}$

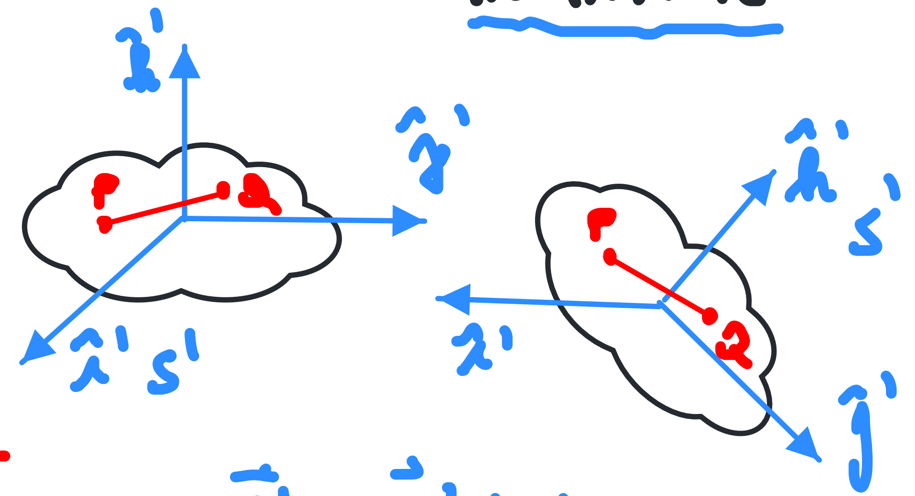
A medida que el sistema se mueve en el espacio, la distancia entre cualquier par de puntos de $\mathcal{R}$ DEBE PERMANECER INVARIANTE

⇨ El movimiento más general de un rígido en el espacio requiere de 6 COORDENADAS para ser descrito

Por ejemplo : $\begin{cases} \text{3 coordenadas para ubicar su C.M} \\ \text{3 ángulos para describir su orientación} \end{cases}$

⇨ LAS ECS. CARDINALES $\begin{cases} \dot{\vec{P}} = \vec{F}^{ext} = M\vec{a}_G \\ \dot{\vec{L}} = M\vec{v}_G \times \vec{v}_Q + \vec{M}_Q^{ext} \end{cases}$ SON SUFICIENTES PARA RESOLVER SU DINÁMICA

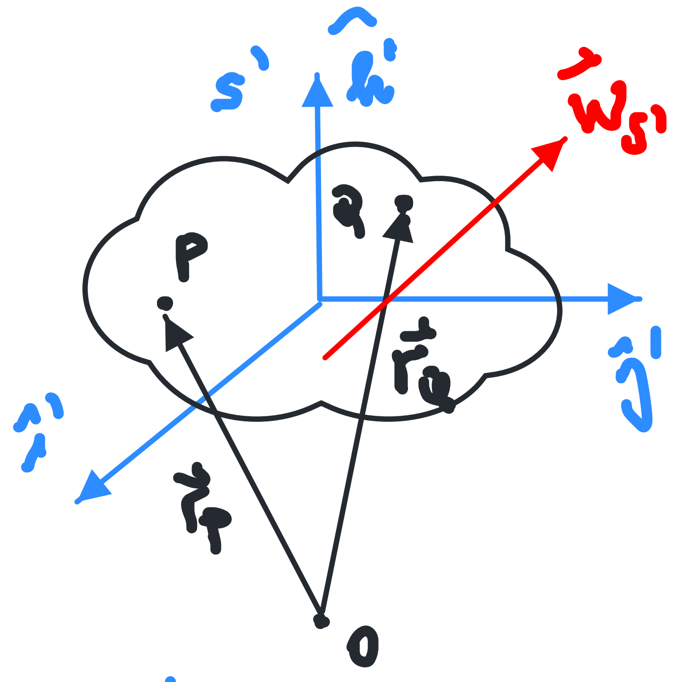
⇨ Velocidad angular de un rígido : ES LA $\vec{W}_S$, DONDE S ES CUALQUIER REFERENCIAL SOLIDARIO AL RÍGIDO



