UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY
FACULTAD DE INGENIERIA
IIMPI
INSTITUTO DE INGENIERIA MECANICA Y PRODUCCION INDUSTRIAL

DINÁMICA | Newton-Euler

Fundamentos de Robótica Industrial

Versión 2024

Video

Fundamentos de Robótica Industrial

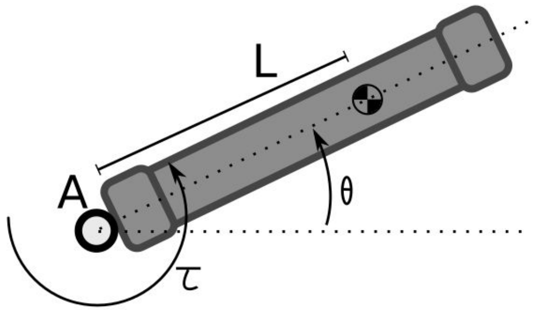
Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

Principalmente existen 2 procedimientos para determinar el modelo dinámico de un robot.

1. El ***método de Newton-Euler,*** que se basa en la aplicación de la primera y la segunda ley de Newton.
2. La ***formulación Lagrangiana***, que se basa en consideraciones energéticas.

Consideremos el siguiente ejemplo:

- un robot rígido,
- articulado en A,
- peso m uniformemente distribuido,
- distancia al centro de masa L,
- par articular τ



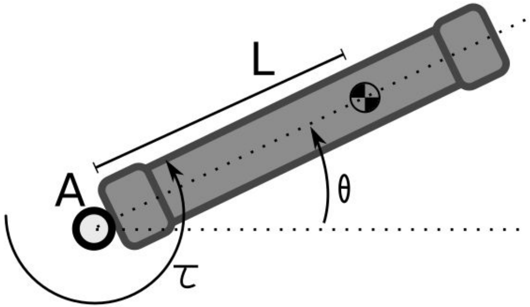
Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

formulación Lagrangiana

$$L = K - U$$

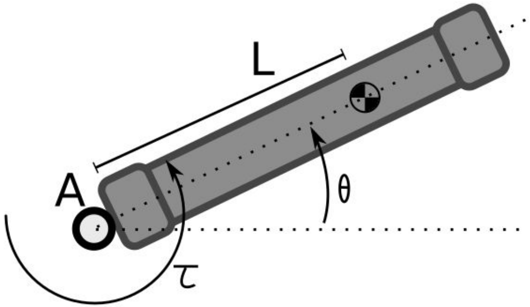
$$\tau_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

- L: Función Lagrangiana
- K: Energía cinética
- U: Energía potencial
- q_i: coordenadas generalizadas
- τ_i: fuerza o par aplicado en el grado de libertad q_i



Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

formulación Lagrangiana



$$L = K - U$$

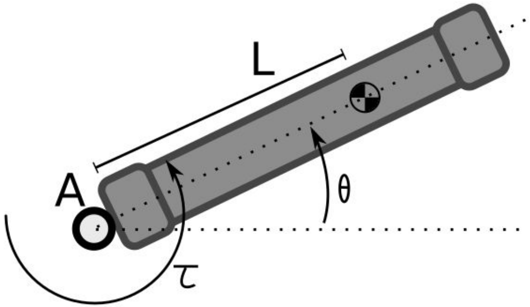
$$\tau_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

- L: Función Lagrangiana
- K: Energía cinética
- U: Energía potencial
- q_i: coordenadas generalizadas
- τ_i: fuerza o par aplicado en el grado de libertad q_i

$$K = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 \qquad U = Mgh = MgLsen(\theta) \longrightarrow L = \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 - MgLsen(\theta)$$

Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

formulación Lagrangiana



$$L = K - U$$

$$\tau_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

- L: Función Lagrangiana
- K: Energía cinética
- U: Energía potencial
- q_i: coordenadas generalizadas
- τ_i: fuerza o par aplicado en el grado de libertad q_i

$$K = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} M L^2 \dot{\theta}^2 \qquad U = Mgh = MgLsen(\theta) \longrightarrow L = \frac{1}{2} M L^2 \dot{\theta}^2 - MgLsen(\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -MgLcos(\theta) \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ML^2\dot{\theta} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ML^2\ddot{\theta} \longrightarrow \boxed{\tau = ML^2\ddot{\theta} + MgLcos(\theta)}$$

Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

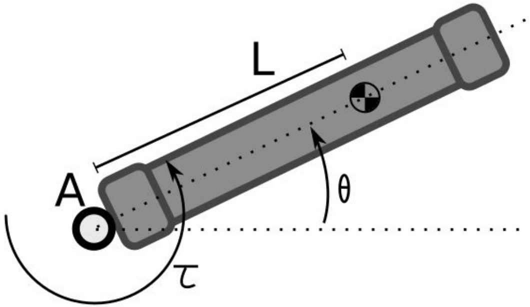
método de Newton-Euler

Variación de cantidad de movimiento

$$\sum \mathbf{T} = \frac{d}{dt}(\mathbf{I}\omega) = \mathbf{I}\dot{\omega} + \omega \times (\mathbf{I}\omega)$$

$$\sum F = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

- ω: Velocidad angular
- **I**: Tensor de inercias
- **T**: Torques externos
- F: Fuerzas externas
- m: masa
- v: velocidad



Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

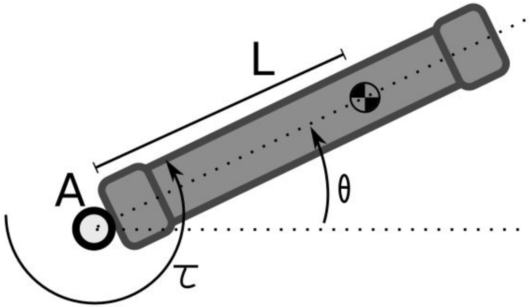
método de Newton-Euler

Variación de cantidad de movimiento

$$\sum \mathbf{T} = \frac{d}{dt}(\mathbf{I}\omega) = \mathbf{I}\dot{\omega} + \omega \times (\mathbf{I}\omega)$$

$$\sum F = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

- ω: Velocidad angular
- **I**: Tensor de inercias
- **T**: Torques externos
- F: Fuerzas externas
- m: masa
- v: velocidad



Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

método de Newton-Euler

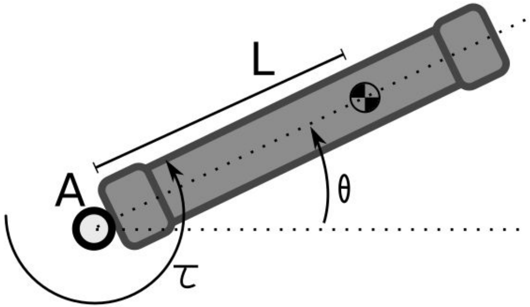
Variación de cantidad de movimiento

$$\sum \mathbf{T} = \frac{d}{dt}(\mathbf{I}\omega) = \mathbf{I}\dot{\omega} + \omega \times (\mathbf{I}\omega)$$

$$\sum F = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

- ω: Velocidad angular
- **I**: Tensor de inercias
- **T**: Torques externos
- F: Fuerzas externas
- m: masa
- v: velocidad

$$\tau - MgLcos(\theta) = \mathbf{I}\dot{\omega} = \mathbf{I}\ddot{\theta}$$



Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

método de Newton-Euler

Variación de cantidad de movimiento

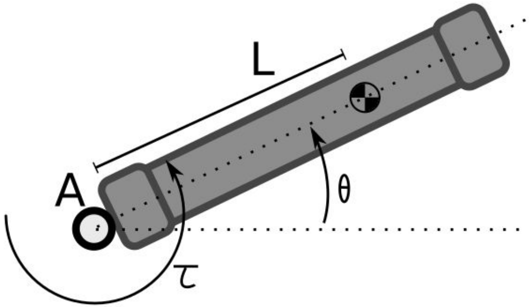
$$\sum \mathbf{T} = \frac{d}{dt}(\mathbf{I}\omega) = \mathbf{I}\dot{\omega} + \omega \times (\mathbf{I}\omega)$$

$$\sum F = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

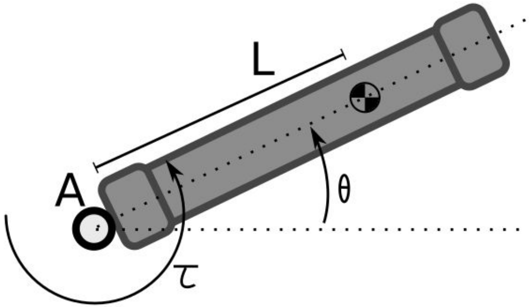
- ω: Velocidad angular
- **I**: Tensor de inercias
- **T**: Torques externos
- F: Fuerzas externas
- m: masa
- v: velocidad

$$\tau - MgLcos(\theta) = \mathbf{I}\dot{\omega} = \mathbf{I}\ddot{\theta}$$

$$\boxed{\tau = ML^2\ddot{\theta} + MgLcos(\theta)}$$



Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular



Recordemos

Independientemente del procedimiento para obtener el **modelo dinámico del robot**, para *n* GDL el modelo se presenta de la siguiente forma:

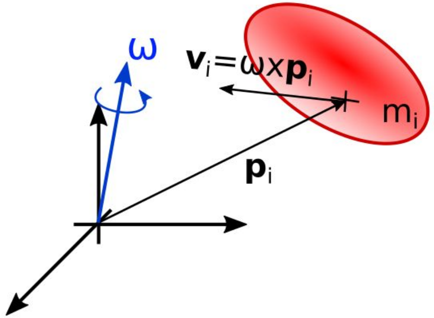
$$\tau = \mathbf{M}(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q}) + G(q)$$

Donde:
q: vector (n) de coordenadas articulares
τ: vector (n) de cargas en cada articulación
M: Matriz (nxn) de inercias
C: Vector de fuerzas de Coriolis + centrífugas
G: Vector de fuerzas gravitatorias

