

Capítulo 3

Planos Fatoriais Fracionados

Conforme discutido no Capítulo 1, não existe um único procedimento para o planejamento de experimentos que possa ser aplicado a todos os tipos de problemas. Ficou evidente que diversas questões devem ser compreendidas e respondidas antes que o planejamento dos experimentos propriamente dito seja iniciado, além de ter sido mostrado que o problema que está sendo investigado influencia o planejamento dos experimentos. No Capítulo 2 foram mostrados e discutidos os procedimentos clássicos de planejamento fatorial, que têm como principal característica a ortogonalidade, que permite a obtenção de parâmetros independentes em modelos lineares nos parâmetros. Contudo, ficou evidente que o número de experimentos num planejamento fatorial cresce como uma potência do número de níveis, à medida que o número de variáveis aumenta. Dessa forma, mesmo quando apenas dois níveis são usados, o número de experimentos já é excessivamente grande quando se atingem cinco variáveis ($32 \cdot NR$, se todos os experimentos são replicados, ou $32 + NR$ se são replicados os experimentos apenas na condição central). Por isso, neste capítulo serão apresentados e discutidos alguns procedimentos clássicos de planejamento de experimentos que são obtidos como frações dos planos fatoriais clássicos. De forma geral, os planejamentos serão propostos com o objetivo de manter as propriedades de ortogonalidade discutidas no capítulo anterior, para que seja ainda possível estimar parâmetros independentes, apesar do menor número de experimentos da grade experimental. A despeito disso, a redução do número de experimentos traz alguns inconvenientes para o analista, como a fusão dos efeitos experimentais, como será discutido nas próximas seções.

3.1. Planos Meio-Fatoriais

Ao longo da discussão encaminhada até aqui, o ideal estatístico foi sendo comprometido em vários pontos, em função de uma visão mais pragmática e da construção de um plano experimental mais enxuto e econômico. Por exemplo, (i) a identificação de relações funcionais complexas e de padrões oscilatórios de comportamento foi prejudicada com a construção da filosofia de planejamento fatorial; (ii) a escolha de muitas condições aleatórias de experimentação foi substituída pela escolha do conjunto mínimo de experimentos que permitem a formulação de um certo modelo de referência; (iii) a realização de muitas réplicas para identificação dos erros experimentais foi substituída pela escolha de um conjunto mínimo de réplicas, admitindo-se comportamento normal, independência das medidas experimentais e uniformidade das flutuações na região de experimentação. A despeito disso, por incrível que pareça, o número de condições de experimentação previsto por planos fatoriais clássicos a 2 e 3 níveis é ainda excessivamente elevado para grande parte dos problemas experimentais. Por exemplo, admitindo-se que os efeitos de $NX = 7$ variáveis independentes sobre uma certa resposta estão sendo investigados, as Equações (2.69) e (2.73) indicam que são necessários NE

= 131 e $NE = 2189$ experimentos respectivamente para formulações fatoriais a 2 e 3 níveis, com $NR_0 = 3$ réplicas centradas no ponto central. Esses números são absurdos para a maior parte dos propósitos práticos. Se um limite de cerca de 20 experimentos é admitido para iniciar uma investigação experimental, a formulação fatorial clássica permitiria a análise de não mais do que $NX = 4$ variáveis independentes a dois níveis e $NX = 2$ variáveis independentes a três níveis. Esses números são restritivos demais e limitam a aplicação dos planos clássicos a problemas de pequena dimensão.

Analisando-se as Equações (2.69) e (2.73), vê-se que não é mais possível reduzir a carga experimental através da otimização da escolha de variáveis como o número de níveis e o número de réplicas. A única variável presente nessas equações é o número de variáveis independentes, que não pode ser manipulado por caracterizar a natureza intrínseca do problema que está sendo investigado. Mudar o valor de NX é o mesmo que mudar o problema analisado, o que não faz qualquer sentido para aquele que formulou o problema experimental. Portanto, há que se buscar uma outra alternativa.

Para induzir o leitor a perceber a solução natural que pode ser obtida para esse problema, apresenta-se a Tabela 3.1 com um plano experimental fatorial a 2 níveis para 3 variáveis.

Tabela 3.1- Plano experimental fatorial a 2 níveis para 3 variáveis, com réplicas no ponto central.

| Experimento | 1 | z_1 | z_2 | z_3 | $z_1 z_2$ | $z_1 z_3$ | $z_2 z_3$ | $z_1 z_2 z_3$ | NR |
|-------------|----|-------|-------|-------|-----------|-----------|-----------|---------------|----|
| 1 | +1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 | -1 | 1 |
| 2 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 | 1 |
| 3 | +1 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | 1 |
| 4 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 | 1 |
| 5 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 | 1 |
| 6 | +1 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 | -1 | 1 |
| 7 | +1 | +1 | +1 | -1 | +1 | -1 | -1 | -1 | 1 |
| 8 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | 1 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 |

O plano fatorial apresentado na Tabela 3.1 permite a identificação de todas as interações de ordem 1 a 3 entre as $NX = 3$ variáveis do problema. Em outras palavras, o analista pode propor a seguinte equação empírica para explicar os dados experimentais:

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 + \beta_{12} z_1 z_2 + \beta_{13} z_1 z_3 + \beta_{23} z_2 z_3 + \gamma_{123} z_1 z_2 z_3 \tag{3.1}$$

onde α_i , β_{ij} e γ_{ijk} são os parâmetros que devem ser identificados. No entanto, à medida que a ordem da interação aumenta, menos provável é que a interação tenha importância prática no sistema experimental investigado. Dessa forma, na maior parte dos sistemas práticos reais, espera-se que o parâmetro γ_{ijk} da Equação (3.1) seja não significativo ou menos significativo que os demais. (Deve-se observar que essa não é uma lei da natureza, mas uma observação **heurística** bastante usual.) Por essa razão, o experimentador pode então se sentir compelido a sacrificar as interações de ordem superior (ou seja, não se importar com a estimação precisa

desses fatores) e a tentar simplificar a estrutura do modelo de referência proposto. Por exemplo, a Tabela 3.1 mostra os dois conjuntos distintos de condições experimentais que são obtidos quando a interação de ordem 3 está confundida com o efeito constante (e, portanto, assume valores constantes ao longo da região experimental). Como forma de ilustrar o procedimento descrito no parágrafo anterior, deve ser observado que os dois subconjuntos ressaltados no plano fatorial apresentado na Tabela 3.1 e ilustrado na Figura 3.1 são também ortogonais, embora não permitam a identificação da interação de ordem 3. O leitor deve observar que as somas das colunas da Tabela 3.1 relacionadas aos efeitos experimentais são iguais a zero nos subconjuntos ressaltados (e, portanto, os subconjuntos são ortogonais), com exceção daquela relacionada ao efeito de terceira ordem. A identificação da interação de ordem 3 não é possível nos subconjuntos ortogonais (ou meio-fatoriais) porque o valor do produto $z_1z_2z_3$ permanece constante na grade. Como mostrado na Tabela 3.2, existem duas metades do plano fatorial completo original que também são ortogonais e, portanto, permitem a obtenção de parâmetros independentes em modelos lineares nos parâmetros. Logo, para obter parâmetros independentes em modelos lineares nos parâmetros com três variáveis a dois níveis não é necessário executar o plano experimental fatorial completo com oito experimentos (além das réplicas no ponto central), o que certamente é muito bom e permite considerar a redução dos experimentos da grade experimental original.

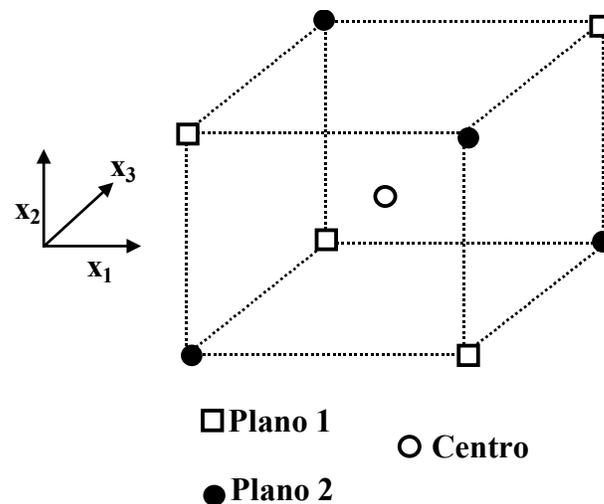


Figura 3. 1- Ilustração geométrica dos planos meio-fatoriais da Tabela 3.1.

A pergunta que se impõe, então, é se esse procedimento pode ser executado sempre ou se é apenas uma curiosidade para o conjunto de experimentos apresentados na Tabela 3.1. A resposta para a questão formulada é um sonoro SEMPRE, como mostrado no Exemplo 3.1 apresentado a seguir. Isso pode ser feito sempre porque todas as combinações dos demais efeitos aparecem para cada nível que se estabelece para um efeito genérico em um plano fatorial completo. As duas metades apresentadas nas Tabelas 3.1 e 3.2 são chamadas por razões óbvias de **planos meio-fatoriais ou planos fatoriais fracionados**, que podem ser definidas como porções ortogonais do plano fatorial completo que se obtêm quando se sacrificam os efeitos associados às interações de mais alta ordem. Portanto, é possível reduzir a dimensão do plano fatorial completo e ainda assim manter as propriedades de ortogonalidade do plano experimental fatorial. Assim, os efeitos que podem ser estimados são obtidos de forma independente.