$\vec{W}_{S'} = \vec{W}_{rígido}$

DISTRIBUCIÓN DE VELOCIDADES DE UN RÍGIDO

⇨ Dada la velocidad de un punto $Q \in \mathcal{R}$ y $\vec{\omega}_{rígido}$, PERMITE DETERMINAR LA VELOCIDAD DE CUALQUIER OTRO PUNTO DEL RÍGIDO



S' = sistema solidario al rígido

$$\underbrace{\frac{d(\vec{r}_P-\vec{r}_Q)}{dt}}_{\vec{v}_P-\vec{v}_Q} = \underbrace{\frac{d'(\vec{r}_P-\vec{r}_Q)}{dt}}_{0} + \vec{\omega}_{S'} \times (\vec{r}_P-\vec{r}_Q)$$

0 (El vector $\vec{QP}$ es fijo en S' pues ambos son solidarios al rígido)

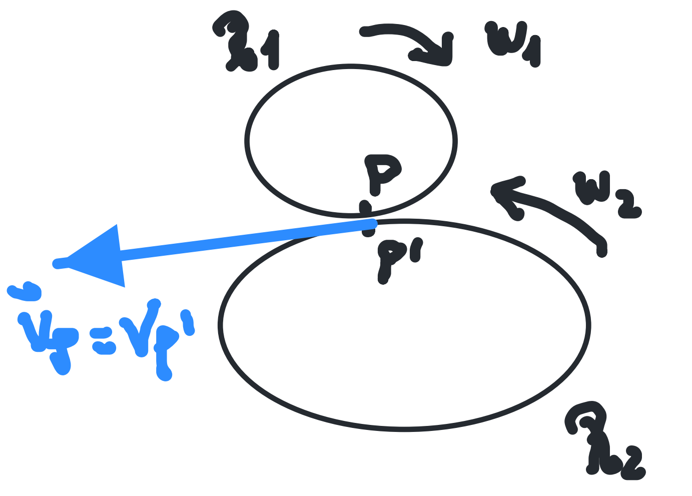
$$\Longrightarrow \boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega}_{S'} \times (\vec{r}_P-\vec{r}_Q)}$$

DIST. VELOCIDADES

OBS: OJO! P y Q DEBEN PERTENECER AL RÍGIDO!

OBS 2: Útil para ⇒ ESTUDIAR VÍNCULOS DE RODADURA
⇒ DETERMINAR $\vec{\omega}$ RÍGIDO

EJEMPLO: RODADURA PURA (sin deslizamiento)

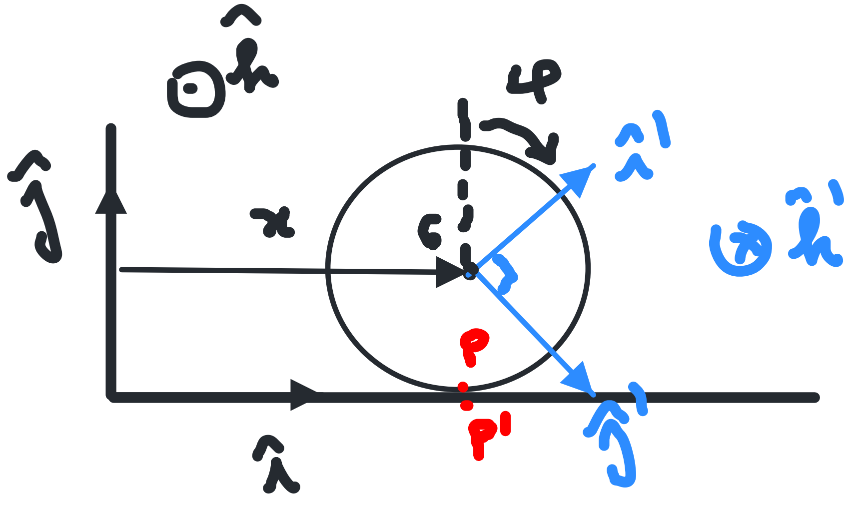


⇨ Los puntos de contacto de ambas superficies DEBEN TENER LA MISMA VELOCIDAD

⇨ En particular, si $\mathcal{R}_2$ en reposo $\Rightarrow \vec v_{P'} = 0 \rightarrow \vec v_P = 0$