Modelo dinámico - Momento angular

Momento angular en un Movimiento rígido

$$\phi = \sum_i \mathbf{p}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

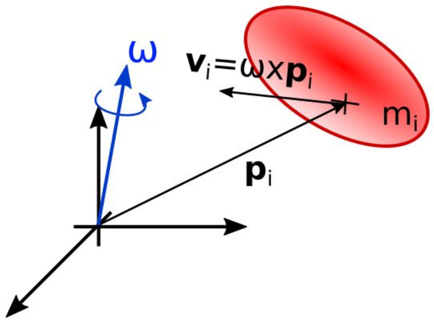


Modelo dinámico - Momento angular

Momento angular en un Movimiento rígido

$$\phi = \sum_i \mathbf{p}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

$$\phi = \sum_i m_i \mathbf{p}_i \times (\omega \times \mathbf{p}_i)$$



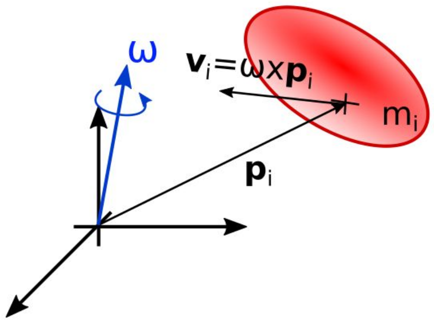
Modelo dinámico - Momento angular

Momento angular en un Movimiento rígido

$$\phi = \sum_i \mathbf{p}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

$$\phi = \sum_i m_i \mathbf{p}_i \times (\omega \times \mathbf{p}_i) \qquad m_i = \rho dV$$

$$\phi = \int \mathbf{p}_i \times (\omega \times \mathbf{p}_i)\rho dV$$



Modelo dinámico - Momento angular

Momento angular en un Movimiento rígido

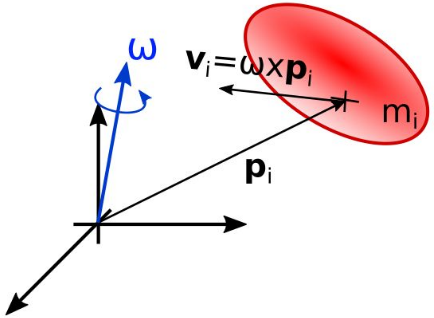
$$\phi = \sum_i \mathbf{p}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

$$\phi = \sum_i m_i \mathbf{p}_i \times (\omega \times \mathbf{p}_i) \qquad m_i = \rho dV$$

$$\phi = \int \mathbf{p}_i \times (\omega \times \mathbf{p}_i) \rho dV$$

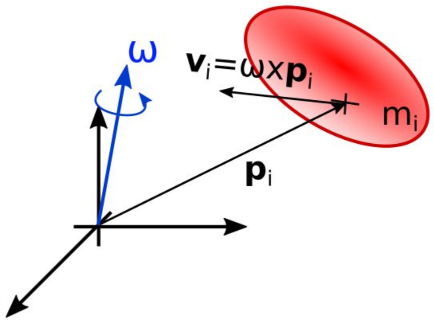
$$\phi = \int_V \mathbf{p}_i \times (-\mathbf{p}_i \times \omega) \rho dV$$

Propiedad: $\omega \times \mathbf{p}_i = -\mathbf{p}_i \times \omega$



Modelo dinámico - Momento angular

Momento angular en un Movimiento rígido



$$\phi = \sum_i \mathbf{p}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

$$\phi = \sum_i m_i \mathbf{p}_i \times (\omega \times \mathbf{p}_i)$$

$$m_i = \rho dV$$

$$\phi = \int \mathbf{p}_i \times (\omega \times \mathbf{p}_i)\rho dV$$

$$\phi = \int_V \mathbf{p}_i \times (-\mathbf{p}_i \times \omega)\rho dV$$

$$\phi = \left[\int_V -\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}\rho dV\right]\omega$$

Recordando: el operador del producto cruzado:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{a}}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{p} \times (-\mathbf{p} \times \omega) = -\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}\omega$$

Modelo dinámico - Momento angular

Momento angular en un Movimiento rígido

$$\phi = \sum_i \mathbf{p}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

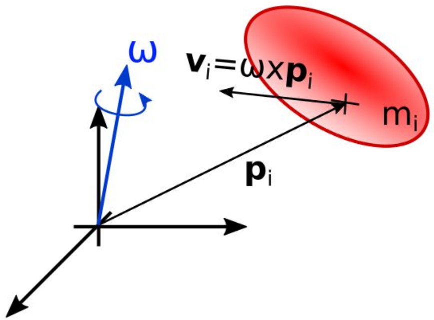
$$\phi = \sum_i m_i \mathbf{p}_i \times (\omega \times \mathbf{p}_i) \qquad m_i = \rho dV$$

$$\phi = \int \mathbf{p}_i \times (\omega \times \mathbf{p}_i) \rho dV$$

$$\phi = \int_V \mathbf{p}_i \times (-\mathbf{p}_i \times \omega) \rho dV$$

$$\phi = \left[\int_V -\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}} \rho dV \right] \omega$$

Tensor de inercia



Modelo dinámico - Momento angular

Momento angular en un Movimiento rígido

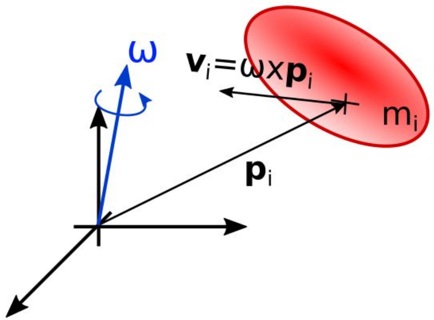
$$\phi = \sum_i \mathbf{p}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

$$\phi = \sum_i m_i \mathbf{p}_i \times (\omega \times \mathbf{p}_i) \qquad m_i = \rho dV$$

$$\phi = \int \mathbf{p}_i \times (\omega \times \mathbf{p}_i) \rho dV$$

$$\phi = \int_V \mathbf{p}_i \times (-\mathbf{p}_i \times \omega) \rho dV$$

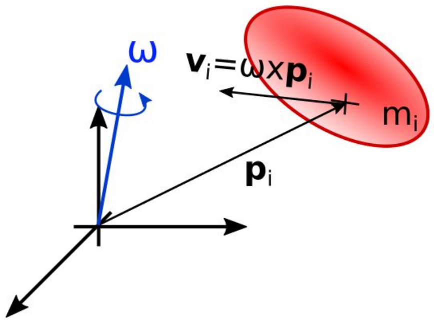
$$\phi = \left[\int_V -\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}} \rho dV \right] \omega \longrightarrow \phi = I\omega \qquad I = \int_V -\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}} \rho dV$$



Modelo dinámico - Tensor de Inercia

Tensor de Inercia

$$I = \int_V -\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}\rho dV$$

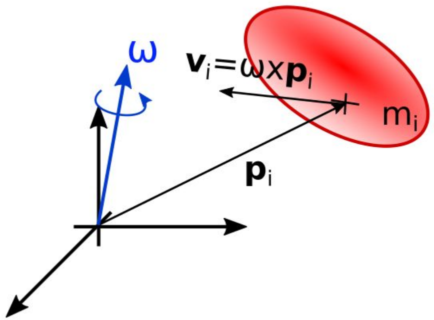


Modelo dinámico - Tensor de Inercia

Tensor de Inercia

$$I = \int_V -\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}\rho dV \longrightarrow (-\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}) = (\mathbf{p}^T\mathbf{p})\mathbf{I}_3 - \mathbf{p}\mathbf{p}^T$$

$$I = \int_V \left[(\mathbf{p}^T\mathbf{p})\mathbf{I}_3 - \mathbf{p}\mathbf{p}^T\right] \rho dV$$

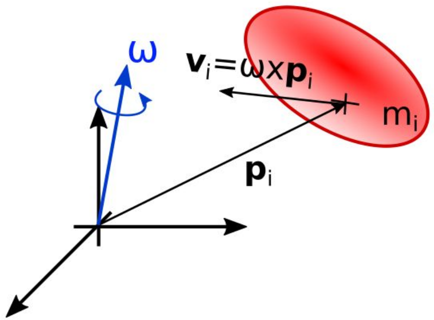


Modelo dinámico - Tensor de Inercia

Tensor de Inercia

$$I = \int_V -\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}\rho dV \longrightarrow (-\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}) = (\mathbf{p}^T\mathbf{p})\mathbf{I}_3 - \mathbf{p}\mathbf{p}^T$$

$$I = \int_V \left[(\mathbf{p}^T\mathbf{p})\mathbf{I}_3 - \mathbf{p}\mathbf{p}^T\right] \rho dV$$



Resolviendo por términos:

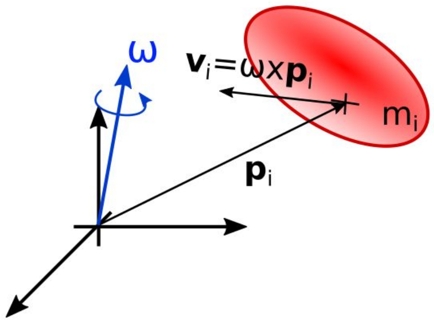
$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{p}^T\mathbf{p} =$$

Modelo dinámico - Tensor de Inercia

Tensor de Inercia

$$I = \int_V -\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}\rho dV \longrightarrow (-\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}) = (\mathbf{p}^T\mathbf{p})\mathbf{I}_3 - \mathbf{p}\mathbf{p}^T$$

$$I = \int_V \left[(\mathbf{p}^T\mathbf{p})\mathbf{I}_3 - \mathbf{p}\mathbf{p}^T\right] \rho dV$$



Resolviendo por términos:

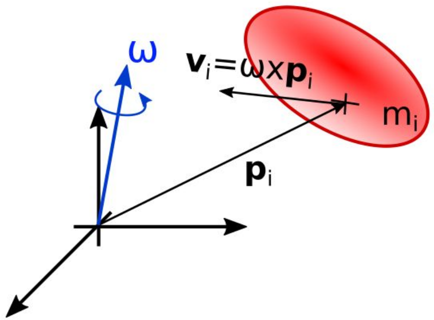
$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{p}^T\mathbf{p} = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \Rightarrow (\mathbf{p}^T\mathbf{p})\mathbf{I}_3 =$$

Modelo dinámico - Tensor de Inercia

Tensor de Inercia

$$I = \int_V -\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}\rho dV \longrightarrow (-\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}) = (\mathbf{p}^T\mathbf{p})\mathbf{I}_3 - \mathbf{p}\mathbf{p}^T$$

$$I = \int_V \left[(\mathbf{p}^T\mathbf{p})\mathbf{I}_3 - \mathbf{p}\mathbf{p}^T\right]\rho dV$$



Resolviendo por términos:

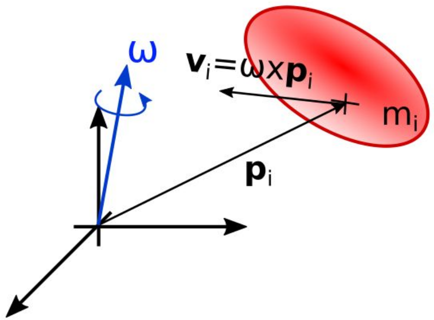
$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{p}^T\mathbf{p} = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \Rightarrow (\mathbf{p}^T\mathbf{p})\mathbf{I}_3 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Modelo dinámico - Tensor de Inercia

Tensor de Inercia

$$I = \int_V -\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}\rho dV \longrightarrow (-\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}) = (\mathbf{p}^T\mathbf{p})\mathbf{I}_3 - \mathbf{p}\mathbf{p}^T$$

$$I = \int_V \left[(\mathbf{p}^T\mathbf{p})\mathbf{I}_3 - \mathbf{p}\mathbf{p}^T\right] \rho dV$$



Resolviendo por términos:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{p}^T\mathbf{p} = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \Rightarrow (\mathbf{p}^T\mathbf{p})\mathbf{I}_3 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

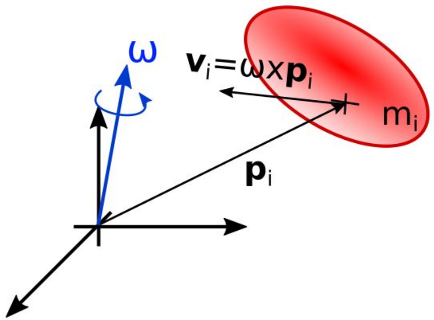
$$\mathbf{p}\mathbf{p}^T = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} (p_x \;\; p_y \;\; p_z) = \begin{pmatrix} p_x^2 & p_xp_y & p_xp_z \\ p_xp_y & p_y^2 & p_yp_z \\ p_xp_z & p_yp_z & p_z^2 \end{pmatrix}$$

Modelo dinámico - Tensor de Inercia

Tensor de Inercia

$$I = \int_V -\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}\rho dV \longrightarrow (-\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}) = (\mathbf{p}^T\mathbf{p})\mathbf{I}_3 - \mathbf{p}\mathbf{p}^T$$

$$I = \int_V \left[(\mathbf{p}^T\mathbf{p})\mathbf{I}_3 - \mathbf{p}\mathbf{p}^T\right]\rho dV$$



Resolviendo por términos:

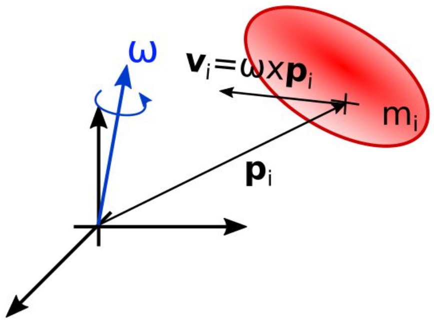
$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{p}^T\mathbf{p} = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \Rightarrow (\mathbf{p}^T\mathbf{p})\mathbf{I}_3 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p}\mathbf{p}^T = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} (p_x \ p_y \ p_z) = \begin{pmatrix} p_x^2 & p_xp_y & p_xp_z \\ p_xp_y & p_y^2 & p_yp_z \\ p_xp_z & p_yp_z & p_z^2 \end{pmatrix} \longrightarrow I = \int_V \begin{pmatrix} p_y^2 + p_z^2 & -p_xp_y & -p_xp_z \\ -p_xp_y & p_x^2 + p_z^2 & -p_yp_z \\ -p_xp_z & -p_yp_z & p_x^2 + p_y^2 \end{pmatrix} \rho dV$$

Modelo dinámico - Tensor de Inercia

Tensor de Inercia

$$I = \int_V \begin{pmatrix} p_y^2 + p_z^2 & -p_x p_y & -p_x p_z \\ -p_x p_y & p_x^2 + p_z^2 & -p_y p_z \\ -p_x p_z & -p_y p_z & p_x^2 + p_y^2 \end{pmatrix} \rho dV$$

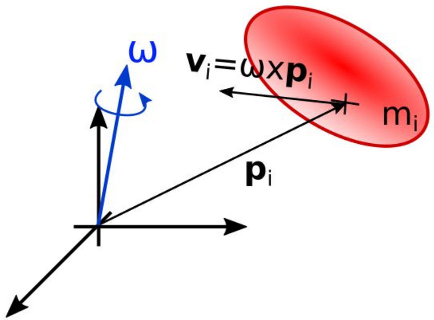


Modelo dinámico - Tensor de Inercia

Tensor de Inercia

$$I = \int_V \begin{pmatrix} p_y^2 + p_z^2 & -p_x p_y & -p_x p_z \\ -p_x p_y & p_x^2 + p_z^2 & -p_y p_z \\ -p_x p_z & -p_y p_z & p_x^2 + p_y^2 \end{pmatrix} \rho dV$$

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$$



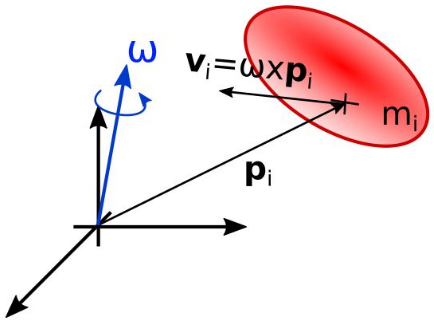
Modelo dinámico - Tensor de Inercia

Tensor de Inercia

$$I = \int_V \begin{pmatrix} p_y^2 + p_z^2 & -p_x p_y & -p_x p_z \\ -p_x p_y & p_x^2 + p_z^2 & -p_y p_z \\ -p_x p_z & -p_y p_z & p_x^2 + p_y^2 \end{pmatrix} \rho dV$$

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \iiint (y^2 + z^2)\rho \, dxdydz \\ I_{yy} &= \iiint (x^2 + z^2)\rho \, dxdydz \\ I_{zz} &= \iiint (y^2 + x^2)\rho \, dxdydz \\ I_{xy} &= \iiint xy\rho \, dxdydz \\ I_{xz} &= \iiint xz\rho \, dxdydz \\ I_{yz} &= \iiint yz\rho \, dxdydz \end{aligned}$$



Modelo dinámico - Tensor de Inercia

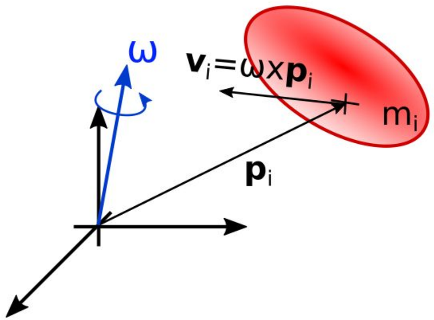
Tensor de Inercia

$$I = \int_V \begin{pmatrix} p_y^2 + p_z^2 & -p_x p_y & -p_x p_z \\ -p_x p_y & p_x^2 + p_z^2 & -p_y p_z \\ -p_x p_z & -p_y p_z & p_x^2 + p_y^2 \end{pmatrix} \rho dV$$

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} I_{xx} &= \iiint (y^2 + z^2)\rho \; dxdydz \\ I_{yy} &= \iiint (x^2 + z^2)\rho \; dxdydz \\ I_{zz} &= \iiint (y^2 + x^2)\rho \; dxdydz \end{aligned}\right\} \textbf{\textit{Momentos de Inercia}}$$

$$\left.\begin{aligned} I_{xy} &= \iiint xy\rho \; dxdydz \\ I_{xz} &= \iiint xz\rho \; dxdydz \\ I_{yz} &= \iiint yz\rho \; dxdydz \end{aligned}\right\} \textbf{\textit{Productos de Inercia}}$$



Modelo dinámico - Tensor de Inercia

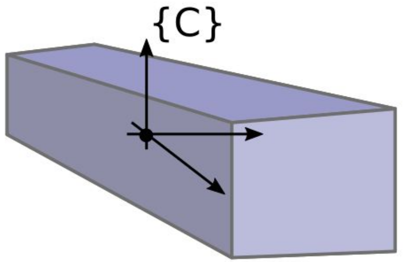
Tensor de Inercia

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} I_{xx} &= \iiint (y^2 + z^2)\rho \, dxdydz \\ I_{yy} &= \iiint (x^2 + z^2)\rho \, dxdydz \\ I_{zz} &= \iiint (y^2 + x^2)\rho \, dxdydz \end{aligned}\right\} \text{Momentos de Inercia}$$

$$\left.\begin{aligned} I_{xy} &= \iiint xy\rho \, dxdydz \\ I_{xz} &= \iiint xz\rho \, dxdydz \\ I_{yz} &= \iiint yz\rho \, dxdydz \end{aligned}\right\} \text{Productos de Inercia}$$

Generalización del teorema de ejes paralelos (Steiner)



Modelo dinámico - Tensor de Inercia

Tensor de Inercia

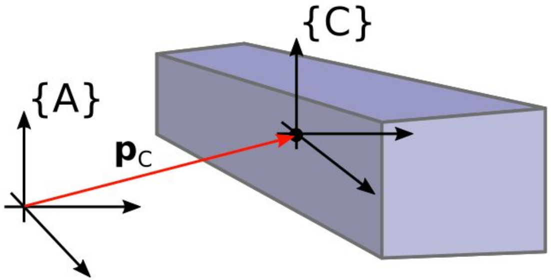
$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} I_{xx} &= \iiint (y^2+z^2)\rho \; dxdydz \\ I_{yy} &= \iiint (x^2+z^2)\rho \; dxdydz \\ I_{zz} &= \iiint (y^2+x^2)\rho \; dxdydz \end{aligned}\right\} \text{Momentos de Inercia}$$

$$\left.\begin{aligned} I_{xy} &= \iiint xy\rho \; dxdydz \\ I_{xz} &= \iiint xz\rho \; dxdydz \\ I_{yz} &= \iiint yz\rho \; dxdydz \end{aligned}\right\} \text{Productos de Inercia}$$

Generalización del teorema de ejes paralelos (Steiner)

$$I_A = I_C + m\left[(\mathbf{p}_C^T\mathbf{p}_C)\mathbf{I}_3 - \mathbf{p}_c\mathbf{p}_c^T\right]$$



Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Método iterativo de Newton-Euler