Tabela 3.2- Planos experimentais meio-fatoriais a 2 níveis para 3 variáveis, com réplicas no ponto central.

| Plano Meio-Fatorial 1 | | | | | | | | | |
|-----------------------|----|----------------|----------------|----------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|--|----|
| Experimento | 1 | z ₁ | z ₂ | z ₃ | z ₁ z ₂ | z ₁ z ₃ | z ₂ z ₃ | z ₁ z ₂ z ₃ | NR |
| 1 | +1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 | -1 | 1 |
| 2 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 | 1 |
| 3 | +1 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 | -1 | 1 |
| 4 | +1 | +1 | +1 | -1 | +1 | -1 | -1 | -1 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 |

| Plano Meio-Fatorial 2 | | | | | | | | | |
|-----------------------|----|----------------|----------------|----------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|--|----|
| Experimento | 1 | z ₁ | z ₂ | z ₃ | z ₁ z ₂ | z ₁ z ₃ | z ₂ z ₃ | z ₁ z ₂ z ₃ | NR |
| 1 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 | 1 |
| 2 | +1 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | 1 |
| 3 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 | 1 |
| 4 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 |

Exemplo 3.1- Suponha que um plano experimental fatorial a dois níveis é proposto para investigar um problema. Então:

$$\sum_{k=1}^{NE} \prod_{i=1}^{NF} f_i(\mathbf{x}_k) = 0$$

onde NE representa o número de experimentos do plano e $f_i(\mathbf{x}_k)$ representa o efeito experimental i calculado na condição experimental \mathbf{x}_k . NF representa o número de fatores independentes analisados simultaneamente. Nesse caso,

$$\sum_{k=1}^{NS} \prod_{i=1}^M f_i(\mathbf{x}_k) = N$$

$$\sum_{k=NS+1}^{NE} \prod_{i=1}^M f_i(\mathbf{x}_k) = -N$$

onde NS representa um subconjunto dos dados experimentais e M representa um subconjunto dos efeitos considerados. Obviamente, nessas condições o plano não é necessariamente ortogonal em NS , pois a soma dos efeitos considerados no subconjunto da grade experimental não é necessariamente igual a zero. No entanto, como o plano é ortogonal em NE , as duas metades consideradas devem necessariamente somar valores com sinais contrários. Como o plano original é fatorial, então $NS = NE - NS$ e, portanto, $NS = NE/2$. Como o efeito de mais alta ordem é mantido constante, na primeira metade

$$\left(\prod_{i=1}^M f_i(\mathbf{x}_k) \right) \left(\prod_{j=1}^{NF-M} f_j(\mathbf{x}_k) \right) = 1$$

$$\left(\prod_{i=1}^M f_i(\mathbf{x}_k) \right) = \left(\prod_{j=1}^{NF-M} f_j(\mathbf{x}_k) \right)$$

$$\sum_{k=1}^{NS} \left(\prod_{i=1}^M f_i(\mathbf{x}_k) \right) = \sum_{k=1}^{NS} \left(\prod_{j=1}^{NF-M} f_j(\mathbf{x}_k) \right) = N$$

enquanto na segunda metade

$$\begin{aligned} \left(\prod_{i=1}^M f_i(\mathbf{x}_k) \right) \left(\prod_{j=1}^{NF-M} f_j(\mathbf{x}_k) \right) &= -1 \\ \left(\prod_{i=1}^M f_i(\mathbf{x}_k) \right) &= - \left(\prod_{j=1}^{NF-M} f_j(\mathbf{x}_k) \right) \\ \sum_{k=NS+1}^{NE} \left(\prod_{i=1}^M f_i(\mathbf{x}_k) \right) &= - \sum_{k=N+1}^{NE} \left(\prod_{j=1}^{NF-M} f_j(\mathbf{x}_k) \right) = -N \end{aligned}$$

Deve ser observado que não é possível satisfazer os dois conjuntos de equações simultaneamente, a não ser que o valor de N seja igual a zero, pois:

$$\sum_{k=1}^{NE} \left(\prod_{j=1}^{NF-M} f_j(\mathbf{x}_k) \right) = \sum_{k=1}^{NS} \left(\prod_{j=1}^{NF-M} f_j(\mathbf{x}_k) \right) + \sum_{k=NS+1}^{NE} \left(\prod_{j=1}^{NF-M} f_j(\mathbf{x}_k) \right) = 2N$$

Portanto, conclui-se que as duas metades resultantes do processo de partição baseado no sacrifício da interação de mais alta ordem são de fato sempre ortogonais.

Em função da discussão proposta nos parágrafos anteriores, uma hipótese adicional é formulada abaixo.

Hipótese 3.1- O experimentador está disposto a sacrificar interações de ordem superior nos modelos de referência descritos pela Equação (2.48), relacionada ao plano experimental fatorial a dois níveis, e pela Equação (2.72), relacionada ao plano experimental fatorial a três níveis.

A Hipótese 3.1 permite sempre reduzir o número de experimentos propostos na grade experimental e ainda assim estimar parâmetros independentes nos modelos lineares nos parâmetros, por conta da ortogonalidade. Nos planos experimentais a dois níveis (ver Exemplo 3.1), formam-se dois blocos ortogonais com metade dos experimentos do plano fatorial completo ($NE = 2^{NX-1}$). Nos planos experimentais a três níveis (ver Figura 3.2 e Exercícios Propostos 1 e 2), formam-se três blocos ortogonais, sendo que dois blocos contêm $NE = 2^{NX-1}$ experimentos (condições em que as interações de alta ordem são iguais a -1 e +1) e um bloco contém $NE = 3^{NX} - 2^{NX}$ experimentos (condições em que as interações de alta ordem são iguais a 0). No entanto, a redução da carga experimental não é irrelevante, pois a redução do número de experimentos compromete a estimação de parâmetros do modelo. O número máximo de parâmetros que podem ser estimados quando NE condições experimentais são consideradas é igual a $NE-1$, enquanto o número máximo de parâmetros que podem ser estimados quando $NS < NE$ condições experimentais são consideradas é igual a $NS-1 < NE-1$. Portanto, a capacidade analítica do plano é reduzida quando o plano fatorial completo é particionado. Além disso, como mostrado no Capítulo 4 do volume I dessa série, a redução do número de experimentos também provoca redução da precisão dos parâmetros estimados (considerando-se um mesmo

número de parâmetros no modelo). Portanto, a qualidade da análise também é afetada pela redução da carga experimental. Dessa forma, fica claro que a decisão de reduzir a carga experimental resulta na piora relativa da análise dos dados, o que deve ser sempre considerado de forma crítica pelo analista.

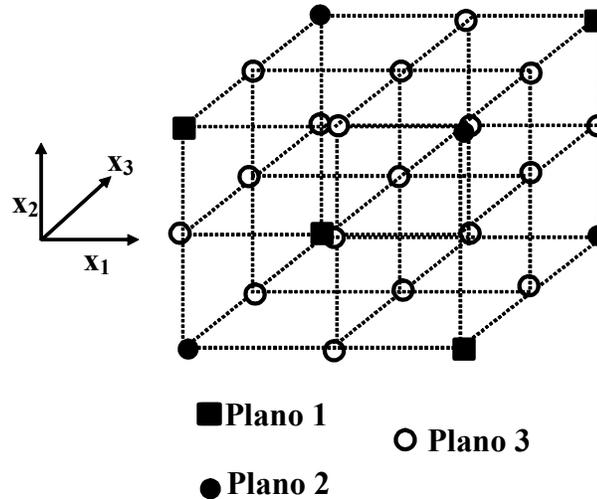


Figura 3. 2- Ilustração geométrica dos planos meio-fatoriais de um plano fatorial a três níveis.

Voltemos às Tabelas 3.1 e 3.2, onde o número de condições experimentais caiu de 9 para 5 após o procedimento de partição. Portanto, foi perdida a capacidade de avaliar ao menos 4 efeitos experimentais distintos quando o analista decidiu realizar o plano experimental meio-fatorial ao invés do plano fatorial completo. Logo, não foi perdida apenas a capacidade de avaliar um parâmetro, como se pode apressadamente concluir do fato de ter sido sacrificada apenas uma interação de ordem elevada. Sendo assim, quatro parâmetros precisam ser removidos da Equação (3.1) e não apenas o termo diretamente associado à interação de mais alta ordem. Uma pergunta pertinente diz respeito a que parâmetros e efeitos experimentais devem ser removidos da Equação (3.1) e a quais parâmetros podem ser de fato estimados a partir do plano experimental proposto.

O observador atento vai perceber na Tabela 3.2 que

$$z_{1i} = -z_{2i} z_{3i}, z_{2i} = -z_{1i} z_{3i}, z_{3i} = -z_{1i} z_{2i}, \text{ para o Plano Meio-Fatorial 1;}$$

$$z_{1i} = z_{2i} z_{3i}, z_{2i} = z_{1i} z_{3i}, z_{3i} = z_{1i} z_{2i}, \text{ para o Plano Meio-Fatorial 2.}$$

Diz-se que os efeitos de interação binária da Tabela 3.2 estão **fundidos** ou **confundidos** com os efeitos principais, porque variam de forma similar (a menos de uma constante multiplicativa) ao longo da grade experimental. Logo, o sacrifício de uma interação de ordem superior provoca a **confusão de efeitos experimentais** (ou **fusão de efeitos experimentais**), que impede a estimação desses efeitos a partir do plano meio-fatorial proposto. Por conta desse efeito, considerando o Plano Meio-Fatorial 1 da Tabela 3.2, deve-se escrever:

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 + \beta_{12} z_1 z_2 + \beta_{13} z_1 z_3 + \beta_{23} z_2 z_3 + \gamma_{123} z_1 z_2 z_3 \tag{3.2}$$

$$y = (\alpha_0 - \gamma_{123}) + (\alpha_1 - \beta_{23}) z_1 + (\alpha_2 - \beta_{13}) z_2 + (\alpha_3 - \beta_{12}) z_3$$

enquanto para o Plano Meio-Fatorial 2 da Tabela 3.2, deve-se escrever:

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 + \beta_{12} z_1 z_2 + \beta_{13} z_1 z_3 + \beta_{23} z_2 z_3 + \gamma_{123} z_1 z_2 z_3$$

$$y = (\alpha_0 + \gamma_{123}) + (\alpha_1 + \beta_{23}) z_1 + (\alpha_2 + \beta_{13}) z_2 + (\alpha_3 + \beta_{12}) z_3 \quad (3.3)$$

O leitor deve perceber que apenas os efeitos principais podem de fato ser estimados a partir dos planos meio-fatoriais para três variáveis a dois níveis. Portanto, a redução da carga experimental só pode ser feita à custa da simplificação do modelo de referência e à fusão de efeitos experimentais. Por exemplo, no caso da Tabela 3.2, o modelo de referência teria que ter a estrutura linear nas variáveis experimentais

$$y = \alpha_1 + \alpha_2 z_1 + \alpha_3 z_2 + \alpha_4 z_3 \quad (3.4)$$

ou a estrutura não linear nas variáveis experimentais, para identificação da concavidade da resposta, na forma (ver Capítulo 2)

$$y = \alpha_1 + \alpha_2 z_1 + \alpha_3 z_2 + \alpha_4 z_3 + \alpha_5 \left(z_1^2 - \frac{4}{7} \right) \quad (3.5)$$

A comparação das Equações (3.2-3.3) com as Equações (3.4-3.5) mostra ainda uma propriedade muito importante – se as interações de ordem 2 ou 3 (efeitos não lineares das variáveis experimentais) existirem, o experimentador não só não poderá identificá-los como o experimentador concluirá que os resultados são devidos a um outro efeito experimental, sem qualquer conexão com a interação real. Ou seja, os parâmetros estimados com a Equação (3.4) e os dados experimentais resultantes do plano meio-fatorial podem esconder efeitos não lineares importantes, como mostrado nas Equações (3.2-3.3). Esse efeito é extremamente importante e obriga o analista a avaliar que e quantos efeitos experimentais são fundidos após o fracionamento do plano fatorial completo. Por essa razão, toda vez que um plano fatorial for fracionado, o experimentador tem que identificar que conjuntos de efeitos passam a estar confundidos. Somente o experimentador pode decidir se a confusão de efeitos existente pode ser relevante ou não para o problema investigado, pois em geral essa informação não é disponível no início do procedimento experimental. Uma vez mais, isso deixa claro que não é possível formular uma receita genérica para o problema de planejamento experimental sem a participação do experimentador. Apesar da redução da carga de trabalho, o fracionamento do plano experimental resulta em redução do número de parâmetros identificáveis, redução da precisão dos parâmetros obtidos e fusão de efeitos experimentais. Apenas o experimentador pode decidir se o balanço de perdas e ganhos vale à pena.

Exemplo 3.2- A Tabela 3.3 apresenta um plano fatorial completo para 5 variáveis a dois níveis, com réplicas no ponto central. Interações de quinta ordem são apresentadas e servem de base para fracionamento do plano fatorial. Um plano fracionado é apresentado na Tabela 3.4.

Tabela 3.3- Plano fatorial para $NX = 5$ variáveis a dois níveis, com réplicas no ponto central.

| Experimento | z_1 | z_2 | z_3 | z_4 | z_5 | $z_1 z_2 z_3 z_4 z_5$ |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------------------|
| 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| 2 | -1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 |

| | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|
| 3 | -1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 |
| 4 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 |
| 5 | -1 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 |
| 6 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 |
| 7 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 |
| 8 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 | +1 |
| 9 | -1 | +1 | -1 | -1 | -1 | +1 |
| 10 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 |
| 11 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 | -1 |
| 12 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 | +1 |
| 13 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 |
| 14 | -1 | +1 | +1 | -1 | +1 | +1 |
| 15 | -1 | +1 | +1 | +1 | -1 | +1 |
| 16 | -1 | +1 | +1 | +1 | +1 | -1 |
| 17 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 | +1 |
| 18 | +1 | -1 | -1 | -1 | +1 | -1 |
| 19 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 | -1 |
| 20 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 |
| 21 | +1 | -1 | +1 | -1 | -1 | -1 |
| 22 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 |
| 23 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 | +1 |
| 24 | +1 | -1 | +1 | +1 | +1 | -1 |
| 25 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| 26 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 |
| 27 | +1 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 |
| 28 | +1 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 |
| 29 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 |
| 30 | +1 | +1 | +1 | -1 | +1 | -1 |
| 31 | +1 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 |
| 32 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 |
| 33 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Tabela 3.4- Plano meio-fatorial para $NX = 5$ variáveis a dois níveis, com réplicas no ponto central, sacrificando a interação de ordem 5.

| Experimento | z_1 | z_2 | z_3 | z_4 | z_5 | $z_1 z_2 z_3 z_4 z_5$ |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------------------|
| 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| 2 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 |
| 3 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 |
| 4 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 |
| 5 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 |
| 6 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 | -1 |

| | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|
| 7 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 |
| 8 | -1 | +1 | +1 | +1 | +1 | -1 |
| 9 | +1 | -1 | -1 | -1 | +1 | -1 |
| 10 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 | -1 |
| 11 | +1 | -1 | +1 | -1 | -1 | -1 |
| 12 | +1 | -1 | +1 | +1 | +1 | -1 |
| 13 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| 14 | +1 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 |
| 15 | +1 | +1 | +1 | -1 | +1 | -1 |
| 16 | +1 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 |
| 17 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Os efeitos fundidos na Tabela 3.4 são os seguintes:

- 1) $1 = -z_{1i} z_{2i} z_{3i} z_{4i} z_{5i}$;
- 2) $z_{1i} = -z_{2i} z_{3i} z_{4i} z_{5i}$;
- 3) $z_{2i} = -z_{1i} z_{3i} z_{4i} z_{5i}$;
- 4) $z_{3i} = -z_{1i} z_{2i} z_{4i} z_{5i}$;
- 5) $z_{4i} = -z_{1i} z_{2i} z_{3i} z_{5i}$;
- 6) $z_{5i} = -z_{1i} z_{2i} z_{3i} z_{4i}$;
- 7) $z_{1i} z_{2i} = -z_{3i} z_{4i} z_{5i}$;
- 8) $z_{1i} z_{3i} = -z_{2i} z_{4i} z_{5i}$;
- 9) $z_{1i} z_{4i} = -z_{2i} z_{3i} z_{5i}$;
- 10) $z_{1i} z_{5i} = -z_{2i} z_{3i} z_{4i}$;
- 11) $z_{2i} z_{3i} = -z_{1i} z_{4i} z_{5i}$;
- 12) $z_{2i} z_{4i} = -z_{1i} z_{3i} z_{5i}$;
- 13) $z_{2i} z_{5i} = -z_{1i} z_{3i} z_{4i}$;
- 14) $z_{3i} z_{4i} = -z_{1i} z_{2i} z_{5i}$;
- 15) $z_{3i} z_{5i} = -z_{1i} z_{2i} z_{4i}$;
- 16) $z_{4i} z_{5i} = -z_{1i} z_{2i} z_{3i}$.

Deve ser observado que todos os efeitos de primeira ordem estão fundidos com os efeitos de quarta ordem (em geral, pouco importantes) e que os efeitos de segunda ordem estão fundidos com os efeitos de terceira ordem (em geral, também pouco importantes). Portanto, se o experimentador acredita que os efeitos de ordem superior a dois são provavelmente irrelevantes, a Tabela 3.4 apresenta um conjunto meio-fatorial de experimentos que permite estimar de forma independente todos os efeitos principais e todas as interações não lineares de segunda ordem. Portanto, o plano meio-fatorial da Tabela 3.4 parece bastante bom.

Exemplo 3.3- Um plano experimental é proposto para investigar o efeito da concentração, da temperatura e da velocidade agitação sobre uma taxa de reação, pois suspeita-se que a reação pode ser limitada pela velocidade de transferência de massa. A faixa de temperaturas analisada é de 25 a 75 °C, enquanto a faixa de concentrações analisadas é de 0.2 a 1 mol/l e a faixa de

velocidade de agitação vai de 100 a 2000 rpm. São escolhidos 2 níveis para cada variável e a distância mínima que os pontos experimentais devem manter das extremidades deve ser igual a zero. Além destes pontos, são realizadas 3 réplicas na condição central. O seguinte modelo deve ser utilizado para interpretar os dados experimentais:

$$R = \alpha_1 + \alpha_2 z_1 + \alpha_3 z_2 + \alpha_4 z_3$$

Baseado nessas informações, os plano experimental é formulado como apresentado na Tabela 2.1. Na Tabela 2.1 são também apresentados os resultados experimentais obtidos. Os dados experimentais apresentados foram obtidos através da expressão

$$R = 10000 \left(1 - \exp\left(-\frac{w}{1000}\right) \right) \exp\left(-\frac{2500}{T + 273.15}\right) C + \varepsilon$$

onde ε é um sinal aleatório, com distribuição normal, média igual a zero e desvio padrão igual a 0.01. As variáveis normalizadas são definidas como:

$$z_1 = \frac{T - 50}{25}$$

$$z_2 = \frac{C - 0.6}{0.4}$$

$$z_3 = \frac{w - 1050}{950}$$

A ordem experimental é definida de forma aleatória. Os dados são apresentados na Tabela 3.5.