$P \in \mathcal{R}_1$, $P' \in \mathcal{R}_2$

CASO SIMPLE: disco RSD sobre plano horizontal fijo



$$\left.\begin{aligned}
&\vec v_P \overset{RSD}{=} \vec v_{P'} = 0 \quad (\text{piso fijo})\\
&\vec v_G = \dot x\,\hat\imath\\
&\vec\omega = -\dot\varphi\,\hat k = \dot\varphi\,\hat k'\\
&\vec r_G - \vec r_P = R\,\hat\jmath
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec v_G = \cancel{\vec v_P} + \vec\omega \times (\vec r_G - \vec r_P)$$

$$\dot x\,\hat\imath = \underbrace{-\dot\varphi\,\hat k \times R\,\hat\jmath}$$

$$\dot x\,\cancel{\hat\imath} = R\dot\varphi\,\cancel{\hat\imath} \Rightarrow \boxed{\dot x = R\dot\varphi}$$

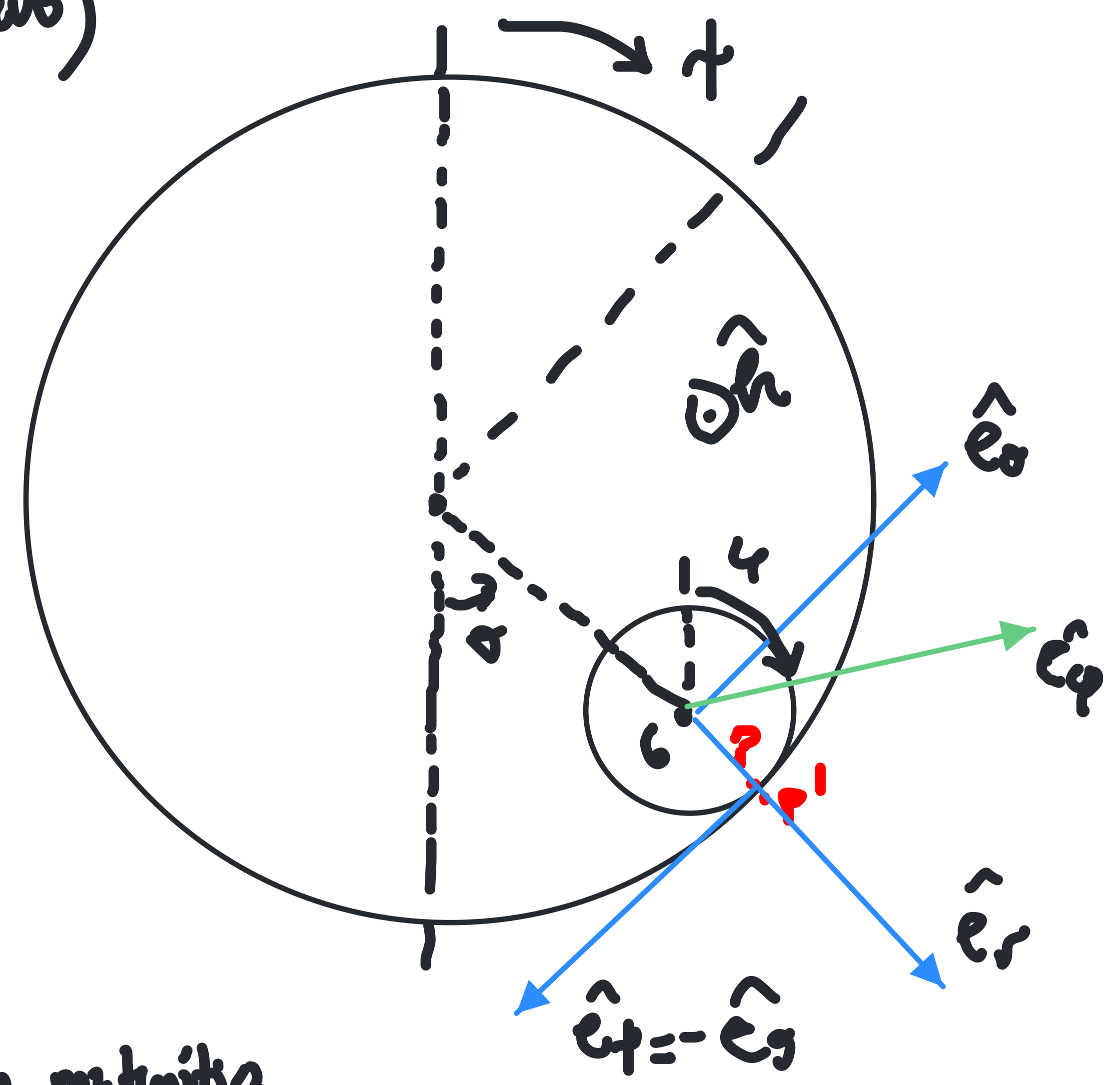
EJ 2: Disco RSD en el interior de un anillo que gira respecto a su centro fijo