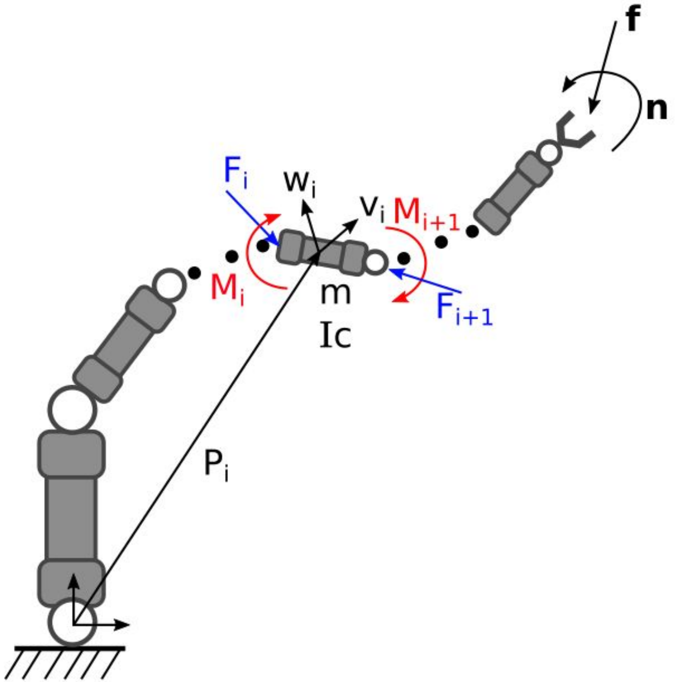
Para cada eslabón *i*, deberemos aplicar las ecuaciones de equilibrio dinámico.
Para escribir el equilibrio dinámico se deben conocer, para cada eslabón:

- Aceleración lineal
- Velocidad angular
- Aceleración angular
- masa
- Tensor de inercias
- Fuerzas externas (si las hay)

Ecuaciones a resolver:

$$m\dot{\mathbf{v}}_c = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{I}_c\dot{\omega} + \omega \times \mathbf{I}_c\omega = \mathbf{N}$$



Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

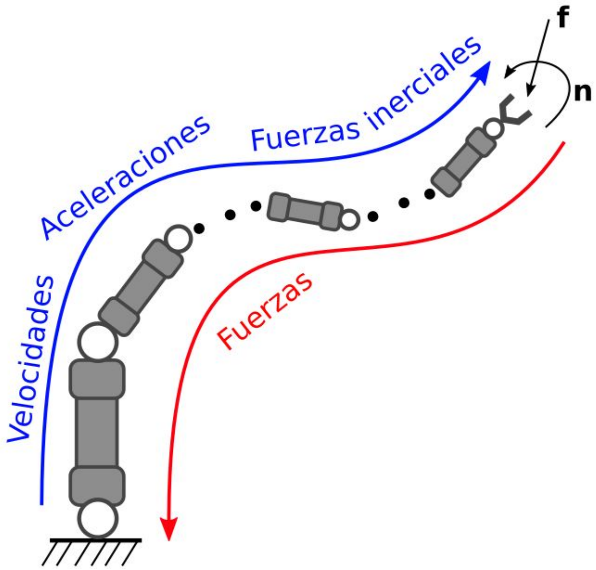
Método iterativo de Newton-Euler

La formulación de N-E parte del equilibrio de fuerzas y pares para cada elemento *i.*

Un correcto desarrollo de las *2.n* ecuaciones, permitirá generar una **formulación recursiva** en la que se obtienen la posición, la velocidad, y la aceleración del elemento *i* en función de las del (*i-1*) **(outward propagation).**

Para luego obtener las fuerzas y pares actuantes sobre el eslabón *i*, en función de los elementos (i+1) **(inward propagation).**

Esto provoca que la solución que se obtiene a partir de operaciones vectoriales realizando un recorrido “hacia afuera” (outward/forward) y luego “hacia adentro” (inward/backward), alcance un orden de complejidad computacional O(n), lo que indica que el número de operaciones es proporcional a la cantidad de GDL.



Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Método iterativo de Newton-Euler

NE1. Asignar a cada eslabón un sistema de referencia de acuerdo a las normas de DH.

NE2. Definir las condiciones iniciales:

Para el sistema $\{S_0\}$

$^0\omega_0$: velocidad angular = $[0, 0, 0]^T$

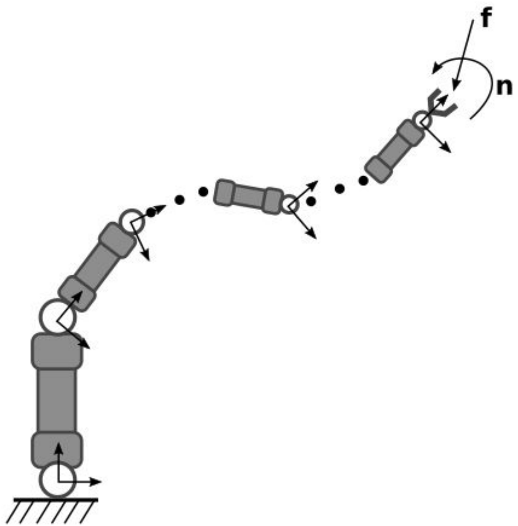
$^0\dot{\omega}_0$: aceleración angular = $[0, 0, 0]^T$

$^0\mathbf{v}_0$: velocidad lineal = $[0, 0, 0]^T$

$^0\dot{\mathbf{v}}_0$: aceleración lineal = $-[0, 0, -9.8]^T$

Típicamente cero, pues la base está en reposo

El versor z apunta hacia arriba.



Para todos los sistemas $\{S_i\}$

$\mathbf{z}_0$ = $[0, 0, 1]^T$

$^i\mathbf{p}_i$ = Vector desde el origen de $\{S_{i-1}\}$ hasta el de $\{S_i\}$ en el sistema $\{S_i\}$ = $[a_i, d_i sen(\alpha_i), d_i cos(\alpha_i)]$

$^i\mathbf{s}_i$ = Coordenadas del centro de masas del eslabón *i* respecto del sistema $\{S_i\}$

$^i\mathbf{I}_i$ = Matriz de inercia del eslabón *i* expresado en un sistema paralelo al $\{S_i\}$ y con el origen en el centro de masas del eslabón

Para el extremo del robot se deben conocer la fuerza y el par ejercidos externamente: $\begin{cases} ^{n+1}\mathbf{f}_{n+1} \\ ^{n+1}\mathbf{n}_{n+1} \end{cases}$

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Método iterativo de Newton-Euler

NE3. Obtener las matrices de rotación $^{i-1}\mathbf{R}_i$ y sus inversas $^{i}\mathbf{R}_{i-1} = (^{i-1}\mathbf{R}_i)^{-1} = (^{i-1}\mathbf{R}_i)^T$

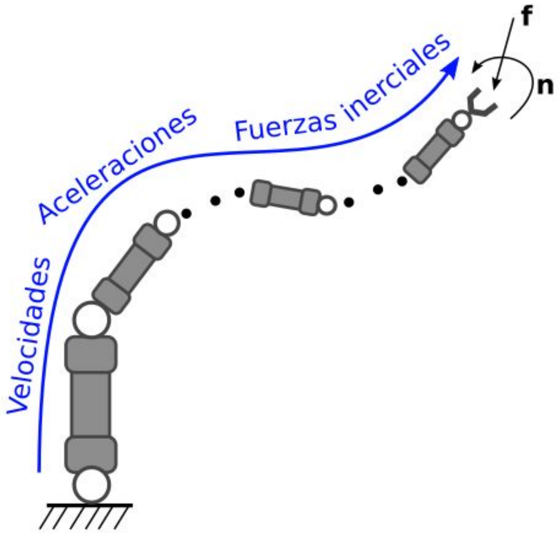
$$^{i-1}\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i \end{bmatrix}$$

NE4. Calcular la velocidad angular de todos los sistemas $\{S_i\}$

$$^{i}\omega_i = \begin{cases} ^{i}\mathbf{R}_{i-1}\left(^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} + \mathbf{z}_0\,\dot{\mathbf{q}}_i\right) & \text{si el eslabón } i \text{ es de rotación} \\ ^{i}\mathbf{R}_{i-1}\,^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} & \text{si el eslabón } i \text{ es de traslación} \end{cases}$$

NE5. Calcular la aceleración angular de todos los sistemas $\{S_i\}$

$$^{i}\dot{\omega}_i = \begin{cases} ^{i}\mathbf{R}_{i-1}\left(^{i-1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} + \mathbf{z}_0\,\ddot{\mathbf{q}}_i\right) + {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{z}_0\,\dot{\mathbf{q}} & \text{si el eslabón } i \text{ es de rotación} \\ ^{i}\mathbf{R}_{i-1}\,^{i-1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} & \text{si el eslabón } i \text{ es de traslación} \end{cases}$$



Repetir para todos los eslabones en sentido **"hacia afuera"** (i=1...n)

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Método iterativo de Newton-Euler

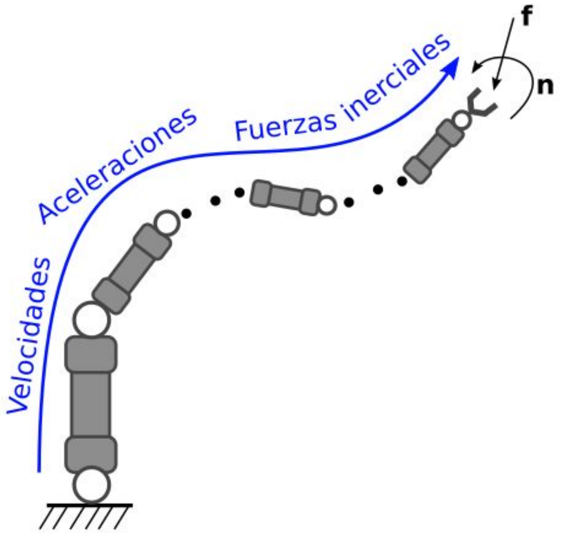
NE6. Calcular la aceleración lineal de todos los sistemas $\{S_i\}$

$$ {}^i\dot{\mathbf{v}}_i = \begin{cases} {}^i\dot{\boldsymbol\omega}_i \times {}^i\mathbf{p}_i + {}^i\boldsymbol\omega_i \times \left({}^i\boldsymbol\omega_i\times{}^i\mathbf{p}_i\right) + {}^i\mathbf{R}_{i-1}\,{}^{i-1}\dot{\mathbf{v}}_{i-1} & \text{si el eslabón } i \text{ es de rotación}\\ {}^i\mathbf{R}_{i-1}\left(\mathbf{z}_0\,\ddot{q}_i + {}^{i-1}\dot{\mathbf{v}}_{i-1}\right) + {}^i\boldsymbol\omega_i\times{}^i\mathbf{p}_i + 2\,{}^i\boldsymbol\omega_i\times{}^i\mathbf{R}_{i-1}\mathbf{z}_0\,\dot{q}_i + {}^i\boldsymbol\omega_i\times\left({}^i\boldsymbol\omega_i\times{}^i\mathbf{p}_i\right) & \text{si el eslabón } i \text{ es de trasl}\end{cases} $$