Tabela 3.5- Dados experimentais do Exemplo 3.3.

| T (°C) | C (mol/l) | w (rpm) | z ₁ | z ₂ | z ₃ | ordem | erro | R ^c =y ^c (mol/l.h) | R ^{exp} =y ^{exp} (mol/l.h) |
|--------|-----------|---------|----------------|----------------|----------------|-------|--------|--|--|
| 25 | 0.2 | 500 | -1 | -1 | -1 | 5 | -0.062 | 0.180 | 0.118 |
| 25 | 1 | 2000 | -1 | +1 | +1 | 3 | 0.050 | 1.974 | 2.024 |
| 75 | 0.2 | 2000 | +1 | -1 | +1 | 6 | -0.175 | 1.316 | 1.141 |
| 75 | 1 | 500 | +1 | +1 | -1 | 2 | -0.005 | 2.994 | 2.989 |
| 50 | 0.6 | 1250 | 0 | 0 | 0 | 7 | -0.021 | 1.869 | 1.849 |
| 50 | 0.6 | 1250 | 0 | 0 | 0 | 4 | -0.002 | 1.869 | 1.868 |
| 50 | 0.6 | 1250 | 0 | 0 | 0 | 1 | -0.015 | 1.869 | 1.854 |

Como no Exemplo 2.22, a análise qualitativa preliminar dos resultados obtidos está completamente prejudicada pelo baixíssimo número de graus de liberdade. Sendo assim, a única análise qualitativa relevante que pode ser feita é comparar as variações observadas no plano experimental como um todo com aquelas observadas no ponto central. Se o plano é considerado como um todo, então

$$\bar{y} = 1.629 \pm 0.815, \quad 0.322 < s_{y7}^2 = 0.776 < 3.762$$

com 6 graus de liberdade e 95% de confiança. No ponto central,

$$\bar{y} = 1.899 \pm 0.204, \quad 0.002 < s_{y_3}^2 = 0.007 < 0.267$$

com 2 graus de liberdade e 95% de confiança. Observe que não é possível a princípio distinguir os resultados observados no ponto central daqueles observadas ao longo de toda a região de experimentação, já que os intervalos de confiança dos valores médios se sobrepõem, não sendo então possível afirmar *a priori* que existam efeitos relevantes de temperatura, concentração e velocidade de agitação sobre as medidas de taxa de reação. Esses resultados decorrem do baixo número de graus de liberdade do problema. Se o teste F é aplicado às duas medidas de variância, com 6 graus de liberdade no numerador e dois graus de liberdade no denominador, com 95% de confiança

$$0.138 < F < 39.33$$

Como a razão entre as duas variâncias é igual a 110.9, pode-se dizer com 95% de confiança que as variações de atividade enzimática observadas na região de experimentação não podem ser explicadas pelo erro experimental. Dessa forma, o teste F indica a existência de efeitos experimentais relevantes sobre a resposta investigada.

A Equação (3.4) é então usada para estimar os parâmetros do modelo

$$y = \alpha_1 + \alpha_2 z_1 + \alpha_3 z_2 + \alpha_4 z_3$$

resultando em

$$\boldsymbol{\alpha}^T = [1.710 \quad 0.497 \quad 0.938 \quad 0.015]$$

No caso analisado, o valor final obtido para a função objetivo é

$$F_{Obj} = 0.201$$

Como o número de graus de liberdade do problema de estimação de parâmetros é igual a $NE - NP = 3$, uma medida das flutuações observadas entre modelo e experimento pode ser dada por

$$\hat{\sigma}_y^2 = \frac{F_{Obj}}{\nu} = \frac{0.201}{3} = 0.067$$

Já a matriz de covariâncias dos parâmetros fica

$$\mathbf{V}_\alpha = \begin{bmatrix} 0.96 \times 10^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.68 \times 10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.68 \times 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.68 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

e os respectivos desvios padrões são iguais a

$$\sigma_a^T = [0.098 \quad 0.129 \quad 0.129 \quad 0.129]$$

Assim, com limite de confiança de 95%, os parâmetros podem ser apresentados como

$$\alpha^T = \begin{bmatrix} 1.710 \pm 0.311 \\ 0.497 \pm 0.412 \\ 0.938 \pm 0.412 \\ 0.015 \pm 0.412 \end{bmatrix}$$

Deve ser observado que o quarto parâmetro, relacionado ao efeito da velocidade de agitação, foi considerado não significativo, embora a velocidade de agitação de fato afete os resultados experimentais, como mostrado na expressão que gerou os dados. Além disso, o efeito da temperatura, relacionado ao segundo parâmetro, tem seu valor pouco acima do limite de confiança de 95%. De acordo com a Tabela 3.2, os efeitos lineares aparecem confundidos com os efeitos de interação binária. Assim, é possível que o segundo parâmetro esteja sendo influenciado pelo efeito linear da temperatura e pelo efeito do produto da concentração pela velocidade de agitação. Fica claro aqui que, a despeito da aparente maior facilidade de realizar o estudo com um baixo número de experimentos, a informação perdida com a diminuição de experimentos pode ser muito grande.

Na Figura 3.3 é apresentado o ajuste do modelo aos dados experimentais. A despeito das enormes barras de erros de predição (horizontais) devido ao baixo número de graus de liberdade, pode ser observado que o ajuste é bom. No entanto, como enfatizado no parágrafo anterior, houve grande perda de informação com a redução da grade de experimentos.

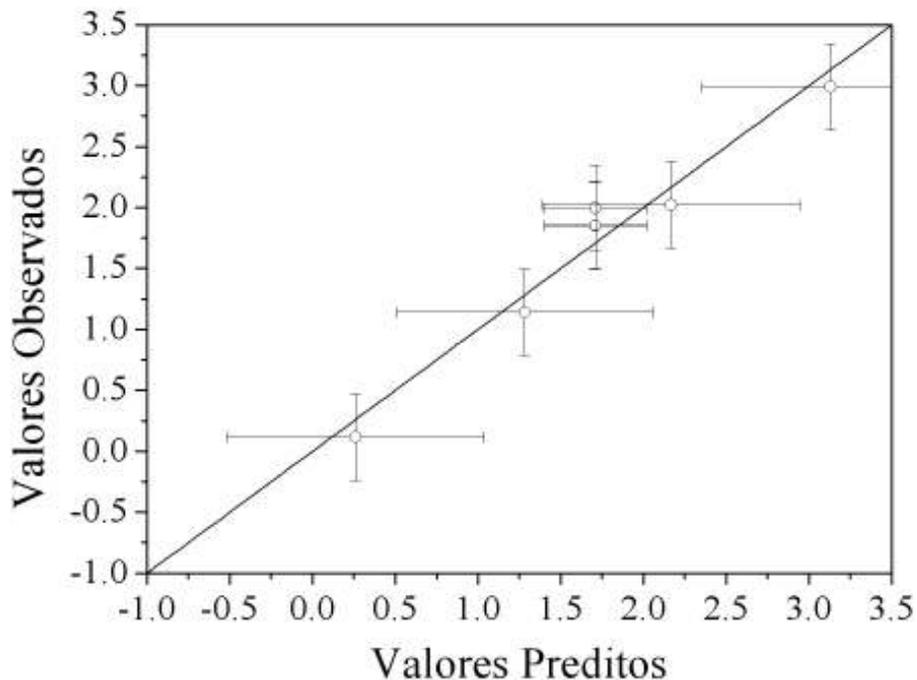


Figura 3.3- Desempenho do modelo para explicação dos dados

experimentais da Tabela 3.5.

3.2. Planos Fatoriais Fracionados e Planos Mínimos de Plackett-Burmann

Tendo em vista os prejuízos que a redução do número de experimentos pode trazer para a análise, como ilustrado na Seção 3.1, uma pergunta se impõe – vale mesmo à pena reduzir o universo de experimentos realizados? Para responder essa pergunta de forma neutra e tecnicamente adequada, é necessário primeiramente reconhecer que o aumento do número de experimentos é sempre benéfico à análise; portanto, a redução da carga experimental só deve ser executada se necessária. O problema, no entanto, é que os experimentos de engenharia são usualmente longos e caros, de maneira que quase sempre há necessidade de reduzir a carga experimental. Suponha que o analista está avaliando o problema de calibração de um espectrofotômetro e precisa obter os espectros de infravermelho de soluções de diferentes composições, com cinco componentes em um solvente. Nesse caso, admitindo que o tempo para preparar as soluções é curto e que os volumes preparados são pequenos (por exemplo, 10 ml), o pesquisador pode se dar ao luxo de preparar as $3^5 = 243$ soluções previstas por um plano experimental a três níveis para as concentrações dos 5 diferentes compostos no solvente padrão. Nesse caso, por que o analista reduziria a carga experimental? No outro extremo, suponha que o analista estuda o efeito que cinco componentes exercem sobre o crescimento microbiano em um meio usado para fazer tratamento de efluentes. Nesse caso, parece lícito admitir que cada um dos experimentos demore ao menos uma semana e que sejam necessários vários litros de produto para a condução do estudo em cada corrida experimental. Portanto, a realização do mesmo plano proposto anteriormente exigiria que o experimento se prolongasse por pelo menos 243 semanas ou quase cinco anos, admitindo que não ocorresse falha em qualquer dos experimentos, o que não parece ser obviamente razoável (consulte o Exemplo 2.2 do volume I dessa série de publicações). Logo, a redução da carga experimental parece premente para a realização do estudo. Comparando-se os dois casos, conclui-se facilmente que a decisão sobre reduzir ou não a carga experimental depende bastante dos custos, do orçamento e das características particulares do problema analisado.

Exemplo 3.4- Suponha que o custo unitário de experimentação seja igual a $\$R_1$ e que o orçamento disponível para o estudo seja igual a $\$R_T$. Nesse caso, parece claro que o número máximo de experimentos no plano experimental (NE_{max}) deve ser igual a

$$NE_{max} = C NE_{sim} \frac{\$R_T}{\$R_1}$$

$C \leq 1$ é um coeficiente de segurança que leva em conta o fato de que nem todo experimento será de fato bem sucedido, como discutido no Exemplo 2.2 do volume I dessa série de publicações. Sugere-se heurísticamente que seja usado o valor $C = 0.7$, embora cada caso deva ser analisado com cuidado, levando-se em conta a taxa de sucessos da série de experimentos particulares realizada. NE_{sim} é um fator que indica o número de experimentos que podem ser realizados simultaneamente pelo analista, já que em muitas instalações é possível realizar vários testes experimentais ao mesmo tempo.

