CLASE 7: SISTEMAS DE PARTÍCULAS (PARTE 1)

En esta clase aprenderemos a:

⇨ Calcular el centro de masa de un sistema de partículas puntuales

⇨ " " " " " " cuerpos continuos mediante INTEGRACIÓN

⇨ Utilizar las propiedades de simetría para facilitar el cálculo anterior

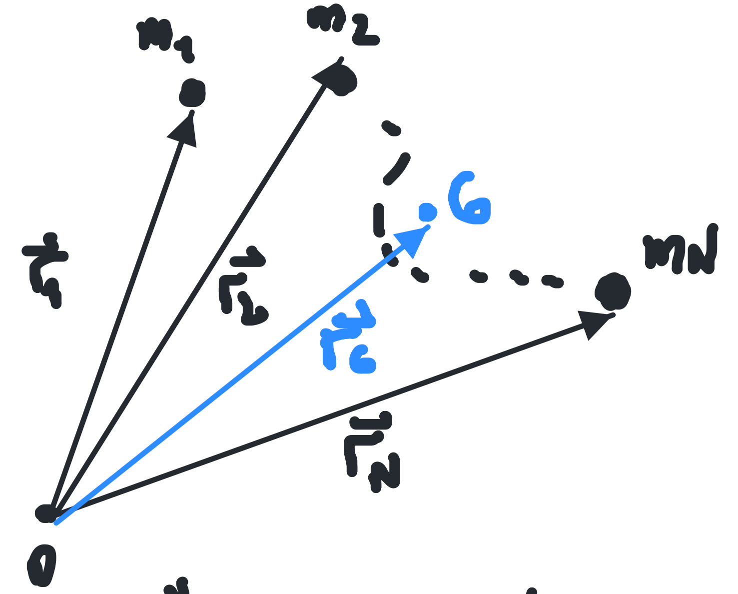
⇨ obtener el centro de masa de cuerpos compuestos a partir de los centros de masa de los componentes

⇨ Hallar las ecuaciones dinámicas que describen la evolución de un sist. partículas (CARDINALES)

(aunque de forma incompleta)

CENTRO DE MASA

⇨ Para un sistema de partículas: $\boxed{\vec{r}_G \overset{def}{=} \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}$, $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$



⟹ es un promedio de las posiciones PONDERADO por las masas

masas mayores pesan más en el promedio. En particular, si $m_j \gg m_i \; \forall i \neq j \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \simeq m_j \vec{r}_j \\ \sum_{i=1}^{N} m_i \simeq m_j \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{r}_G \simeq \vec{r}_j$

⇨ Sistema continuo: $\sum_{j=1}^{N} m_j \to \int dm \Rightarrow \boxed{\vec{r}_G = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm}$

$x_G = \frac{1}{M}\int x\, dm$

$y_G = \frac{1}{M}\int y\, dm$

$z_G = \frac{1}{M}\int z\, dm$

OBS 1: Las integrales en la masa pueden convertirse en integrales en el espacio introduciendo **DENSIDADES**

$$1D: \quad \lambda = \frac{dm}{dl} \overset{\text{uniforme}}{=} \frac{M}{L} \Rightarrow dm = \lambda\, dl \Rightarrow \int$$

$$2D: \quad \sigma = \frac{dm}{da} \overset{\text{unif.}}{=} \frac{M}{A} \Rightarrow dm = \sigma\, dA \Rightarrow \iint$$

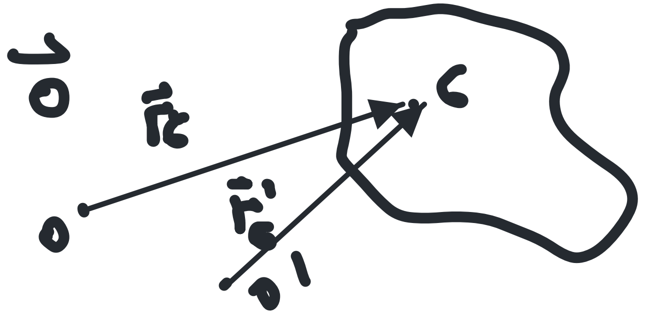
$$3D: \quad \rho = \frac{dm}{dV} \overset{\text{unif}}{=} \frac{M}{V} \Rightarrow dm = \rho\, dV \Rightarrow \iiint$$

Será necesario saber calcular integrales múltiples...