NE7. Calcular la aceleración lineal del centro de gravedad de todos los eslabones *i*

$$ {}^i\mathbf{a}_i = {}^i\dot{\boldsymbol\omega}_i \times {}^i\mathbf{s}_i + {}^i\boldsymbol\omega_i \times \left({}^i\boldsymbol\omega_i \times {}^i\mathbf{s}_i\right) + {}^i\dot{\mathbf{v}}_i $$

Repetir para todos los eslabones
en sentido <u>**“hacia afuera”**</u> (i=1...n)



Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Método iterativo de Newton-Euler

NE8. Obtener la fuerza ejercida sobre el eslabón i:

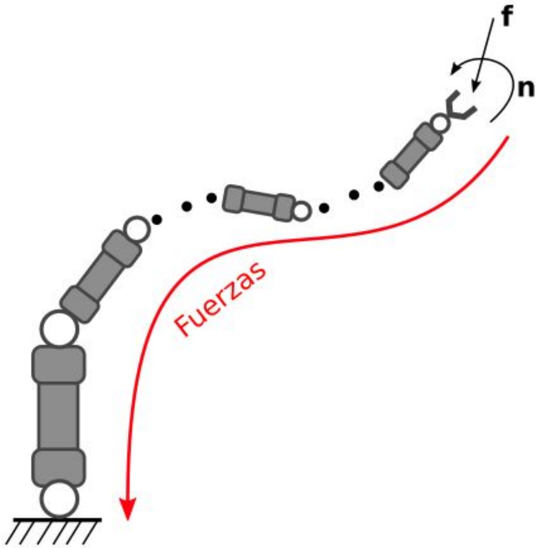
$$ {}^{i}\mathbf{f}_i = {}^{i}\mathbf{R}_{i+1}\,{}^{i+1}\mathbf{f}_{i+1} + m_i\,{}^{i}\mathbf{a}_i $$

NE9. Calcular el par ejercido sobre cada eslabón *i*.

$$ {}^{i}\mathbf{n}_i = {}^{i}\mathbf{R}_{i+1}\left[{}^{i+1}\mathbf{n}_{i+1} + \left({}^{i+1}\mathbf{R}_i\,{}^{i}\mathbf{p}_i\right)\times{}^{i+1}\mathbf{f}_{i+1}\right] + \left({}^{i}\mathbf{p}_i + {}^{i}\mathbf{s}_i\right)\times m_i\,{}^{i}\mathbf{a}_i + {}^{i}\mathbf{I}_i\,{}^{i}\dot{\omega}_i + {}^{i}\omega_i\times\left({}^{i}\mathbf{I}_i\,{}^{i}\omega_i\right) $$

NE10. Calcular la fuerza o par aplicado a la articulación *i*

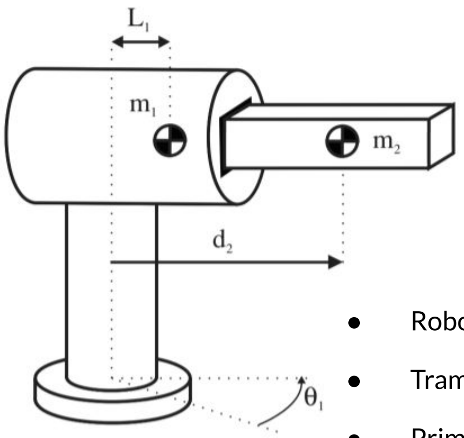
$$ \tau_i = \begin{cases} {}^{i}\mathbf{n}_i^T\,{}^{i}\mathbf{R}_{i-1}\mathbf{z}_0 & \text{si el eslabón } i \text{ es de rotación} \\ {}^{i}\mathbf{f}_i^T\,{}^{i}\mathbf{R}_{i-1}\mathbf{z}_0 & \text{si el eslabón } i \text{ es de traslación} \end{cases} $$



Repetir para todos los eslabones
en sentido **"hacia adentro"**
(i=n...1)

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

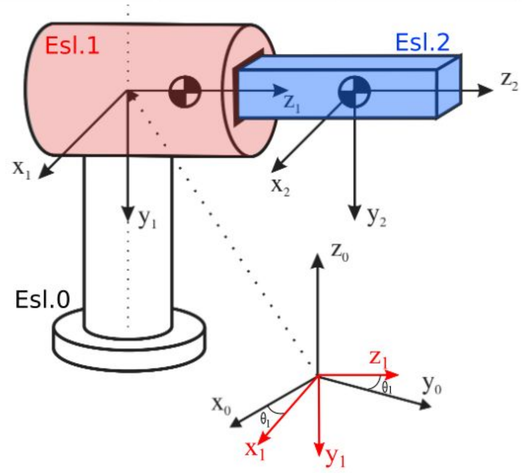
Ejemplo - Método iterativo de Newton-Euler



NE1. Asignar a cada eslabón un sistema de referencia de acuerdo a las normas de DH.

Articulación	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	0	–90
2	0	d_2	0	0

- Robot con eslabones rígidos
- Tramo recto vertical fijo
- Primer articulación: de rotación
- Segunda articulación: de traslación
- Peso m1 a una distancia L_1
- Peso m_2 a una distancia d_2



Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Útil

Ejemplo - Método iterativo de Newton-Euler

NE2. Definir las condiciones iniciales:

Para el sistema $\{S_0\}$

velocidad angular = $[0, 0, 0]^T$
aceleración angular = $[0, 0, 0]^T$
velocidad lineal = $[0, 0, 0]^T$
aceleración lineal = $-[0, 0, -9.8]$

La base está en reposo

$$\mathbf{z}_0 = [0, 0, 1]^T$$

Para todos los sistemas $\{S_1$ y $S_2\}$

$${}^1\mathbf{p}_1 = [0, 0, 0]^T \qquad {}^2\mathbf{p}_2 = [0, 0, d_2]^T$$

$${}^1\mathbf{s}_1 = [0, 0, L_1] \qquad {}^2\mathbf{s}_2 = [0, 0, 0]$$

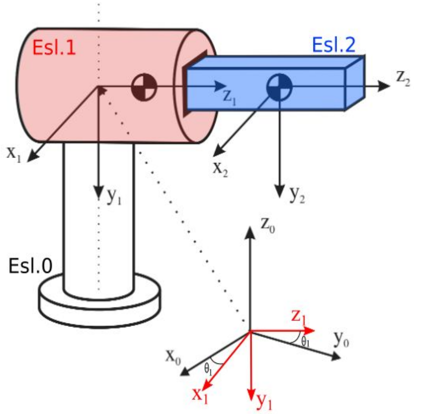
$${}^1\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad {}^2\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cumulada en el CM

como no se ejercen fuerzas externas en el extremo del robot:

$${}^3\mathbf{f}_3 = {}^3\mathbf{n}_3 = 0$$

Articulación	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	0	–90
2	0	d_2	0	0



${}^i\mathbf{p}_i$ = de origen $\{S_{i-1}\}$ al $\{S_i\}$ en el sist. $\{S_i\}$ = $[a_i, d_i sen(\alpha_i), d_i cos(\alpha_i)]$
${}^i\mathbf{s}_i$ = Coord. del CM de *i* en el sist. $\{S_i\}$
${}^i\mathbf{I}_i$ = Matriz de *i* en un sist. // al $\{S_i\}$ y con origen en el CM de i

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Útil

Articulación	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	0	–90
2	0	d_2	0	0

$$^{i-1}\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i \end{bmatrix}$$

$$^{i}\omega_i = \begin{cases} {}^{i}\mathbf{R}_{i-1}\left({}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} + \mathbf{z}_0\,\dot{\mathbf{q}}_i\right) & \text{si el eslabón } i \text{ es de rotación} \\ {}^{i}\mathbf{R}_{i-1}\,{}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} & \text{si el eslabón } i \text{ es de traslación} \end{cases}$$

$$\mathbf{z}_0 = [0, 0, 1]^T$$

Ejemplo - Método iterativo de Newton-Euler

NE3. Obtener las matrices de rotación $^{i-1}\mathbf{R}_i$ y sus inversas $^{i}\mathbf{R}_{i-1} = (^{i-1}\mathbf{R}_i)^{-1} = (^{i-1}\mathbf{R}_i)^T$

$$^{0}\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 \\ S_1 & 0 & C_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad ^{1}\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ^{0}\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 \\ S_1 & 0 & C_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$^{1}\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -S_1 & C_1 & 0 \end{bmatrix} \quad ^{2}\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ^{2}\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -S_1 & C_1 & 0 \end{bmatrix}$$

NE4. Calcular la velocidad angular de todos los sistemas $\{S_i\}$

$$^{1}\boldsymbol{\omega}_1 = {}^{1}\mathbf{R}_0\left({}^{0}\boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{z}_0\dot{\theta}_1\right) = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -S_1 & C_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$^{2}\boldsymbol{\omega}_2 = {}^{2}\mathbf{R}_1\,{}^{1}\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Útil

Ejemplo - Método iterativo de Newton-Euler

NE5. Calcular la aceleración angular de todos los sistemas $\{S_i\}$

$$^{1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = {}^{1}\mathbf{R}_0\left({}^{0}\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + \mathbf{z}_0\ddot{\theta}_1\right) + {}^{0}\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{z}_0\dot{\theta}_1 =$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -S_1 & C_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$^{2}\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = {}^{2}\mathbf{R}_1 {}^{1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Articulación	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	0	–90
2	0	d_2	0	0

$$^{i}\dot{\omega}_i = \begin{cases} {}^{i}\mathbf{R}_{i-1}\left({}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} + \mathbf{z}_0\,\ddot{\mathbf{q}}_i\right) + {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{z}_0\,\dot{\mathbf{q}} & \text{si el eslabón } i \text{ es de rotación} \\ {}^{i}\mathbf{R}_{i-1}\,{}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} & \text{si el eslabón } i \text{ es de traslación} \end{cases}$$

$$^{0}\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 \\ S_1 & 0 & C_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad {}^{1}\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^{0}\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 \\ S_1 & 0 & C_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_0 = [0, 0, 1]^T \qquad {}^{1}\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^{2}\boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Útil