¿Cuántas coordenadas se requieren a priori (sin considerar el vínculo) para describir el sistema?

3: $\psi \rightarrow$ giro del anillo

$\varphi \rightarrow$ " " disco

$\theta \rightarrow$ ubica el cm (G) del disco



$$\Rightarrow \vec{v}_P \overset{RSD}{=} \vec{v}_{P'} = R\dot{\psi}\,\hat{e}_\psi$$
$$\vec{v}_G = (R-r)\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$$
$$\vec{\omega}_d = \vec{\omega}_{disco} = -\dot{\varphi}\,\hat{k}$$
$$\vec{r}_G - \vec{r}_P = -r\,\hat{e}_r$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{v}_G} = \vec{v}_P + \vec{\omega}_d \times (\vec{r}_G - \vec{r}_P)$$
$$(R-r)\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta = R\dot{\psi}\,\hat{e}_\psi - \dot{\varphi}\,\hat{k} \times (-r\,\hat{e}_r)$$
$$(R-r)\dot{\theta}\,\cancel{\hat{e}_\theta} = -R\dot{\psi}\,\cancel{\hat{e}_\theta} + r\dot{\varphi}\,\cancel{\hat{e}_\theta}$$
$$\Rightarrow \boxed{(R-r)\dot{\theta} = -R\dot{\psi} + r\dot{\varphi}}$$

Expresión matemática del vínculo

Otra aplicación: DETERMINACIÓN DE LA VELOCIDAD ANGULAR DE UN RÍGIDO

MÉTODO GENERAL: i) Determino la velocidad de 3 puntos P, Q, R NO ALINEADOS DEL RÍGIDO

ii) Planteo $\vec{w}$ genérico en alguna base adecuada: $\vec{w} = w_1\hat{i} + w_2\hat{j} + w_3\hat{k}$

iii) Aplico dist. velocidades 2 veces: $\begin{cases} \vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{w}\times(\vec{r}_P - \vec{r}_Q) \\ \vec{v}_P = \vec{v}_R + \vec{w}\times(\vec{r}_P - \vec{r}_R) \end{cases}$

iv) A partir de las ecs. anteriores determino w_1, w_2 y w_3

OBS1: La ecuación $\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{w}\times(\vec{r}_P - \vec{r}_Q)$ equivale a 3 ecuaciones escalares y tenemos 3 incógnitas (w_1, w_2, w_3)