OBS2: El vector posicion de G ($\vec{r}_G$) depende del origen elegido, PERO NO ASÍ SU UBICACIÓN RESPECTO A LA DISTRIBUCIÓN DE MASAS

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_G &= G - O = \frac{1}{M}\sum m_i (P_i - O) \\ \vec{r}\,'_G &= G' - O' = \frac{1}{M}\sum m_i (P_i - O') \end{aligned}\right\} \Rightarrow G - G' = O - O' - \frac{1}{M}\sum_i m_i (O - O') = O - O' - (O - O')\underbrace{\left(\frac{\sum m_i}{M}\right)}_{=1} = \vec{0}$$

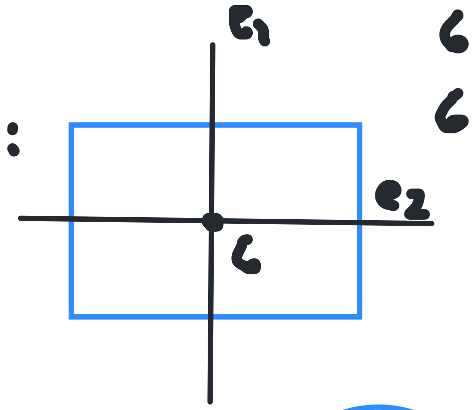
$$\Rightarrow \boxed{G = G'}$$



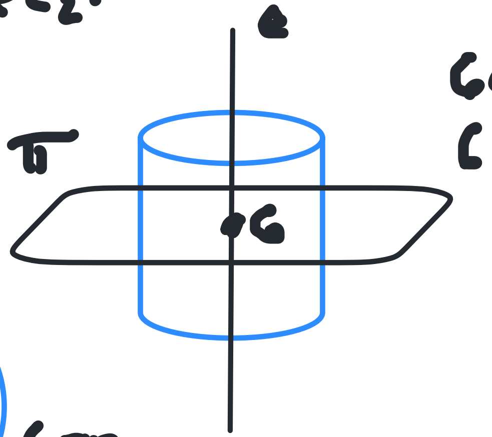
OBS 3: ATENCIÓN A LAS SIMETRÍAS! (SI LA DENSIDAD ES UNIFORME)

1) Simetría axial de eje e $\Rightarrow G \in e$
2) Reflexión de plano π $\Rightarrow G \in \pi$
2) Simetría central de centro O $\Rightarrow G = O$
3) " de revolución de eje e $\Rightarrow G \in e$

EJS:



$\left.\begin{array}{l} G \in e_1 \\ G \in e_2 \end{array}\right\} \Rightarrow G = e_1 \cap e_2$

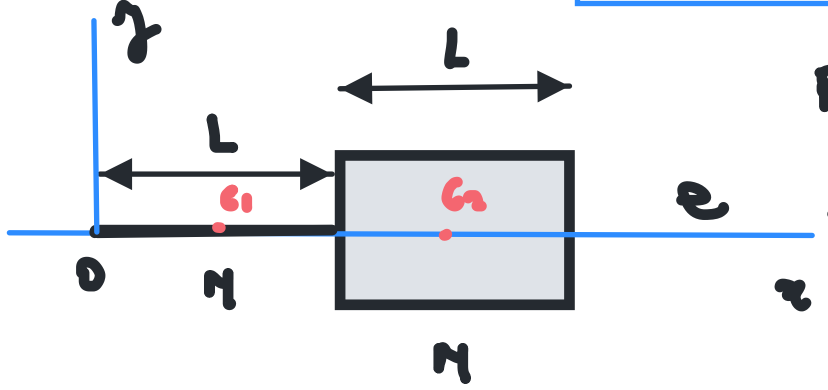


$\left.\begin{array}{l} G \in e \\ G \in \pi \end{array}\right\} G = e \cap \pi$

$G = O$

OBS 4: Para cuerpos compuestos: $\boxed{\vec{r}_G = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_{G_i}}$ PROMEDIO PONDERADO DE LAS POSICIONES DE LOS DE LAS PARTES QUE COMPONEN EL SISTEMA