De forma similar, suponha que o tempo requerido para realização de cada experimento seja igual a t_1 e que o tempo disponível para realização do estudo seja igual a t_T . Nesse caso,

parece claro que o número máximo de experimentos no plano experimental (NE_{max}) deve ser igual a

$$NE_{max} = C NE_{sim} \frac{t_T}{t_1}$$

onde $C \leq 1$ e NE_{sim} são os mesmos coeficientes descritos anteriormente. O número máximo de experimentos que deve conter o plano experimental é o menor dos dois números calculados anteriormente, tornando o plano experimental factível do ponto de vista orçamentário e temporal. O valor estimado de NE_{max} pode ajudar o analista a resolver se deve ou não realizar o fracionamento do plano experimental e se deve ou não fazer investimentos na unidade experimental.

A despeito da argumentação apresentada nos parágrafos anteriores, é importante perceber que no início do trabalho experimental, particularmente no caso em que pouca ou nenhuma informação prévia está disponível, não parece haver razões para apostar nos cenários mais complexos de comportamento. Como já discutido no Capítulo 2, parece adequado começar um planejamento experimental com dois níveis, ao invés de três, e começar a análise com modelos lineares na forma

$$y = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{NZ} \alpha_i z_i \quad (3.6)$$

que requer um mínimo de $(NZ+2)$ experimentos na grade experimental. Portanto, para o caso de 5 fatores experimentais da Tabela 3.3, o plano fatorial completo a dois níveis contém $2^5 = 32$ experimentos (além das réplicas do ponto central), enquanto o plano meio-fatorial contém $2^{5-1} = 16$ experimentos (além das réplicas do ponto central). Apesar disso, apenas 7 experimentos são necessários para estimar os seis parâmetros da Equação (3.6), trazendo motivação para que se reduza o plano experimental ainda mais. Curiosamente, e de forma similar à executada na Seção anterior, se duas das interações de ordem superior forem sacrificadas, obtêm-se quatro subconjuntos de 8 experimentos (além das réplicas do ponto central) que também mantêm as mesmas propriedades de ortogonalidade do plano fatorial completo (com 32 experimentos) e do plano meio-fatorial (com 16 experimentos).

Como já sabemos que o fracionamento dos planos fatoriais resulta na fusão de efeitos, podemos usar esse procedimento de fusão de efeitos para construir os **planos fatoriais fracionados** para muitas variáveis a partir de planos fatoriais completos projetados para menor número de variáveis. Nesse caso, ao invés de sacrificarmos explicitamente os efeitos de ordem superior de um plano construído para muitas variáveis, podemos construir novas variáveis confundindo-as com outros efeitos de ordem superior. Assim, ao invés de reduzirmos o número de linhas da grade experimental de um plano construído para muitas variáveis, aumentamos o número de colunas de um plano construído para menor número de variáveis. Por exemplo, para construir planos fatoriais fracionados com oito experimentos para cinco variáveis, podemos fundir efeitos de um plano fatorial completo construído para três variáveis, que também contém oito experimentos. Esse procedimento está ilustrado nas Tabelas 3.7 e 3.8. Os quatro planos fatoriais fracionados com 8 experimentos obtidos com o sacrifício de algumas das interações superiores de segunda ordem e terceira ordem são mostrados nessas tabelas.

Tabela 3.6- Planos fatoriais fracionados para $NX = 5$ variáveis a dois níveis, com réplicas no ponto central, construídos a partir de um plano fatorial completo para três variáveis por fusão de efeitos principais com interações de segunda (z_1z_2) e terceira ordem ($z_1z_2z_3$).

| Plano Fatorial Fracionado 1 | | | | | | |
|-----------------------------|-------|-------|-------|----------------|-------------------|------------|
| Experimento | z_1 | z_2 | z_3 | $z_4 = z_1z_2$ | $z_5 = z_1z_2z_3$ | Tabela 3.4 |
| 1 | -1 | -1 | -1 | +1 | -1 | 3 |
| 2 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 | 8 |
| 3 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 | 10 |
| 4 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | 13 |
| 5 | +1 | -1 | -1 | -1 | +1 | 18 |
| 6 | +1 | -1 | +1 | -1 | -1 | 21 |
| 7 | +1 | +1 | -1 | +1 | -1 | 27 |
| 8 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | 32 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 33 |

| Plano Fatorial Fracionado 2 | | | | | | |
|-----------------------------|-------|-------|-------|----------------|--------------------|------------|
| Experimento | z_1 | z_2 | z_3 | $z_4 = z_1z_2$ | $z_5 = -z_1z_2z_3$ | Tabela 3.4 |
| 1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 | 4 |
| 2 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | 7 |
| 3 | -1 | +1 | -1 | -1 | -1 | 9 |
| 4 | -1 | +1 | +1 | -1 | +1 | 14 |
| 5 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 17 |
| 6 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | 22 |
| 7 | +1 | +1 | -1 | +1 | +1 | 28 |
| 8 | +1 | +1 | +1 | +1 | -1 | 31 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 33 |

| Plano Fatorial Fracionado 3 | | | | | | |
|-----------------------------|-------|-------|-------|-----------------|-------------------|------------|
| Experimento | z_1 | z_2 | z_3 | $z_4 = -z_1z_2$ | $z_5 = z_1z_2z_3$ | Tabela 3.4 |
| 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 |
| 2 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | 6 |
| 3 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 | 12 |
| 4 | -1 | +1 | +1 | +1 | -1 | 15 |
| 5 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | 20 |
| 6 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 | 23 |
| 7 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | 25 |
| 8 | +1 | +1 | +1 | -1 | +1 | 30 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 33 |

| Plano Fatorial Fracionado 4 | | | | | | |
|-----------------------------|-------|-------|-------|-----------------|--------------------|------------|
| Experimento | z_1 | z_2 | z_3 | $z_4 = -z_1z_2$ | $z_5 = -z_1z_2z_3$ | Tabela 3.4 |
| 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | +1 | 2 |
| 2 | -1 | -1 | +1 | -1 | -1 | 5 |
| 3 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 | 11 |
| 4 | -1 | +1 | +1 | +1 | +1 | 16 |
| 5 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 | 19 |
| 6 | +1 | -1 | +1 | +1 | +1 | 24 |
| 7 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 | 26 |
| 8 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | 29 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 33 |

Tabela 3.7- Planos fatoriais fracionados para $NX = 5$ variáveis a dois níveis, com réplicas no ponto central, construídos a partir de um plano fatorial completo para três variáveis por fusão de efeitos principais com interações de segunda (z_1z_3) e terceira ordem ($z_1z_2z_3$).

| Plano Fatorial Fracionado 1 | | | | | | |
|------------------------------------|-------|-------|-------|----------------|-------------------|-------------------|
| Experimento | z_1 | z_2 | z_3 | $z_4 = z_1z_3$ | $z_5 = z_1z_2z_3$ | Tabela 3.4 |
| 1 | -1 | -1 | -1 | +1 | -1 | 3 |
| 2 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | 6 |
| 3 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 | 12 |
| 4 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | 13 |
| 5 | +1 | -1 | -1 | -1 | +1 | 18 |
| 6 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 | 23 |
| 7 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | 25 |
| 8 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | 32 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 33 |

| Plano Fatorial Fracionado 2 | | | | | | |
|------------------------------------|-------|-------|-------|----------------|--------------------|-------------------|
| Experimento | z_1 | z_2 | z_3 | $z_4 = z_1z_3$ | $z_5 = -z_1z_2z_3$ | Tabela 3.4 |
| 1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 | 4 |
| 2 | -1 | -1 | +1 | -1 | -1 | 5 |
| 3 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 | 11 |
| 4 | -1 | +1 | +1 | -1 | +1 | 14 |
| 5 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 17 |
| 6 | +1 | -1 | +1 | +1 | +1 | 24 |
| 7 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 | 26 |
| 8 | +1 | +1 | +1 | +1 | -1 | 31 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 33 |

| Plano Fatorial Fracionado 3 | | | | | | |
|------------------------------------|-------|-------|-------|-----------------|-------------------|-------------------|
| Experimento | z_1 | z_2 | z_3 | $z_4 = -z_1z_3$ | $z_5 = z_1z_2z_3$ | Tabela 3.4 |
| 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 |
| 2 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 | 8 |
| 3 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 | 10 |
| 4 | -1 | +1 | +1 | +1 | -1 | 15 |
| 5 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | 20 |
| 6 | +1 | -1 | +1 | -1 | -1 | 21 |
| 7 | +1 | +1 | -1 | +1 | -1 | 27 |
| 8 | +1 | +1 | +1 | -1 | +1 | 30 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 33 |

| Plano Fatorial Fracionado 4 | | | | | | |
|------------------------------------|-------|-------|-------|-----------------|--------------------|-------------------|
| Experimento | z_1 | z_2 | z_3 | $z_4 = -z_1z_3$ | $z_5 = -z_1z_2z_3$ | Tabela 3.4 |
| 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | +1 | 2 |
| 2 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | 7 |
| 3 | -1 | +1 | -1 | -1 | -1 | 9 |
| 4 | -1 | +1 | +1 | +1 | +1 | 16 |
| 5 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 | 19 |
| 6 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | 22 |
| 7 | +1 | +1 | -1 | +1 | +1 | 28 |
| 8 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | 29 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 33 |

As Tabelas 3.6 e 3.7 mostram que as soluções dos planos fatoriais fracionados não são únicas. Muito pelo contrário, trata-se de um problema combinatorial, com muitas soluções possíveis e crescente número de soluções, à medida que o número de variáveis do plano experimental e o número de experimentos admissíveis crescem. O que diferencia cada um dos planos fatoriais fracionados das Tabelas 3.6 e 3.7 são as interações que podem ser avaliadas de forma independente, por não estarem fundidas com as demais variáveis do plano experimental. Apesar disso, todos os planos permitem a estimação independente dos parâmetros da Equação (3.6).