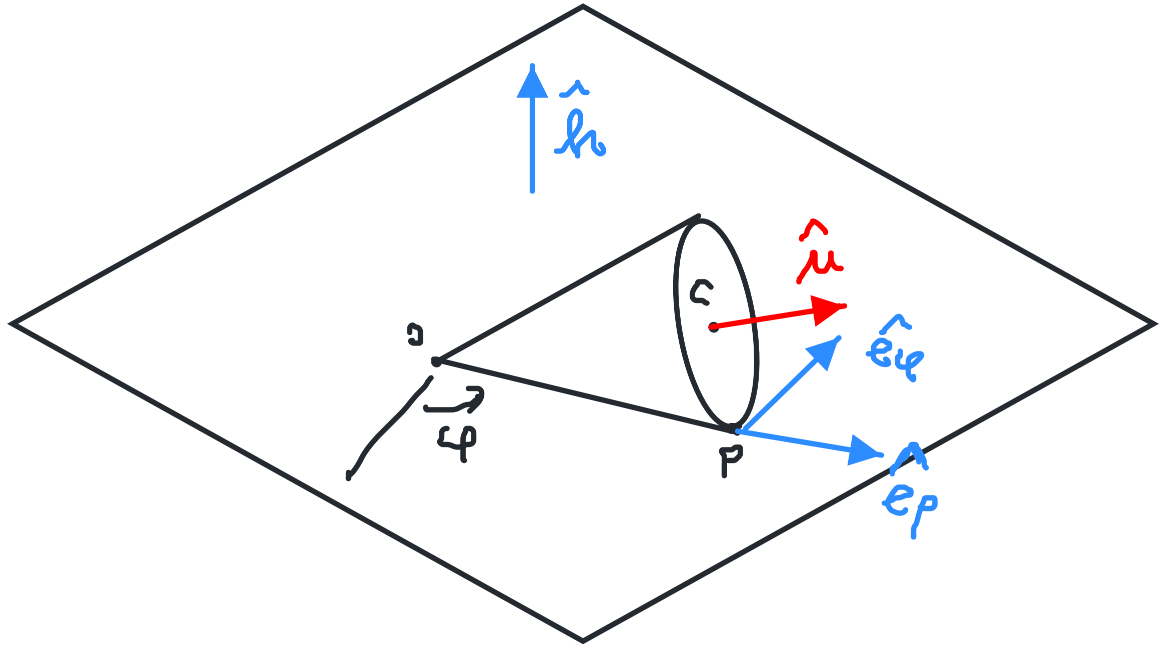
$\Rightarrow$ ¿Por qué es necesario aplicar dist. vel. con un tercer punto?

OBS2: Si el rígido tiene 2 ptos fijos (o instantáneamente en reposo o con la misma velocidad)

$\Rightarrow \cancel{\vec{v}_P} = \cancel{\vec{v}_Q} + \vec{w}\times(\vec{r}_P - \vec{r}_Q) \Rightarrow \vec{w} \parallel PQ \Rightarrow \vec{w} = w_1 \hat{PQ}$ (FACILITA MUCHO PUES HAY QUE DETERMINAR 1 COMPONENTE EN LUGAR DE 3!)