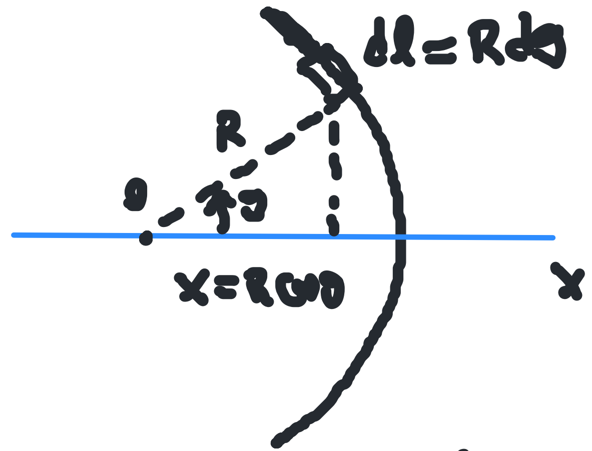
EJ:



Por simetría, $G \in e \Rightarrow$ Elijo e como eje x $\Rightarrow y_G = 0$

$$x_G = \frac{M_1 r_{G_1} + M_2 r_{G_2}}{M_1 + M_2} = \frac{M L/2 + M\, 3L/2}{2M} \Rightarrow \boxed{x_G = L}$$

EJEMPLO 1: Arco de circunferencia de ángulo al centro 2α



Como tiene eje de simetría (plano de reflexión) $\Rightarrow G \in e$

$$x_G = \frac{1}{M}\int x\,dm$$

1D $\Rightarrow \lambda = \frac{dm}{dl} \Rightarrow dm = \lambda\, dl$

Uniforme $\rightarrow \lambda = \frac{M}{L}$

$$\Rightarrow dm = \frac{M}{L}\,dl \qquad dl = R\,d\theta,\quad \underbrace{}_{\downarrow}\ L = R2\alpha$$

$$\Rightarrow dm = \frac{M \cancel{R}\, d\theta}{2\alpha \cancel{R}}$$

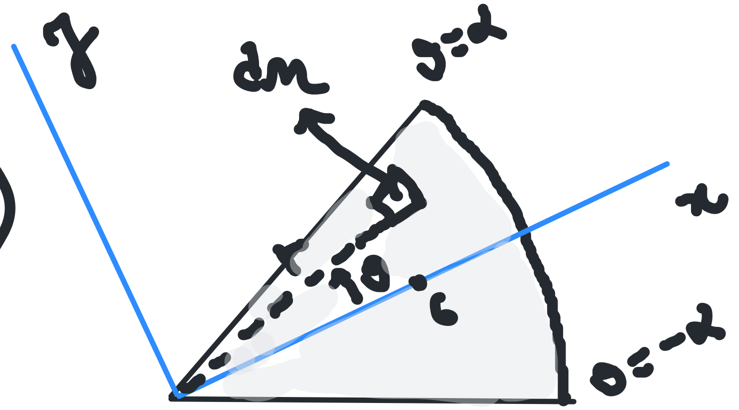
$$\Rightarrow x_G = \frac{\cancel{M}}{2\alpha \cancel{M}}\int_{-\alpha}^{\alpha} x\,d\theta \qquad x = R\cos\theta$$

$$\Rightarrow x_G = \frac{R}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\theta\, d\theta$$

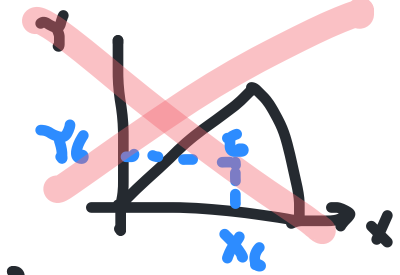
$$\Rightarrow x_G = \frac{R}{2\alpha}\sin\theta\Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{R\,\overbrace{(\sin\alpha - \sin(-\alpha))}^{=2\sin\alpha}}{2\alpha} \Rightarrow \boxed{x_G = \frac{R\sin\alpha}{\alpha}}$$