Exemplo 3.5- Uma maneira muito simples de identificar os efeitos experimentais que estão fundidos numa grade experimental é calcular a matriz de covariâncias das condições do plano experimental (o leitor deve consultar o Capítulo 1 do volume I dessa série de publicações). Nesse caso, colocam-se nas colunas as condições experimentais e os efeitos analisados. Por exemplo, para o primeiro plano fatorial fracionado da Tabela 3.6, pode-se construir a Tabela 3.8 abaixo.

Tabela 3.8- Matriz de experimentos com os efeitos de interação binária para o Plano Fatorial Fracionado 1 da Tabela 3.6.

| Experimento | z_1 | z_2 | z_3 | z_4 | z_5 | z_1z_2 | z_1z_3 | z_1z_4 | z_1z_5 | z_2z_3 | z_2z_4 | z_2z_5 | z_3z_4 | z_3z_5 | z_4z_5 |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | -1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 |
| 2 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 |
| 3 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 |
| 4 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 | +1 |
| 5 | +1 | -1 | -1 | -1 | +1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 | -1 | +1 | -1 | -1 |
| 6 | +1 | -1 | +1 | -1 | -1 | -1 | +1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 |
| 7 | +1 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 |
| 8 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Em seguida, calcula-se a matriz de covariâncias (ou de correlações) entre as colunas da matriz que contém o projeto experimental. No caso analisado, obtém-se a matriz mostrada na Tabela 3.9.

Tabela 3.9- Matriz de covariâncias das colunas da matriz de experimentos mostrada na Tabela 3.8.

| | z_1 | z_2 | z_3 | z_4 | z_5 | z_1z_2 | z_1z_3 | z_1z_4 | z_1z_5 | z_2z_3 | z_2z_4 | z_2z_5 | z_3z_4 | z_3z_5 | z_4z_5 |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| z_1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| z_2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| z_3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| z_4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| z_5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| z_1z_2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| z_1z_3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| z_1z_4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| z_1z_5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z_2Z_3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Z_2Z_4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| Z_2Z_5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| Z_3Z_4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| Z_3Z_5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| Z_4Z_5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

A existência de números iguais a 1 ou -1 identifica um par de colunas correlacionadas; ou seja, cujos efeitos estão fundidos. Por exemplo, na matriz de covariâncias apresentadas acima os seguintes efeitos experimentais principais e de interações binárias estão fundidos:

- (i) $Z_1 = Z_2Z_4$; (ii) $Z_2 = Z_1Z_4$; (iii) $Z_3 = Z_4Z_5$; (iv) $Z_4 = Z_1Z_2 = Z_3Z_5$; (v) $Z_5 = Z_3Z_4$; (vi) $Z_1Z_3 = Z_2Z_5$; (vii) $Z_1Z_5 = Z_2Z_3$

Conclui-se, portanto, que no primeiro plano fatorial fracionado da Tabela 3.6 todos os efeitos principais estão fundidos com um ou mais dos efeitos de interação binária. Conclui-se ainda que nesse mesmo plano nenhuma das interações binárias pode ser estimada de forma completamente independente dos demais efeitos principais ou de interação binária, comprometendo a eventual necessidade de identificar não linearidades do plano experimental. Apesar disso, duas interações binárias (apesar de fundidas a outras) podem ser adicionadas ao modelo na forma:

$$y = \alpha_0 + \sum_{i=1}^5 \alpha_i z_i + \beta_{13} z_1 z_3 + \beta_{15} z_1 z_5$$

Caso o analista antevê a necessidade de estimar alguns dos demais efeitos, outro plano experimental deverá ser realizado. É conveniente também perceber que, como duas interações binárias não estão fundidas aos efeitos principais, é possível expandir o plano experimental fatorial fracionado para até sete variáveis, com oito experimentos, na forma mostrada na Tabela 3.10. Nesse caso, no entanto, nenhum dos efeitos de interação binária poderá ser estimado e todos os efeitos principais estarão fundidos a algum tipo de não linearidade, o que reduz sobremaneira a capacidade do plano experimental discriminar eventuais efeitos não lineares existentes. Além disso, se os efeitos não lineares de fato existirem, o analista concluirá erroneamente que algum efeito principal é responsável pela variação observada experimentalmente. O risco de erro de interpretação é grande e apenas o analista pode resolver se está disposto a correr esse risco e se essa decisão pode eventualmente comprometer a qualidade da análise realizada.

$$y = \alpha_0 + \sum_{i=1}^7 \alpha_i z_i$$

Tabela 3.10- Planos fatorial fracionado para $NX = 7$ variáveis a dois níveis, com réplicas no ponto central, construídos a partir de um plano fatorial completo para três variáveis por fusão de efeitos principais com interações de segunda (Z_1Z_2, Z_1Z_3) e terceira ordem ($Z_1Z_2Z_3$).

| Experimento | Z_1 | Z_2 | Z_3 | $Z_4 = Z_1Z_2$ | $Z_5 = Z_1Z_2Z_3$ | $Z_6 = Z_1Z_3$ | $Z_7 = Z_1Z_5$ |
|-------------|-------|-------|-------|----------------|-------------------|----------------|----------------|
| 1 | -1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 |
| 2 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 |

| | | | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|----|----|
| 3 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 |
| 4 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | +1 |
| 5 | +1 | -1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 |
| 6 | +1 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 |
| 7 | +1 | +1 | -1 | +1 | -1 | -1 | -1 |
| 8 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Uma pergunta que pode ser feita pelo leitor mais atento diz respeito ao número máximo de vezes que um plano experimental fatorial pode ser fracionado, resultando no **plano fatorial fracionado mínimo**. Ou, de forma análoga, diz respeito ao menor tamanho que o plano experimental pode ter, depois de serem feitos seguidos fracionamentos do plano experimental fatorial completo original. A resposta para essa questão pode ser apresentada de duas formas diferentes – uma forma construtiva e uma forma analítica.

Na forma construtiva, é fácil perceber que o processo de fracionamento não pode continuar quando se atinge um número de experimentos inferior ao número de efeitos principais somada a uma unidade (relativa ao termo independente da Equação 3.6). Em outras palavras, o plano fatorial completo construído para três variáveis tem $2^3 = 8$ experimentos (ver Tabela 3.1). Depois de fracionado a primeira vez, o número de experimentos resultantes é igual a $2^{3-1} = 4$ (ver Tabela 3.2). Somada à condição central, obtêm-se cinco condições experimentais para a estimação de quatro efeitos principais. A divisão adicional do plano resultaria em $2^{3-2} = 2$ experimentos, tornando impossível a identificação dos efeitos principais e a análise estatística do modelo. (Quando três níveis são usados, a representação numérica mínima não é tão simples porque os diferentes blocos ortogonais têm em geral tamanhos diferentes.)

Por conveniência de representação, convencionou-se representar um plano fatorial fracionado na forma NL^{NX-NF} , onde NL é o número de níveis do plano, NX é o número de variáveis analisadas e NF é o número de vezes que o plano fatorial completo foi fracionado. Assim, o plano 2^{5-2} é o plano experimental fatorial fracionado a dois níveis, para cinco variáveis, obtido após o fracionamento do plano fatorial completo duas vezes. De forma similar, o plano $3^{4-1}2^{3-1}$ representa um plano feito para sete variáveis, sendo quatro representadas a três níveis e duas representadas a dois níveis, sendo que a fração a três níveis foi fracionada uma vez e a fração a dois níveis também foi fracionada uma vez. No caso do plano fatorial fracionado a dois níveis, o número de experimentos coincide com a própria representação do plano (a menos das réplicas realizadas no ponto central); ou seja

$$NE = 2^{NX-NF} \quad (3.7)$$

Portanto, o número mínimo de experimentos que pode constituir o plano fatorial fracionado é a potência de 2 imediatamente superior ao número de efeitos principais (igual ao número de variáveis NX) do problema. Em termos matemáticos

$$NE_{\min} = 2^{NX-NF_{\max}} > NX \quad (3.8)$$

onde NF_{\max} é o maior número possível de fracionamentos admissíveis do plano fatorial completo construído para NX variáveis. A Equação (3.8) pode ser reescrita na forma

$$(NX - NF_{\max}) \ln(2) > \ln(NX) \rightarrow NF_{\max} < \frac{NX \ln(2) - \ln(NX)}{\ln(2)} \quad (3.9)$$

Exemplo 3.6- Um plano experimental fatorial completo para dez variáveis contém

$$NE = 2^{10} = 1024$$

condições experimentais (além das réplicas no ponto central). No entanto, o plano pode ser fracionado, para conduzir a conjuntos experimentais menores (embora devam ser analisadas também as fusões de efeitos experimentais e a redução da qualidade dos parâmetros). Para que se saiba o número máximo de vezes que o plano original pode ser fracionado e ainda assim permitir a estimação dos dez efeitos principais de forma independente, deve-se calcular o valor

$$NF_{\max} < \frac{10 \ln(2) - \ln(10)}{\ln(2)} = 6.67$$

Portanto, o plano fatorial completo a dois níveis para 10 variáveis pode ser fracionado até seis vezes, resultando no **plano fatorial fracionado mínimo** 2^{10-6} , que contém 16 experimentos (além das réplicas no ponto central) para análise de 10 variáveis. Trata-se de uma redução de carga experimental fantástica, equivalente a uma redução superior a 98% do esforço experimental original. Esse plano, por conter 16 experimentos, pode ser construído a partir de um plano fatorial completo a dois níveis para quatro variáveis, adicionando-se colunas de variáveis com a confusão de efeitos de ordem superior, como realizado no Exemplo 3.5. Apesar disso, sabe-se que muitos dos efeitos de ordem superior estarão fundidos aos efeitos principais e de interação binária, o que deve ser cuidadosamente avaliado pelo analista antes de aprovar o plano final.