EJEMPLO → Cono de vértice O y ángulo al vértice 2α
→ RSD sobre plano horizontal fijo

⇒ Hallar $\vec{W}_{cono}$ en función de $\dot{\varphi}$ de la recta de contacto



OBS1: Cono RSD ⇒ Todos los puntos del cono que instantáneamente pertenecen a la recta de contacto tienen $\vec{v} = 0$

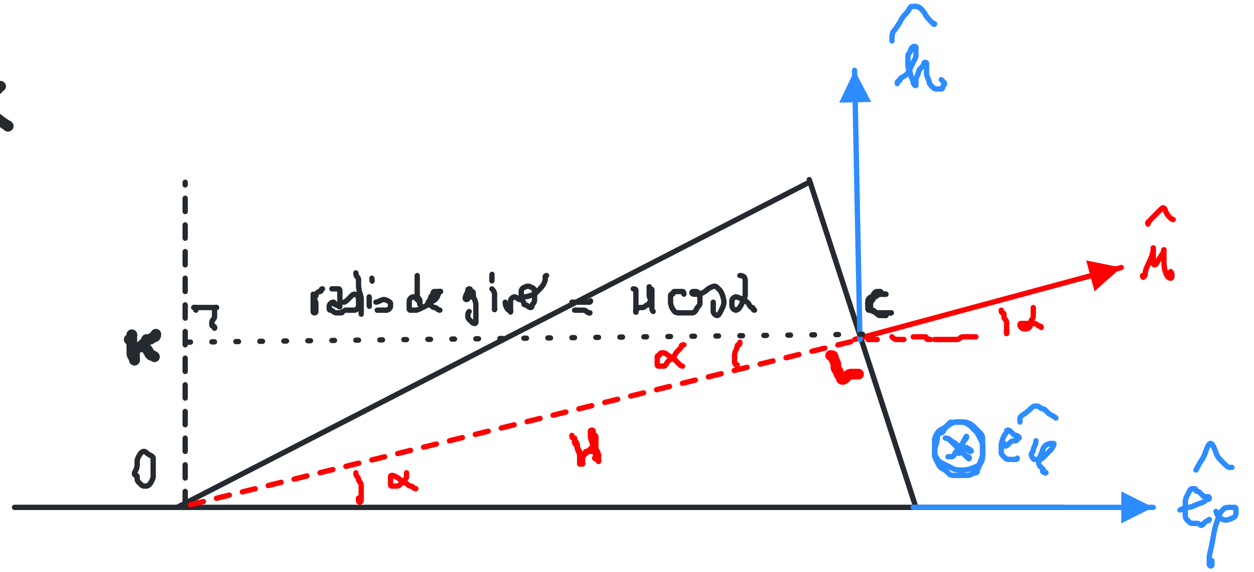
OBS2: En particular: $\vec{v}_o = \vec{v}_{o'} = 0$, $\vec{v}_p = \vec{v}_{p'} = 0$ ⇒ $\cancel{\vec{v}_p} = \cancel{\vec{v}_o} + \vec{W} \times (\vec{r}_p - \vec{r}_o)$ ⇒ $\vec{W} \parallel \vec{OP}$ ⇒ $\boxed{\vec{W} = W_1 \hat{e}_p}$

LA RECTA DE CONTACTO ES EL EJE INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN

Necesitamos la velocidad de otro punto ⇒ NOTAMOS QUE CUALQUIER PUNTO DEL EJE DEL CONO DESCRIBE UN MOVIMIENTO CIRCULAR

En particular, el punto C describe un MC de centro K y radio $H\cos\alpha$, siendo H la altura del cono

$$\Rightarrow \vec{v}_C = H\cos\alpha\,\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi$$



$$\mu = \cos\alpha\,\hat{e}_\rho + \sin\alpha\,\hat{h}$$

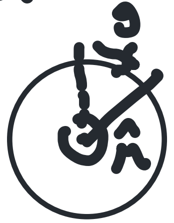
Luego: $\underbrace{\vec{v}_C}_{} = \cancel{\vec{v}_O} + \vec{\omega}_{S'} \times (\vec{r}_C - \vec{r}_O)$

$$H\cos\alpha\,\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi = \omega_1\,\hat{e}_\rho \times H\hat{\mu}$$

$$H\cos\alpha\,\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi = \omega_1\,\hat{e}_\rho \times \left[H\cos\alpha\,\hat{e}_\rho + H\sin\alpha\,\hat{h}\right]$$

$$\cancel{H}\cos\alpha\,\dot{\varphi}\,\cancel{\hat{e}_\varphi} = -\omega_1 \cancel{H}\sin\alpha\,\cancel{\hat{e}_\varphi} \Rightarrow \omega_1 = -\frac{\cos\alpha\,\dot{\varphi}}{\sin\alpha} = -\dot{\varphi}\cot\alpha \Rightarrow \boxed{\vec{\omega} = -\dot{\varphi}\cot\alpha\,\hat{e}_\rho}$$