EJEMPLO 3: sector de círculo de ángulo al centro 2α

Aprovechar la simetría! (tomar como eje x el eje de simetría $\Rightarrow y_G = 0$)



$$x_G = \frac{1}{M}\int x\,dm$$



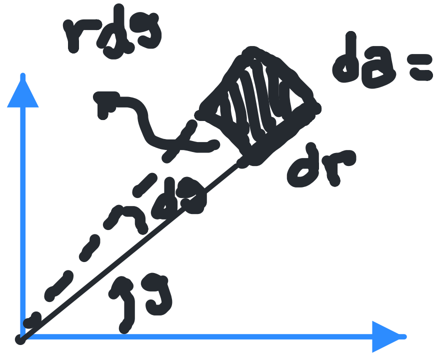
$$\left.\begin{array}{l} 2D \Rightarrow \sigma = \dfrac{dm}{da} \Rightarrow dm = \sigma\, da \\ \text{Uniforme} \Rightarrow \sigma = \dfrac{M}{A} \end{array}\right\} \Rightarrow dm = \frac{M}{A}\, da$$

$$\left.\begin{array}{l} dm = \dfrac{M}{A}\, da \\ da = r\,dr\,d\theta \\ A = \alpha R^2 \end{array}\right\} \Rightarrow dm = \frac{M\,r\,dr\,d\theta}{\alpha R^2}$$

$$\Rightarrow x_G = \frac{\cancel{M}}{\cancel{M}\alpha R^2}\iint_A x\,r\,dr\,d\theta$$

$$x = r\cos\theta$$

Elemento de área:



$$da = dr \cdot r\,d\theta$$

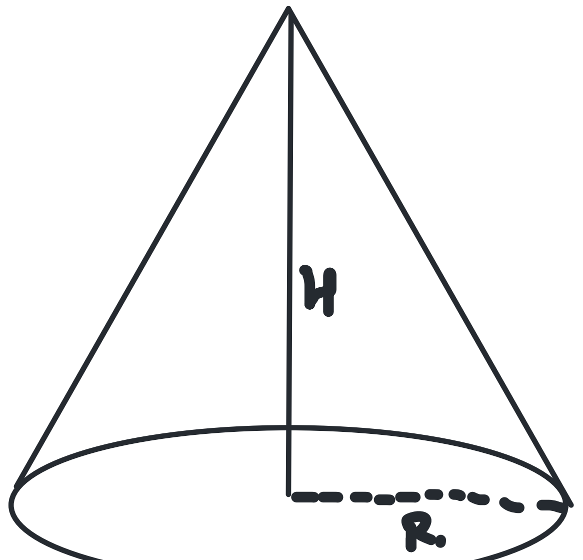
Área:

$$A = \iint da = \int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta \int_0^R r\,dr = 2\alpha\frac{R^2}{2} = \alpha R^2$$

$$\Rightarrow x_G = \frac{1}{\alpha R^2}\underbrace{\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\theta\,d\theta}_{2\sin\alpha}\ \underbrace{\int_0^R r^2\,dr}_{R^3/3} \Rightarrow \boxed{x_G = \frac{2R\sin\alpha}{3\alpha}}$$

EJEMPLO 4: CONO

Simetría de revolución ⇒ elegimos el eje z coincidente con el eje del cono ⇒ $x_G = y_G = 0$

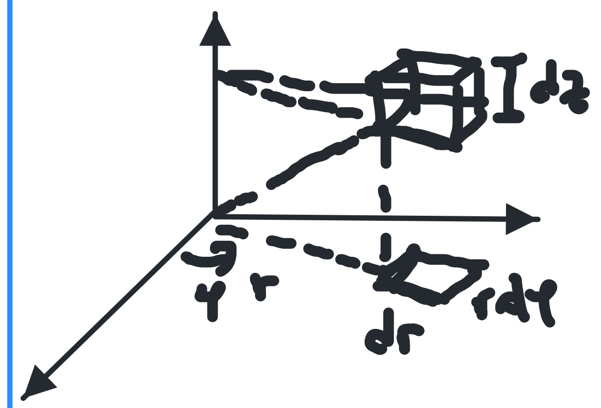


$z_G = \frac{1}{M}\int z\,dM$

$$\left.\begin{array}{l} 3D \Rightarrow \rho = \frac{dM}{dV} \Rightarrow dM = \rho\, dV \\ \text{Uniforme} \Rightarrow \rho = \frac{M}{V} \text{ con } V = \frac{\pi R^2 H}{3} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} dM = \frac{3M}{\pi R^2 H}\, dV \\ dV = r\,dr\,d\varphi\,dz \end{array}\right\} \Rightarrow z_G = \underbrace{\frac{3\cancel{M}}{\cancel{M}\pi R^2 H} \iiint_V z\,r\,dr\,d\varphi\,dz}$$