Ejemplo - Método iterativo de Newton-Euler

NE6. Calcular la aceleración lineal de todos los sistemas $\{S_i\}$

$$
{}^1\dot{\mathbf{v}}_1 = {}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times {}^1\mathbf{p}_1 + {}^1\boldsymbol{\omega}_1 \times \left({}^1\boldsymbol{\omega}_1 \times {}^1\mathbf{p}_1\right) + {}^1\mathbf{R}_0\,{}^0\dot{\mathbf{v}}_0 =
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -\dot\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -S_1 & C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^2\dot{\mathbf{v}}_2 = {}^2\mathbf{R}_1\left(\mathbf{z}_0\ddot d_2 + {}^1\dot{\mathbf{v}}_1\right) + {}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times {}^2\mathbf{p}_2 + 2\,{}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times \left({}^2\mathbf{R}_1\mathbf{z}_0\dot d_2\right) + {}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times \left({}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^2\mathbf{p}_2\right) =
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot d_2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -\dot\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_2 \end{bmatrix} \right) =
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ \ddot d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\ddot\theta_1 d_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -\dot\theta_1 \dot d_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot\theta_1^2 d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot\theta_1 d_2 - 2\dot\theta_1 \dot d_2 \\ -g \\ \ddot d_2 - \dot\theta_1^2 d_2 \end{bmatrix}
$$

Articulación	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	0	–90
2	0	d_2	0	0

$$
{}^i\dot{\mathbf{v}}_i = \begin{cases} {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times {}^i\mathbf{p}_i + {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times \left({}^i\boldsymbol{\omega}_i \times {}^i\mathbf{p}_i\right) + {}^i\mathbf{R}_{i-1}\,{}^{i-1}\dot{\mathbf{v}}_{i-1} & \text{rotación} \\ {}^i\mathbf{R}_{i-1}\left(\mathbf{z}_0\,\ddot{\mathbf{q}}_i + {}^{i-1}\dot{\mathbf{v}}_{i-1}\right) + {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times {}^i\mathbf{p}_i + 2\,{}^i\boldsymbol{\omega}_i \times {}^i\mathbf{R}_{i-1}\mathbf{z}_0\,\dot{\mathbf{q}}_i + {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times \left({}^i\boldsymbol{\omega}_i \times {}^i\mathbf{p}_i\right) & \text{traslación} \end{cases}
$$

$${}^1\mathbf{p}_1 = [0, 0, 0]^T \qquad {}^2\mathbf{p}_2 = [0, 0, d_2]^T \qquad \mathbf{z}_0 = [0, 0, 1]^T$$

$$
{}^0\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 \\ S_1 & 0 & C_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad {}^1\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^0\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 \\ S_1 & 0 & C_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^1\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad {}^2\boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad {}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad {}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Útil

Ejemplo - Método iterativo de Newton-Euler

NE7. Calcular la aceleración lineal del CM de todos los eslabones *i*

$$^1\mathbf{a}_1 = {}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times {}^1\mathbf{s}_1 + {}^1\boldsymbol{\omega}_1 \times \left({}^1\boldsymbol{\omega}_1 \times {}^1\mathbf{s}_1\right) + {}^1\dot{\mathbf{v}}_1 =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 L_1 \\ -g \\ -\dot{\theta}_1^2 L_1 \end{bmatrix}$$

$$^2\mathbf{a}_2 = {}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2 + {}^1\boldsymbol{\omega}_2 \times \left({}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2\right) + {}^2\dot{\mathbf{v}}_2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ -g \\ \ddot{d}_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ -g \\ \ddot{d}_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 \end{bmatrix}$$

Articulación	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	0	–90
2	0	d_2	0	0

$$^i\mathbf{a}_i = {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times {}^i\mathbf{s}_i + {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times \left({}^i\boldsymbol{\omega}_i \times {}^i\mathbf{s}_i\right) + {}^i\dot{\mathbf{v}}_i$$

$$^1\mathbf{s}_1 = [0, 0, L_1] \qquad ^2\mathbf{s}_2 = [0, 0, 0]$$

$$^1\dot{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix} \qquad ^2\dot{\mathbf{v}}_2 = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ -g \\ \ddot{d}_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 \end{bmatrix}$$

$$^1\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ^2\boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad ^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Ejemplo - Método iterativo de Newton-Euler

NE8. Obtener la fuerza ejercida sobre el eslabón i:

$$ {}^2\mathbf{f}_2 = {}^2\mathbf{R}_3\,{}^3\mathbf{f}_3 + m_2\,{}^2\mathbf{a}_2 = {}^2\mathbf{R}_3\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} + m_2\begin{bmatrix}-\ddot{\theta}_1 d_2 - 2\dot{\theta}_1\dot{d}_2\\ -g\\ \ddot{d}_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\ddot{\theta}_1 d_2 m_2 - 2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 m_2\\ -g m_2\\ \ddot{d}_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 m_2\end{bmatrix} $$

$$ {}^1\mathbf{f}_1 = {}^1\mathbf{R}_2\,{}^2\mathbf{f}_2 + m_1\,{}^1\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\ddot{\theta}_1 d_2 m_2 - 2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 m_2\\ -g m_2\\ \ddot{d}_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 m_2\end{bmatrix} + m_1\begin{bmatrix}-\ddot{\theta}_1 l_1\\ -g\\ -\dot{\theta}_1^2 l_1\end{bmatrix} $$

$$ = \begin{bmatrix}-\ddot{\theta}_1 d_2 m_2 - 2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 m_2 - \ddot{\theta}_1 l_1 m_1\\ -g(m_1+m_2)\\ \ddot{d}_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 l_1 m_1\end{bmatrix} $$

Útil

Articulación	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	0	–90
2	0	d_2	0	0

$$ {}^i\mathbf{f}_i = {}^i\mathbf{R}_{i+1}\,{}^{i+1}\mathbf{f}_{i+1} + m_i\,{}^i\mathbf{a}_i $$

$$ {}^0\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix}C_1&0&-S_1\\S_1&0&C_1\\0&-1&0\end{bmatrix} \quad {}^1\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \quad {}^0\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix}C_1&0&-S_1\\S_1&0&C_1\\0&-1&0\end{bmatrix} $$

$$ {}^1\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix}-\ddot{\theta}_1 L_1\\ -g\\ -\dot{\theta}_1^2 L_1\end{bmatrix} \quad {}^2\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix}-\ddot{\theta}_1 d_2 - 2\dot{\theta}_1\dot{d}_2\\ -g\\ \ddot{d}_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2\end{bmatrix} $$

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Útil

Ejemplo - Método iterativo de Newton-Euler

NE9. Calcular el par ejercido sobre cada eslabón *i*.

$$
{}^2\mathbf{n}_2 = {}^2\mathbf{R}_3\left[{}^3\mathbf{n}_3 + \left({}^3\mathbf{R}_2\,{}^2\mathbf{p}_2\right)\times{}^3\mathbf{f}_3\right] + \left({}^2\mathbf{p}_2 + {}^2\mathbf{s}_2\right)\times m_2\,{}^2\mathbf{a}_2 + {}^2\mathbf{I}_2\,{}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 + {}^2\boldsymbol{\omega}_2\times\left({}^2\mathbf{I}_2\cdot{}^2\boldsymbol{\omega}_2\right)
$$

$$
= \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right)+\left(\begin{bmatrix}0\\0\\d_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right)\times m_2\begin{bmatrix}-\ddot{\theta}_1 d_2 - 2\dot{\theta}_1\dot{d}_2\\ -g\\ \ddot{d}_2-\dot{\theta}_1^{\,2}d_2\end{bmatrix}+
$$

$$
+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\-\ddot{\theta}_1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\-\dot{\theta}_1\\0\end{bmatrix}\times\left(\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\-\dot{\theta}_1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}d_2 m_2 g\\ \left(-\ddot{\theta}_1 d_2^{\,2}-2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 d_2\right)m_2\\ 0\end{bmatrix}
$$

Articulación	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	0	–90
2	0	d_2	0	0

$$
{}^i\mathbf{n}_i = {}^i\mathbf{R}_{i+1}\left[{}^{i+1}\mathbf{n}_{i+1} + \left({}^{i+1}\mathbf{R}_i\,{}^i\mathbf{p}_i\right)\times{}^{i+1}\mathbf{f}_{i+1}\right] + \left({}^i\mathbf{p}_i + {}^i\mathbf{s}_i\right)\times m_i\,{}^i\mathbf{a}_i + {}^i\mathbf{I}_i\,{}^i\omega_i + {}^i\omega_i\times\left({}^i\mathbf{I}_i\,{}^i\omega_i\right)
$$

$$
{}^0\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix}C_1&0&-S_1\\S_1&0&C_1\\0&-1&0\end{bmatrix}\qquad {}^1\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad {}^0\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix}C_1&0&-S_1\\S_1&0&C_1\\0&-1&0\end{bmatrix}
$$

$$
{}^2\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad {}^2\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix}-\ddot{\theta}_1 d_2 - 2\dot{\theta}_1 d_2\\ -g\\ \ddot{d}_2-\dot{\theta}_1^{\,2}d_2\end{bmatrix}\qquad {}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = \begin{bmatrix}0\\-\ddot{\theta}_1\\0\end{bmatrix}\qquad {}^2\boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix}0\\-\dot{\theta}_1\\0\end{bmatrix}
$$

$$
{}^3\mathbf{f}_3 = {}^3\mathbf{n}_3 = 0\qquad {}^2\mathbf{p}_2 = [0,0,d_2]^T\qquad {}^2\mathbf{s}_2 = [0,0,0]
$$

Modelo dinámico - Robot rígido ***<u>multi</u>***articular

Ejemplo - Método iterativo de Newton-Euler

NE9. Calcular el par ejercido sobre cada eslabón *i*.

$$ {}^1\mathbf{n}_1 = {}^1\mathbf{R}_2\left[{}^2\mathbf{n}_2 + \left({}^2\mathbf{R}_1\,{}^1\mathbf{p}_1\right)\times {}^2\mathbf{f}_2\right] + \left({}^1\mathbf{p}_1 + {}^1\mathbf{s}_1\right)\times m_1\,{}^1\mathbf{a}_1 + {}^1\mathbf{I}_1\,{}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + {}^1\boldsymbol{\omega}_1 \times \left({}^1\mathbf{I}_1\,{}^1\boldsymbol{\omega}_1\right) = $$

$$ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} d_2 m_2 g \\ \left(-\ddot{\theta}_1 d_2^2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 d_2\right) m_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 m_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 m_2 \\ -g m_2 \\ \ddot{d}_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 m_2 \end{bmatrix} \right) + $$

$$ + \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 L_1 m_1 \\ -g m_1 \\ -\dot{\theta}_1^2 L_1 m_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) $$

$$ = \begin{bmatrix} d_2 m_2 g \\ \left(-\ddot{\theta}_1 d_2^2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 d_2\right) m_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 m_1 g \\ -\ddot{\theta}_1 L_1^2 m_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(d_2 m_2 + L_1 m_1\right) g \\ \left(-\ddot{\theta}_1 d_2^2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 d_2\right) m_2 - \ddot{\theta}_1 L_1^2 m_1 \\ 0 \end{bmatrix} $$