NOTA: Hacerlo por adición de $\vec{\omega}_s$: $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\hat{h} - \dot{\theta}\hat{\mu}$

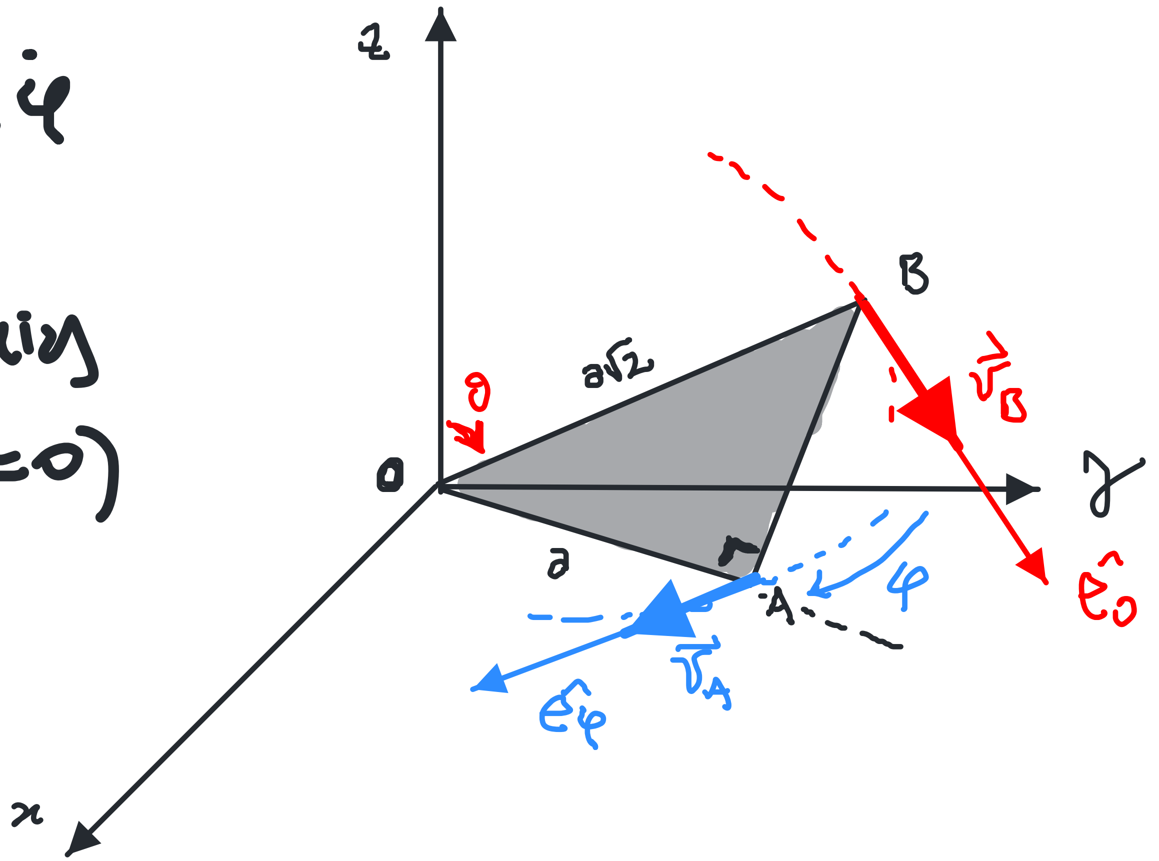


EJEMPLO

→ $\overset{\triangle}{OAB}$ rectángulo isósceles de cateto a } Hallar $\vec{\omega}_{\overset{\triangle}{ABC}}$ en función de $\dot{\varphi}$