Uma segunda resposta muito elegante para a questão proposta a respeito do menor conjunto ortogonal de experimentos que pode ser obtido a partir de um plano fatorial completo foi apresentada por Plackett e Burman (1946).¹ Os autores se propuseram a encontrar os arranjos ortogonais entre $(NE-1)$ vetores cujos (NE) elementos só podem ser iguais a -1 ou +1. Para tanto, os autores propuseram uma técnica que permite encontrar soluções sempre que o número NE de componentes (ou seja, NE condições experimentais) é igual a um múltiplo de quatro, quando o número de níveis é igual a dois. A apresentação detalhada da técnica proposta por Plackett e Burman extrapola os interesses desse texto, porque os autores mostraram que as soluções procuradas podem ser obtidas por intermédio de uma operação simples de rotação dos vetores de condições experimentais, chamado aqui de vetor gerador. (Os **vetores geradores de Plackett-Burman** para alguns casos particulares são apresentados no Apêndice B.) Assim, apesar do número de condições experimentais dos planos fatoriais fracionados mínimos a dois níveis serem sempre iguais a uma potência de 2 ($NE_{\min} = 4, 8, 16, 32, 64, \dots$) para até $(NX = 3, 7, 15, 31, 63, \dots)$ variáveis, Plackett e Burman mostraram que existem outros arranjos ortogonais a dois níveis contendo ($NE_{\min} = 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, \dots$) para até $(NX = 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43, 47, 51, 55, 59, 63, \dots)$ variáveis. Os arranjos de Plackett-Burman foram também estendidos para outras combinações de níveis. O problema, no entanto, é que nenhuma das interações binárias existentes entre as

¹ R.L. Plackett and J.P. Burman, "The Design of Optimum Multifactorial Experiments", *Biometrika*, **33**, 305-325, 1946.

variáveis do problema pode ser obtida a partir dos **planejamentos fatoriais mínimos de Plackett-Burman**, a não ser quando esses arranjos coincidem com os planos fatoriais fracionados mínimos. Sob esse ponto de vista, portanto, a utilidade e flexibilidade dos planos de Plackett-Burman são bastante inferiores àquelas dos planos fatoriais fracionados mínimos. Para aplicar a técnica desenvolvida por esses autores e obter o plano fatorial mínimo de Plackett-Burman, deve-se aplicar o Algoritmo 3.1, descrito a seguir.

Algoritmo 3.1- Plano Fatorial Mínimo de Plackett-Burman.

Comentário: Identificação do número de experimentos.

1. Se o número de níveis do plano experimental for igual a dois, identifique o múltiplo de quatro imediatamente superior ao número de variáveis do problema. Esse é o número de experimentos NE do plano experimental. Caso contrário, identifique na Tabela B.2 do Apêndice B o número de experimentos imediatamente superior ao número de variáveis do problema.

Comentário: Seleção do vetor gerador.

2. Escolha nas Tabelas B.1 (para planos com dois níveis) ou B.2 (para planos com três ou cinco níveis) o vetor gerador correspondente.

Comentário: Gerando as condições experimentais.

3. Coloque o vetor gerador na posição vertical, na primeira coluna e faça $i = 1$. i identifica a variável.

Comentário: Loop de geração de variáveis

4. Enquanto $i < NX$, faça:
 5. $i = i + 1$
 6. Na posição j da coluna i copie o valor $j+1$ da coluna $i-1$;
 7. Na última posição da coluna i copie o primeiro valor da coluna $i-1$;
 8. Volte ao item 4.

Comentário: Finalização.

9. Adicione uma linha de valores iguais a -1 no final de todas as colunas.
10. Adicione uma linha de valores iguais a 0 no final de todas as colunas.

Comentário: As colunas representam as variáveis e as linhas representam as condições experimentais.

Exemplo 3.7- Suponha que um experimentador pretende analisar o efeito de dez variáveis independentes sobre uma resposta experimental. Por exemplo, pode-se desejar conhecer os efeitos que a temperatura (x_1), a pressão (x_2), a massa de catalisador sólido (x_3), a velocidade de agitação (x_4), o diâmetro da partícula sólida de catalisador (x_5), o tempo de reação (x_6), as concentrações de dois reagentes na carga inicial (x_7 e x_8) e as concentrações de dois aditivos usados para controlar a viscosidade do meio reacional (x_9 e x_{10}) exercem sobre a quantidade final de produto obtido. Para tanto, será usado o plano mínimo de Plackett-Burman, para reduzir ao mínimo a carga experimental do trabalho.

Admitindo que serão usados dois níveis, de acordo com o Algoritmo 3.1, o múltiplo de 4 imediatamente superior a $NX=10$ é $NE=12$. De acordo com a Tabela B.1, o vetor gerador escolhido então deve ser $(+1,+1,-1,+1,+1,+1,-1,-1,-1,+1,-1)$. De acordo com os passos 3 a 8 do Algoritmo 3.1, obtém-se então a seguinte seqüência de valores:

$$\begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ +1 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \\ -1 & +1 \\ +1 & +1 \\ +1 & +1 \\ +1 & -1 \\ -1 & -1 \\ -1 & -1 \\ -1 & +1 \\ +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & +1 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} +1 & +1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 \end{bmatrix}$$

De acordo com os passos 9 e 10 do Algoritmo 3.1, obtém-se então a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} +1 & +1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, o plano experimental mínimo de Plackett-Burman ganha a forma:

Tabela 3.11- Plano fatorial mínimo de Plackett-Burman a dois níveis para 10 variáveis e 12 condições experimentais, além das réplicas no ponto central

| Experimento | Z ₁ | Z ₂ | Z ₃ | Z ₄ | Z ₅ | Z ₆ | Z ₇ | Z ₈ | Z ₉ | Z ₁₀ |
|-------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|
| 1 | +1 | +1 | -1 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | +1 |
| 2 | +1 | -1 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | +1 | -1 |
| 3 | -1 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 |
| 4 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 |
| 5 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 |

| | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 6 | +1 | -1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 | +1 |
| 7 | -1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 | +1 | +1 |
| 8 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 | +1 | +1 | +1 |
| 9 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 | +1 | +1 | +1 | -1 |
| 10 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 |
| 11 | -1 | +1 | +1 | -1 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 |
| 12 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Finalmente, antes de terminar essa seção, é importante enfatizar uma vez mais que os experimentos do plano experimental devem ser ordenados, pelo menos a princípio, de forma aleatória, para que seja possível filtrar efeitos externos desconhecidos e indesejados que eventualmente influenciem os resultados finais obtidos. Os efeitos deletérios da organização experimental imposta a priori foram discutidos no Exemplo 1.4 do Capítulo 1. No entanto, a seleção aleatória do ordenamento pode resultar em seqüências experimentais indesejadas quando o número de experimentos realizados é pequeno.

3.3. Planos Fatoriais Fracionados de Taguchi

Como já observado nas seções anteriores, a redução do esforço experimental por intermédio do fracionamento do plano fatorial completo pode resultar em sério prejuízo da qualidade das análises, em função da confusão de efeitos, da redução do número de parâmetros estimáveis e da redução da precisão das estimativas dos parâmetros. A fusão de efeitos, em particular, pode causar sérios desvios de interpretação, tendo em vista que a eventual existência de efeitos não lineares de interação entre as variáveis independentes pode levar o analista a concluir que o efeito observado é devido a uma outra variável, que nada tem a ver com o efeito experimental real (vide Equação 3.3). Por essa razão, o engenheiro e estatístico Genichi Taguchi, envolvido com problemas reais de controle de qualidade na indústria japonesa, desenvolveu uma série de procedimentos úteis para a construção eficiente de **planos experimentais fatoriais fracionados**, que dão ao analista controle sobre os efeitos de fusão de variáveis de forma simples.¹ Taguchi mostrou que a variação da qualidade dos produtos leva a perdas que são proporcionais à variância das propriedades relacionadas à qualidade, de maneira que as variâncias devem ser reduzidas para maximizar os ganhos de produção. Além disso, como as variâncias mudam com as condições de operação, Taguchi mostrou que é muito importante entender (modelar) como a variância depende das variáveis manipuladas pelo engenheiro, para que seja possível encontrar condições de operação onde a variância seja mínima e as perdas possam ser reduzidas. Dessa forma, a variância do processo pode ser entendida como uma variável de resposta do problema (y). A análise proposta por Taguchi ganhou o nome genérico de **planejamento robusto**, por reduzir ao máximo o efeito das variáveis do processo sobre a variabilidade da resposta.

¹ G. Taguchi, "Introduction to Quality Engineering: Designing Quality into Products and Processes", Asian Productivity Organization, Tokyo, 1986.

G. Taguchi and S. Konishi, "Taguchi Methods, Orthogonal Arrays and Linear Graphs: Tools for Quality Engineering", American Suppliers Institute, New York, 1987.