Útil

Articulación	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	0	–90
2	0	d_2	0	0

$$ {}^i\mathbf{n}_i = {}^i\mathbf{R}_{i+1}\left[{}^{i+1}\mathbf{n}_{i+1} + \left({}^{i+1}\mathbf{R}_i\,{}^i\mathbf{p}_i\right)\times {}^{i+1}\mathbf{f}_{i+1}\right] + \left({}^i\mathbf{p}_i + {}^i\mathbf{s}_i\right)\times m_i\,{}^i\mathbf{a}_i + {}^i\mathbf{I}_i\,{}^i\omega_i + {}^i\omega_i \times \left({}^i\mathbf{I}_i\,{}^i\omega_i\right) $$

$$ {}^0\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 \\ S_1 & 0 & C_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad {}^1\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^0\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 \\ S_1 & 0 & C_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^1\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 L_1 \\ -g \\ -\dot{\theta}_1^2 L_1 \end{bmatrix} \qquad {}^2\mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 m_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 m_2 \\ -g m_2 \\ \ddot{d}_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 m_2 \end{bmatrix} \qquad {}^1\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad {}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^2\mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} d_2 m_2 g \\ \left(-\ddot{\theta}_1 d_2^2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 d_2\right) m_2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad {}^1\mathbf{p}_1 = [0, 0, 0]^T \qquad {}^1\mathbf{s}_1 = [0, 0, L_1] \qquad {}^1\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} $$

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi*** articular

Útil

Ejemplo - Método iterativo de Newton-Euler

NE10. Calcular la fuerza o par aplicado a la articulación *i*

$$F_2 = {}^2\mathbf{f}_2^T\,{}^2\mathbf{R}_1\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 m_2 - 2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 m_2 \\ -g m_2 \\ \ddot{d}_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 m_2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \ddot{d}_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 m_2$$

$$T_1 = {}^1\mathbf{n}_1^T\,{}^1\mathbf{R}_0\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} (d_2 m_2 + L_1 m_1) g \\ \left(-\ddot{\theta}_1 d_2^2 - 2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 d_2\right) m_2 - \ddot{\theta}_1 L_1^2 m_1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\ddot{\theta}_1 d_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 d_2\right) m_2 + \ddot{\theta}_1 L_1^2 m_1$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= \left(\ddot{\theta}_1 d_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 d_2\right) m_2 + \ddot{\theta}_1 L_1^2 m_1 \\ \mathbf{F}_2 &= m_2\ddot{d}_2 - m_2 d_2\dot{\theta}_1^2 \end{aligned}}$$

Articulación	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	0	–90
2	0	d_2	0	0

$$\tau_i = \begin{cases} {}^i\mathbf{n}_i^T\,{}^i\mathbf{R}_{i-1}\mathbf{z}_0 & \text{si el eslabón } i \text{ es de rotación} \\ {}^i\mathbf{f}_i^T\,{}^i\mathbf{R}_{i-1}\mathbf{z}_0 & \text{si el eslabón } i \text{ es de traslación} \end{cases}$$

$$\mathbf{z}_0 = [0, 0, 1]^T$$

$${}^0\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 \\ S_1 & 0 & C_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad {}^1\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^0\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 \\ S_1 & 0 & C_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^2\mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 m_2 - 2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 m_2 \\ -g m_2 \\ \ddot{d}_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 m_2 \end{bmatrix} \qquad {}^1\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 m_2 - 2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 m_2 - \ddot{\theta}_1 l_1 m_1 \\ -g(m_1 + m_2) \\ \ddot{d}_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 l_1 m_1 \end{bmatrix}$$

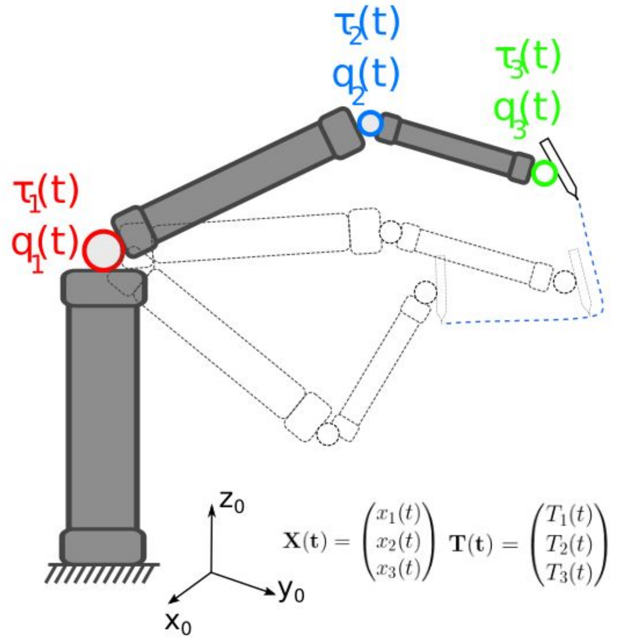
$${}^2\mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} d_2 m_2 g \\ \left(-\ddot{\theta}_1 d_2^2 - 2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 d_2\right) m_2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad {}^1\mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} (d_2 m_2 + L_1 m_1) g \\ \left(-\ddot{\theta}_1 d_2^2 - 2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 d_2\right) m_2 - \ddot{\theta}_1 L_1^2 m_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Modelo dinámico en el espacio de la tarea

El modelo dinámico hasta ahora relaciona las coordenadas articulares con los pares y fuerzas que estas desarrollan. No obstante, en ocasiones es conveniente tener el modelo dinámico expresado en el mismo sistema del **espacio de la tarea**.

El espacio de la tarea es el lugar en donde se desarrolla el trabajo, y por lo tanto es el ambiente referenciado con un sistema cartesiano fijo, en el cual se lleva a cabo el objetivo del robot.

En otras palabras, es describir todos los datos (trayectorias, fuerzas, pares, etc) en el sistema de coordenadas fijo del entorno de trabajo [X(t), V(t), A(t), T(t)]



Modelo dinámico en el espacio de la tarea

Recordando que el vector de velocidades lineales y angulares del extremo del robot $\dot{\mathbf{x}}$ se relaciona con el vector de velocidades articulares a partir $\dot{\mathbf{q}}$ de la matriz jacobiana **J**, como sigue:

$$\dot{\mathbf{x}} = [\dot{x}_x, \dot{x}_y, \dot{x}_z, \dot{\theta}_x, \dot{\theta}_y, \dot{\theta}_z]^T$$

$$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots \dot{q}_n]^T$$

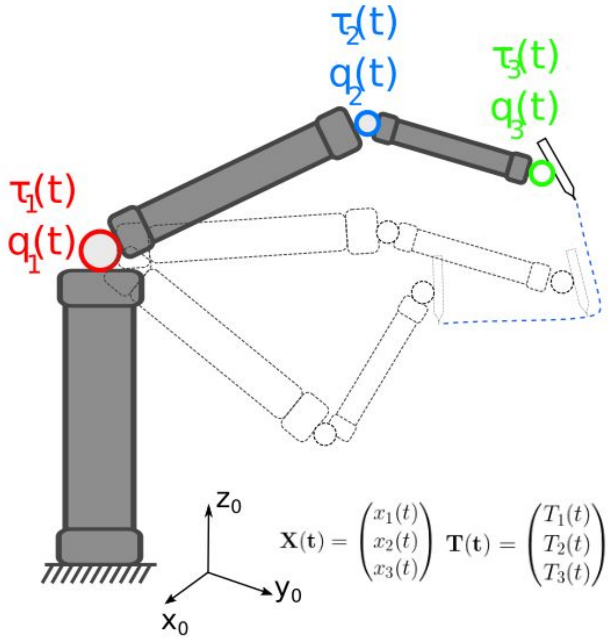
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}$$

Y también que la potencia es indiferente del referencial que se esté considerando, lo que significa que:

$$\mathbf{T}^{\mathbf{T}}\dot{\mathbf{x}} = \tau^{\mathbf{T}}\dot{\mathbf{q}}$$

Se obtiene que:

$$\tau = \mathbf{J}^{\mathbf{T}}\mathbf{T}$$



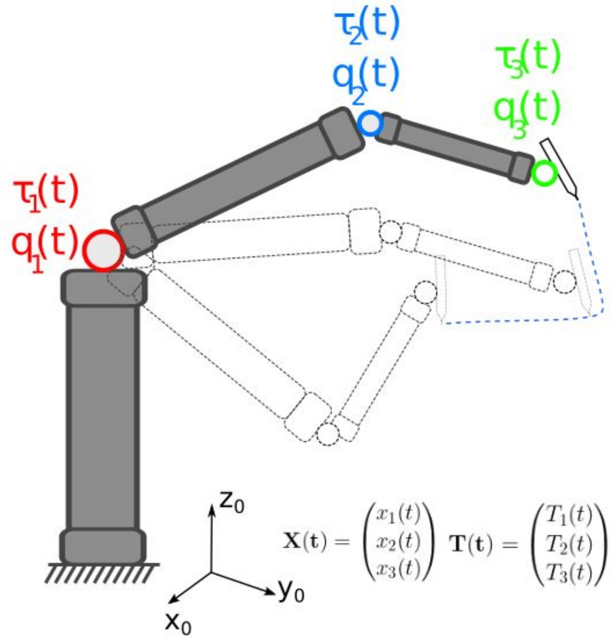
Modelo dinámico en el espacio de la tarea

Utilizando la igualdad hallada: $\tau = \mathbf{J}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}$ y la derivada:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}$$
$$\ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}}$$
$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}}$$

en la ecuación matricial del modelo dinámico que se presenta en la siguiente forma:

$$\tau = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + G(\mathbf{q})$$



Modelo dinámico en el espacio de la tarea

Utilizando la igualdad hallada: $\tau = \mathbf{J}^{\mathbf{T}}\mathbf{T}$ y la derivada:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}}$$