→ O fijo, $A \in \alpha: z=0$, $B \in \beta: y=0$

Es fundamental notar que A y B se mueven en sendas circunferencias de centro O y radios a (en el plano $z=0$) y $a\sqrt{2}$ (en el plano $y=0$)



$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_O = 0 \\ \vec{v}_A = a\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi \\ \vec{v}_B = a\sqrt{2}\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta \end{cases}$$

Con la velocidad de 3 puntos podemos plantear un $\vec{\omega}$ genérico y aplicar distribución de velocidades 2 veces para hallar sus 3 componentes.

PERO: Previamente es necesario expresar $\dot{\theta}$ en función de $\dot{\varphi}$ y φ (el dato es $\varphi(t)$, no θ)

→ La relación entre θ y φ puede obtenerse de varias formas

Por ejemplo, notando que $\vec{OA} \perp \vec{AB} \Rightarrow \underline{\vec{OA}\cdot\vec{AB} = 0}$

$$\left.\begin{aligned} \vec{OA} &= a\sin\varphi\,\hat{i} + a\cos\varphi\,\hat{j} \\ \vec{OB} &= a\sqrt{2}\sin\theta\,\hat{j} + a\sqrt{2}\cos\theta\,\hat{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = -a\sin\varphi\,\hat{i} + a\left(\sqrt{2}\sin\theta - \cos\varphi\right)\hat{j} + a\sqrt{2}\cos\theta\,\hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{OA}\cdot\vec{AB} = -a^2\sin^2\varphi + a^2\cos\varphi\left(\sqrt{2}\sin\theta - \cos\varphi\right) = -a^2\left(\overbrace{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}^{=1} - \sqrt{2}\cos\varphi\sin\theta\right) \overset{\perp}{=} 0$$

$$\Rightarrow 1 - \sqrt{2}\cos\varphi\sin\theta = 0 \rightarrow \boxed{\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}\cos\varphi}} \underset{\text{DERIVO}}{\Longrightarrow} \dot{\theta} = \frac{\dot{\varphi}\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\sqrt{2\cos^2\varphi - 1}} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_B = \frac{a\sqrt{2}\,\dot{\varphi}\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\sqrt{2\cos^2\varphi - 1}}\,\hat{e}_\theta}$$

Ahora sí: i) Escribimos $\vec{\omega} = \omega_1\hat{i} + \omega_2\hat{j} + \omega_3\hat{k}$ y

ii) planteamos:
$$\left\{\begin{aligned} \vec{v}_B &= \vec{v}_O + \vec{\omega}\times(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \\ \vec{v}_A &= \vec{v}_O + \vec{\omega}\times(\vec{r}_A - \vec{r}_O) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\omega_1 = -\dot{\theta},\ \omega_2 = -\dot{\varphi}\,\mathrm{tg}\,\theta,\ \omega_3 = -\dot{\varphi}} \quad \text{(HACERLO)}$$

DISTRIBUCIÓN DE ACELERACIONES DE UN RÍGIDO

Tenemos: $\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_Q)$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d\vec{v}_P}{dt}}_{\vec{a}_P} = \underbrace{\frac{d\vec{v}_Q}{dt}}_{\vec{a}_Q} + \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_Q)\right) \qquad \frac{d(\vec{r}_P - \vec{r}_Q)}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_Q)$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_Q + \dot{\vec{\omega}} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_Q) + \vec{\omega} \times \frac{d}{dt}(\vec{r}_P - \vec{r}_Q)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_P = \vec{a}_Q + \dot{\vec{\omega}} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_Q) + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_Q)\right)}$$