ES FUNDAMENTAL ESCRIBIR CORRECTAMENTE LOS EXTREMOS DE INTEGRACIÓN...

Elemento de volumen:



$dV = dr . r\,d\varphi . dz$

VOLUMEN:

$V = \iiint dV = \frac{\pi R^2 H}{3}$

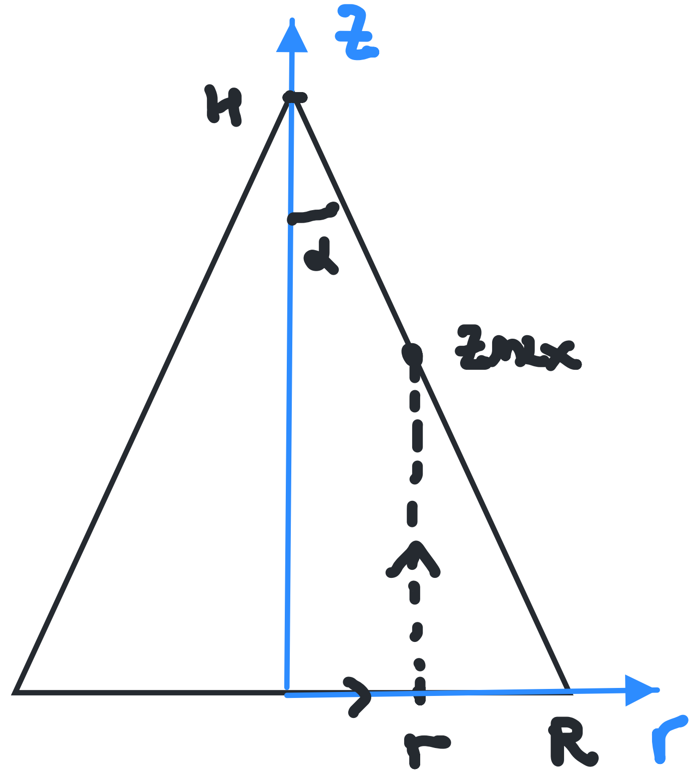
(verificarlo)

Dominio de integración: Hay que recorrer c/punto del cono 1 vez

$\Rightarrow$ $\boxed{0 \leq \varphi < 2\pi}$

2 opciones para r y z $\rightarrow$ 1) $\boxed{0 \leq r \leq R} \Rightarrow 0 \leq z \leq z_{max}(r) < H$ (si z llegara a H estaríamos cubriendo un cilindro)

$\rightarrow$ 2) $0 \leq z \leq H \Rightarrow 0 \leq r \leq r_{max}(z) < R$



Caso 1: $z_{max}(r) = Ar + B$

$$\left.\begin{array}{l} z_{max}(0) = H \Rightarrow B = H \\ z_{max}(R) = 0 \Rightarrow AR + H = 0 \Rightarrow A = -\frac{H}{R} \end{array}\right\} \Rightarrow z_{max}(r) = -\frac{Hr}{R} + H$$

$\Rightarrow$ $\boxed{0 \leq z \leq -\frac{Hr}{R} + H}$

Notar que, como el extremo de z depende de r

$\Rightarrow$ HAY QUE INTEGRAR PRIMERO EN Z

Teníamos: $z_G = \frac{1}{M}\int z\,dM \overset{\text{pg. 7}}{=} \frac{3}{\pi R^2 H}\iiint_{\text{cono}} z\,r\,dr\,d\varphi\,dz = \frac{3}{\pi R^2 H}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R} \left[\int_0^{-\frac{Hr}{R}+H} z\,dz\right] r\,dr$

$$= \frac{6\cancel{\pi}}{\cancel{\pi} R^2 H}\int_0^{R} \left(\frac{z^2}{2}\Big|_0^{-\frac{Hr}{R}+H}\right) r\,dr = \frac{6}{2R^2 H}\int_0^{R} \left(-\frac{Hr}{R}+H\right)^2 r\,dr$$

$$= \frac{3H^{\cancel{2}}}{R^2 \cancel{H}}\int_0^{R} \left(-\frac{r}{R}+1\right)^2 r\,dr = \frac{3H}{R^2}\int_0^{R} \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{2r}{R} + 1\right) r\,dr$$