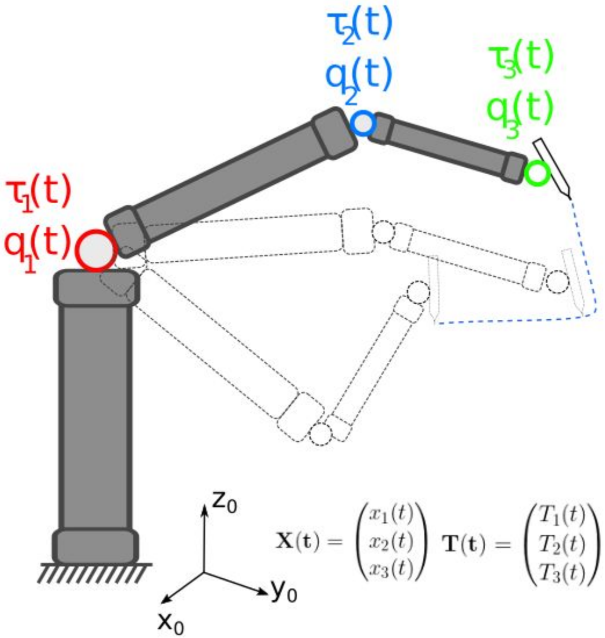
$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}}$$

en la ecuación matricial del modelo dinámico que se presenta en la siguiente forma:

$$\tau = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + G(\mathbf{q})$$

Se puede deducir:

$$\mathbf{J}^{\mathbf{T}}\mathbf{T} = \mathbf{M}\mathbf{J}^{-1}\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{M}\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} + \mathbf{G}$$



$$\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} T_1(t) \\ T_2(t) \\ T_3(t) \end{pmatrix}$$

Modelo dinámico en el espacio de la tarea

Utilizando la igualdad hallada: $\tau = \mathbf{J}^{\mathbf{T}}\mathbf{T}$ y la derivada:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}$$
$$\ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}}$$
$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}}$$

en la ecuación matricial del modelo dinámico que se presenta en la siguiente forma:

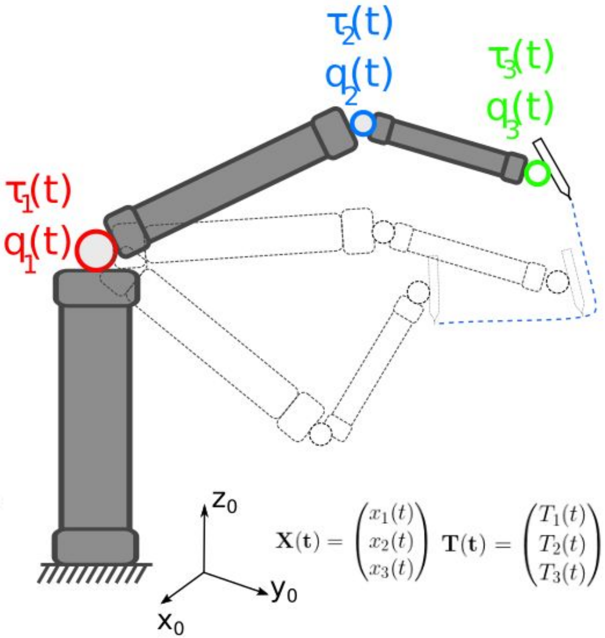
$$\tau = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + G(\mathbf{q})$$

Se puede deducir:

$$\mathbf{J}^{\mathbf{T}}\mathbf{T} = \mathbf{M}\mathbf{J}^{-1}\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{M}\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} + \mathbf{G}$$

Despejando **T:**

$$\mathbf{T} = (\mathbf{J}^{\mathbf{T}})^{-1}\mathbf{M}\mathbf{J}^{-1}\ddot{\mathbf{x}} - (\mathbf{J}^{\mathbf{T}})^{-1}\mathbf{M}\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{J}^{\mathbf{T}})^{-1}\mathbf{C} + (\mathbf{J}^{\mathbf{T}})^{-1}\mathbf{G}$$



Modelo dinámico en el espacio de la tarea

Utilizando la igualdad hallada: $\tau = \mathbf{J}^{\mathbf{T}}\mathbf{T}$ y la derivada:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}$$
$$\ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}}$$
$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}}$$

en la ecuación matricial del modelo dinámico que se presenta en la siguiente forma:

$$\tau = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + G(\mathbf{q})$$

Se puede deducir:

$$\mathbf{J}^{\mathbf{T}}\mathbf{T} = \mathbf{M}\mathbf{J}^{-1}\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{M}\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} + \mathbf{G}$$

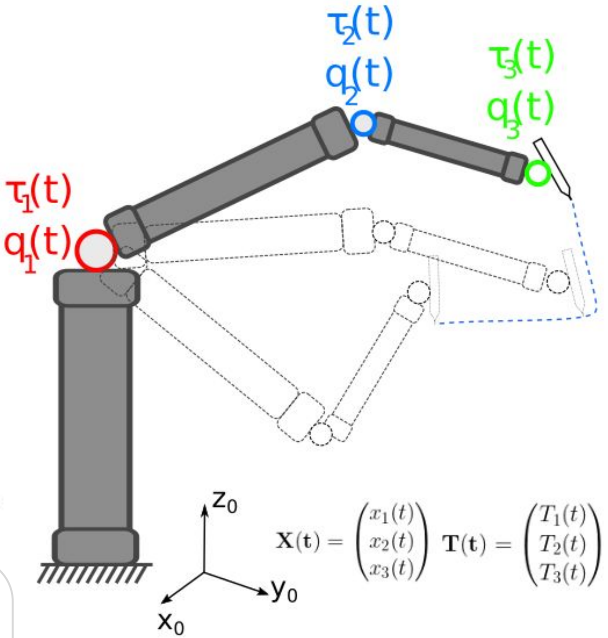
Despejando **T:**

$$\mathbf{T} = (\mathbf{J}^{\mathbf{T}})^{-1}\mathbf{M}\mathbf{J}^{-1}\ddot{\mathbf{x}} - (\mathbf{J}^{\mathbf{T}})^{-1}\mathbf{M}\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{J}^{\mathbf{T}})^{-1}\mathbf{C} + (\mathbf{J}^{\mathbf{T}})^{-1}\mathbf{G}$$

LLegando al ***Modelo en el espacio de la tarea***:

$$\mathbf{T} = \mathbf{M_j}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C_j} + \mathbf{G_j}$$

$$\begin{cases} M_j = & (J^T)^{-1}MJ^{-1} \\ C_j = & (J^T)^{-1}(C - MJ^{-1}\dot{J}\dot{q}) \\ G_j = & (J^T)^{-1}G \end{cases}$$

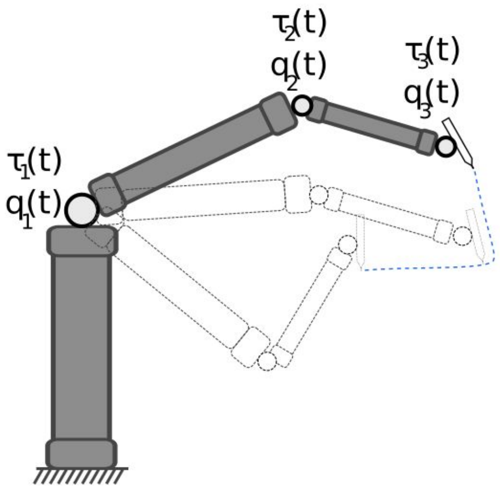


Simulación dinámica

Para simular el movimiento de un manipulador, será imposible en la gran mayoría de los casos resolver las ecuaciones de movimiento analíticamente, por lo que se deberá hacer uso de alguno de los métodos de integración numérica existente.

Como método básico se explicará la **integración de Euler (hacia adelante)** existiendo métodos más sofisticados que son recomendados para obtener resultados más precisos.

Este método se obtiene a partir de utilizar una expansión en serie de taylor para la posición θ(t) y la velocidad $\dot{\theta}(t)$ para aproximar $\theta(t+\Delta t)$, $\dot{\theta}(t+\Delta t)$ en función de los datos conocidos en un tiempo *t*.



Sea entonces *Δt* el tiempo entre el instante t y el tiempo en el que quiero conocer la posición y la velocidad y asumiendo que conocemos el modelo dinámico del sistema, se tiene que:

$t=t_0$

$$\ddot{\Theta}(t) = \mathbf{M}(\Theta(t))^{-1}\left(\tau - \mathbf{C}(\Theta(t), \dot{\Theta}(t)) - \mathbf{G}(\Theta(t))\right)$$

$$\left\{\begin{aligned} \dot{\Theta}(t+\Delta t) &= \dot{\Theta}(t) + \ddot{\Theta}(t)\Delta t \\ \Theta(t+\Delta t) &= \Theta(t) + \dot{\Theta}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\Theta}(t)\Delta t^2 \end{aligned}\right\}$$

si t>= tf

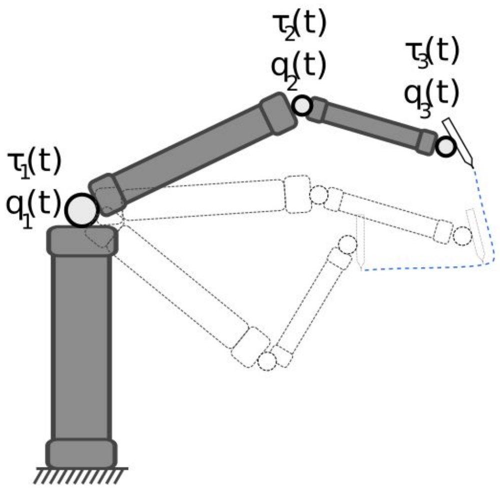
FIN

si t< tf → t= t+*Δt*

Simulación dinámica

Comentarios sobre Euler hacia adelante

- Es un método explícito
- Su comportamiento es condicionalmente estable, lo que significa que converge dependiendo de el Time-Step que se utilice (*Δt*).
- Se pueden desacoplar las matrices puesto que se tienen todos los datos del estado (t) para resolver el estado t+*Δt*.
- Para métodos incondicionalmente estables (que permiten *Δt* mayores) se necesitan métodos implícitos, lo que complejiza la resolución xq no se pueden desacoplar las ecuaciones como en este caso.
- En el implícito, no se poseen todos los datos para resolver t+*Δt*, por lo que hay que resolver el problema matricialmente, todo el "mismo tiempo".



FIN!

Saben lo que es Google Colab?

Próximas clases:

- Martes: en salas de máquinas UdelaR D
- Jueves: en salas de máquinas UdelaR C