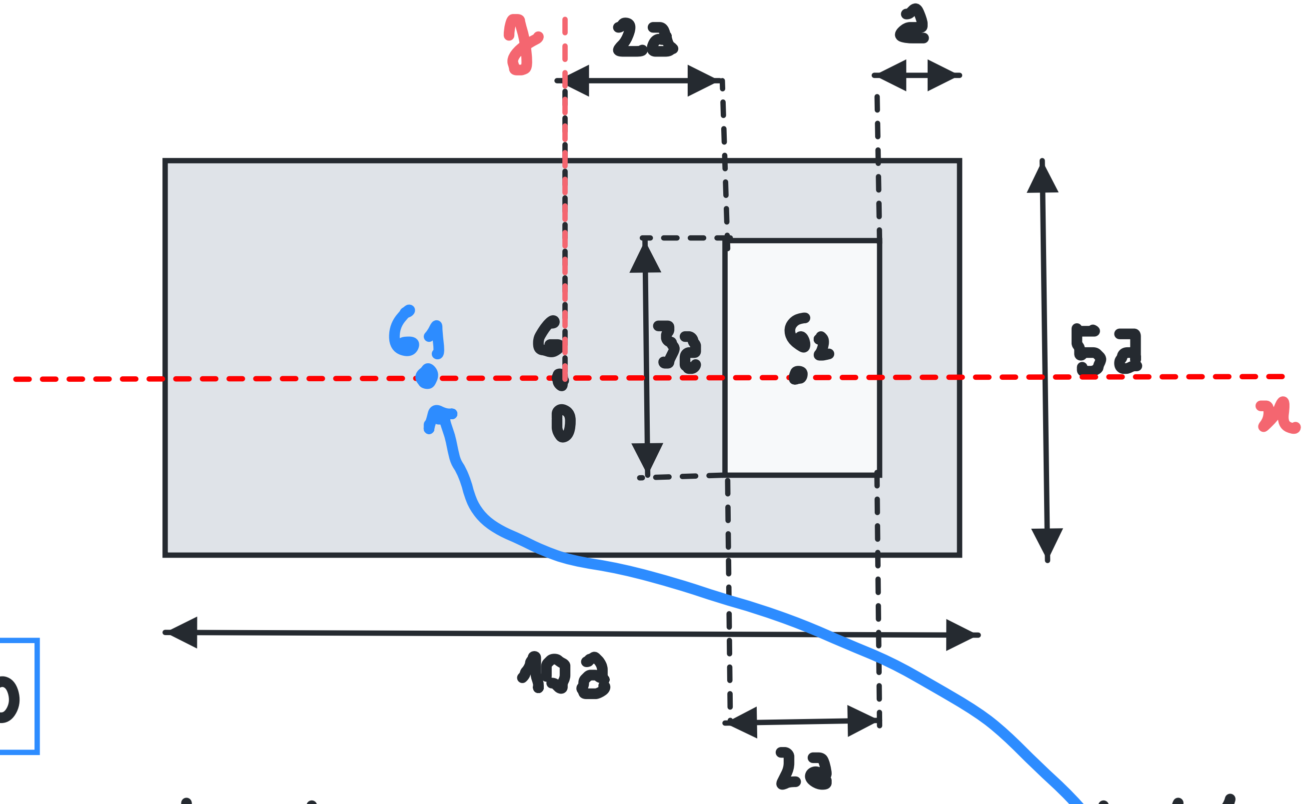
$$= \frac{3H}{R^2}\left[\frac{r^4}{4R^2} - \frac{2r^3}{3R} + \frac{r^2}{2}\right]_0^{R} = \frac{3H}{R^2}\left(\frac{R^2}{4} - \frac{2R^2}{3} + \frac{R^2}{2}\right) = 3H\left(\overbrace{\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}}^{1/12}\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{z_G = \frac{H}{4}}$$

Pensar el cono truncado:  sin hacer integrales!

CUERPOS CON HUECOS

EJ: A una chapa rectangular, homogénea de lados 10a y 5a y masa M le realizamos el hueco de la figura.
¿Dónde se ubica el CM?



OBS 1: Se puede hallar por integración pero NO CONVIENE

OBS 2: Tiene simetría axial $\Rightarrow G \in e \Rightarrow$ Si $\delta x = e \Rightarrow \boxed{Y_G = 0}$

OBS 3: Puedo pensar a la chapa original como un cuerpo compuesto por la $\underbrace{\text{chapa ahuecada}}_{①}$ + $\underbrace{\text{pedazo cortado}}_{②}$

$$\Rightarrow \underbrace{M X_G(\square)}_{=0} = \underbrace{M_1 X_{G_1}(\square)}_{\text{INCÓGNITA}} + \underbrace{M_2 X_{G_2}(\square)}_{=3a} \Rightarrow 0 = \frac{44M}{50} x_{G_1} + \frac{6M}{50} \cdot 3a \Rightarrow \boxed{x_{G_1} = -\frac{18}{44} a = \frac{-9}{22} a}$$

Con σ uniforme $\Rightarrow \dfrac{M}{50a^2} = \dfrac{M_1}{44a^2} = \dfrac{M_2}{6a^2} \rightarrow M_1 = \dfrac{44M}{50}, \; M_2 = \dfrac{6M}{50}$

¿Qué rol juega el CM en la dinámica de un sistema de partículas? ⇒ FUNDAMENTAL

1) **PRIMERA CARDINAL** (generalización de 2da ley de Newton)

N partículas ⇒ $\vec{P}_{NETO} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$

$\vec{r}_G = \frac{1}{M_T} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \Rightarrow \vec{V}_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = M \vec{V}_G$

$\Rightarrow \vec{P}_N = M \vec{V}_G \Rightarrow \boxed{\dot{\vec{P}}_N = M \vec{a}_G}$

Además: $\vec{a}_G = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{NETA,i}$ $\quad \sum_{i=1}^{N} F_{ext,i} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij}}_{=0 \text{ por ley fuerte de acción y reacción}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ext,i} = \vec{F}_{NETA}^{EXT}$

Resultante de las fuerzas externas

$\Rightarrow \boxed{F_{NETA}^{EXT} = M \vec{a}_G = \dot{\vec{P}}_{NETO}}$

EN LA PRÁCTICA SE EMPLEA MÁS LA 1ª IGUALDAD $\vec{F}_N^{EXT} = M \vec{a}_G$

2) 2^{da} CARDINAL

→ 1^{a} cardinal es una expresión para la tasa de cambio del momento lineal $\vec{p}$

→ 2^{a} " " " " " " " " " MOMENTO ANGULAR $\vec{L}_Q$ respecto a un punto Q.

N partículas ⇒ $\vec{L}_Q = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{Q,i} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times \vec{p}_i$

$$\Rightarrow \dot{\vec{L}}_Q = \sum_{i=1}^{N} (\vec{v}_i - \vec{v}_Q) \times \vec{p}_i + \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times \dot{\vec{p}}_i = \cancel{\sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i} - \vec{v}_Q \times \overbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i}^{\vec{p}_G} + \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_{N_i}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{L}}_Q = -M \vec{v}_Q \times \vec{v}_G + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_{ext,i}}_{M_{Q,i}^{ext}} + \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\vec{L}}_Q = M \vec{v}_G \times \vec{v}_Q + \vec{M}_Q^{EXT\ NETO}}$$

$M_{Q,i}^{ext}$ → Momento de fuerza o Torque

OBS: N part ⇒ 6N g.l.

1^a cardinal ⇒ 3 EC
2 cardinal ⇒ 3 EC
⇒ 6 EC.

SOLO SERÁN SUFICIENTES PARA SISTEMAS MUY ESPECIALES (RÍGIDOS)