Exemplo 3.8- Suponha que uma função $L(\mathbf{x})$ descreva os lucros de uma operação, como função da condição de operação \mathbf{x} . Nesse caso, o ponto ótimo da operação é aquele que satisfaz a seguinte restrição:

$$\nabla L_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_{NX}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nas proximidades do ponto ótimo de operação, desvios operacionais da variável operacional \mathbf{x} em relação ao valor ótimo \mathbf{x}^* podem ser aproximados na forma

$$L(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}^*) + \left[\nabla L_{\mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^*} \right]^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T \mathbf{H}^* (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

onde \mathbf{H} é a matriz Hessiana de derivadas segundas calculadas no ponto ótimo da forma:

$$\mathbf{H}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_{NX}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_{NX} \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_{NX}^2} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}^*}$$

Como o vetor gradiente é identicamente nulo no ponto ótimo, a equação pode ser ainda escrita na forma

$$L(\mathbf{x}) - L(\mathbf{x}^*) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T \mathbf{H}^* (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

ou ainda

$$\Delta L(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{NX} \sum_{j=1}^{NX} H_{ij} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*)$$

Se o processo varia aleatoriamente ao redor do valor ótimo por conta das inevitáveis flutuações operacionais, a propriedade média obtida é igual ao valor nominal do projeto, mas a média da variação de lucro pode ser obtida como

$$E\{\Delta L(\mathbf{x})\} = E\left\{ \sum_{i=1}^{NX} \sum_{j=1}^{NX} H_{ij} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) \right\} = \sum_{i=1}^{NX} \sum_{j=1}^{NX} H_{ij} E\left\{ (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) \right\} = \sum_{i=1}^{NX} \sum_{j=1}^{NX} H_{ij} \sigma_{ij}^2$$

de forma que existe uma óbvia ligação entre as variações de lucro e as variâncias da operação. Os elementos H_{ij} da matriz Hessiana são chamadas de ganhos do processo. O interessante é que o valor do somatório acima é sempre negativo, porque o ponto \mathbf{x}^* é um ponto de máximo por definição (\mathbf{H} é uma matriz negativa definida, para satisfazer as condições de máximo). Portanto, as variações do processo sempre resultam em perdas financeiras. Essa conexão entre a qualidade dos dados operacionais e a economia do processo é um dos marcos fundamentais do trabalho de Taguchi. O Apêndice C apresenta um estudo que vincula os erros paramétricos e o problema de estimação de parâmetros (e, portanto, de planejamento experimental) à economia do processo.

Para conduzir os estudos de planejamento necessários para identificar como o processo responde a perturbações das condições de operação, Taguchi desenvolveu um sistema de codificação muito útil para o controle da qualidade do planejamento durante a formulação de planos fatoriais fracionados (planos de Taguchi são sempre planos fatoriais fracionados). A codificação proposta por Taguchi usa fundamentalmente duas matrizes de dados – a matriz ortogonal dos dados experimentais e a matriz das interações binárias (*alias matrix*). As matrizes dos dados experimentais são codificadas na forma $OA_{NE}(NL^{NX})$, sendo que OA representa a matriz ortogonal (*orthogonal array*), NE representa o número de experimentos do plano, NL representa o número de níveis usados no plano e NX representa o número máximo de variáveis que podem ser usadas para o planejamento com a matriz considerada. Assim, a expressão $OA_8(2^7)$ representa uma matriz ortogonal com 8 experimentos a dois níveis que pode ser usada para investigar problemas com até 7 variáveis, como mostrado na Tabela D.3 do Apêndice D e reproduzido abaixo.

Tabela 3.12– Matriz de Experimentos $OA_8(2^7)$.

| | Grupo I | Grupo II | | Grupo III | | | |
|-------------|---------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|---------------|
| | z_1 | z_2 | $z_1 z_2$ | z_3 | $z_1 z_3$ | $z_2 z_3$ | $z_1 z_2 z_3$ |
| Experimento | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) |
| 1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 |
| 2 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 |
| 3 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 |
| 4 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 |
| 5 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 |
| 6 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 |
| 7 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| 8 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 |

Na Tabela 3.12, as linhas representam as condições experimentais, enquanto as colunas numeradas representam as possíveis variáveis de um problema; como são sete colunas, até sete variáveis podem ser alocadas no plano experimental. Na segunda linha da tabela de experimentos estão mostrados os efeitos principais e as interações binárias do plano fatorial completo que gerou as colunas da tabela. Portanto, a Tabela 3.12 foi gerada a partir de um plano fatorial completo para três variáveis, como descrito nas colunas (1), (2) e (4). Nesse caso, os respectivos efeitos das interações de ordem superior estão apresentados nas demais colunas. Caso o analista associe à coluna (3) da Tabela 3.12 uma variável do plano experimental, o planejamento continuará sendo ortogonal, mas o efeito principal da variável ali alocada estará

fundido ao efeito da interação binária entre as variáveis alocadas nas colunas (1) e (2). Na primeira linha da tabela está feita uma identificação de grupos de variáveis que será explicada nos próximos parágrafos.

Associada às matrizes de experimentos, pode ser definida uma matriz de interações binárias, como mostrado na Tabela D.4 do Apêndice D e reproduzido abaixo. Na posição relativa à linha i e à coluna j da Tabela 3.13, o número k representa a coluna da matriz de experimentos onde se encontra a interação binária entre a variável alocada na coluna i e a variável alocada na coluna j . Por exemplo, na linha (4) e na coluna (6) da Tabela 3.13 aparece o número (2), indicando que a interação binária existente eventualmente entre as variáveis alocadas nas colunas $i=(4)$ e $j=(6)$ da Tabela 3.12 estará fundida ao efeito alocado na coluna $k=(2)$ da Tabela 3.12. Nesse sentido, as matrizes de dados não introduzem quaisquer informações novas em relação aos pontos que já foram discutidos nas seções anteriores, mas podem ser bastante úteis para a manipulação do projeto experimental, como visto no Exemplo 3.9.

Tabela 3.13 – Matriz de Interações Binárias $OA_8(2^7)$.

| Colunas | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) |
|---------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| (1) | | | | | | | |
| (2) | | | | | | | |
| (3) | | | | | | | |
| (4) | | | | | | | |
| (5) | | | | | | | |
| (6) | | | | | | | |
| (7) | | | | | | | |

Exemplo 3.9- Suponha que um analista pretende formular um plano experimental fatorial fracionado a dois níveis para quatro variáveis. Nesse caso, o plano fatorial fracionado mínimo conterá um número de experimentos igual a $NE=8$, dado que essa é a potência de dois imediatamente superior a quatro. Para executar o plano experimental, o analista utilizará os procedimentos propostos por Taguchi. Por isso, o plano experimental que deverá servir como referência é o plano $OA_8(2^7)$ (8 experimentos e dois níveis, que pode ser usado para até sete variáveis), como mostrado nas Tabelas 3.12 e 3.13 (análogas às Tabelas D.3 e D.4 do Apêndice D).

Para formular o plano, o analista aloca inicialmente as variáveis z_1 , z_2 e z_3 nas colunas (1), (2) e (3) da Tabela 3.12, que são as colunas independentes geradas pelo plano fatorial completo original. Essa etapa está ilustrada abaixo na forma:

| Experimento | z_1 | z_2 | $z_1 z_2$ | z_3 | $z_1 z_3$ | $z_2 z_3$ | $z_1 z_2 z_3$ |
|-------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|---------------|
| | $z_1=(1)$ | $z_2=(2)$ | (3) | $z_3=(4)$ | (5) | (6) | (7) |
| 1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 |
| 2 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 |
| 3 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 |
| 4 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 |
| 5 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 |
| 6 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 |
| 7 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 |

| | | | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|----|----|
| 8 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 |
|---|----|----|----|----|----|----|----|

Para fazer a alocação da quarta variável, o analista **admite** que as interações de ordem superior se tornem menos prováveis, à medida que a ordem da interação aumenta. Por isso, o projetista resolve sacrificar a interação de terceira ordem, alocada na coluna (7) da Tabela 3.12, resultando em:

| | z_1 | z_2 | $z_1 z_2$ | z_3 | $z_1 z_3$ | $z_2 z_3$ | $z_1 z_2 z_3$ |
|-------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|---------------|
| Experimento | $z_1=(1)$ | $z_2=(2)$ | (3) | $z_3=(4)$ | (5) | (6) | $z_4=(7)$ |
| 1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 |
| 2 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 |
| 3 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 |
| 4 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 |
| 5 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 |
| 6 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 |
| 7 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| 8 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 |

que é equivalente ao plano experimental meio-fatorial 2^{4-1} para quatro variáveis na forma:

| Experimento | $z_1=(1)$ | $z_2=(2)$ | $z_3=(4)$ | $z_4=(7)$ |
|-------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| 2 | -1 | -1 | +1 | +1 |
| 3 | -1 | +1 | -1 | +1 |
| 4 | -1 | +1 | +1 | -1 |
| 5 | +1 | -1 | -1 | +1 |
| 6 | +1 | -1 | +1 | -1 |
| 7 | +1 | +1 | -1 | -1 |
| 8 | +1 | +1 | +1 | +1 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 |

em que foram adicionadas as réplicas do ponto central. Segundo ainda a Tabela 3.13, as interações binárias estarão fundidas da seguinte forma:

| Colunas | $z_1=(1)$ | $z_2=(2)$ | $z_3=(4)$ | $z_4=(7)$ |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $z_1=(1)$ | | (3) | (5) | (6) |
| $z_2=(2)$ | (3) | | (6) | (5) |
| $z_3=(4)$ | (5) | (6) | | (3) |
| $z_4=(7)$ | (6) | (5) | (3) | |

que são colunas que não foram alocadas a quaisquer dos efeitos principais e, portanto, todas as interações binárias podem ser estimadas de forma independente, a despeito da redução da carga do plano experimental fatorial completo.

Exemplo 3.10- Suponha que um analista pretende formular um plano experimental fatorial fracionado a dois níveis para cinco variáveis. Nesse caso, o plano fatorial fracionado mínimo conterá um número de experimentos igual a $NE=8$, dado que essa é a potência de dois imediatamente superior a cinco. Para executar o plano experimental, o analista utilizará os procedimentos propostos por Taguchi. Por isso, o plano experimental que deverá servir como referência é o plano $OA_8(2^7)$ (8 experimentos e dois níveis, que pode ser usado para até sete variáveis), como mostrado nas Tabelas 3.12 e 3.13 (análogas às Tabelas D.3 e D.4 do Apêndice D).

Para formular o plano, o analista aloca inicialmente as variáveis z_1, z_2 e z_3 nas colunas (1), (2) e (4) da Tabela 3.12, que são as colunas independentes geradas pelo plano fatorial completo original. Essa etapa está ilustrada abaixo na forma:

| | z_1 | z_2 | $z_1 z_2$ | z_3 | $z_1 z_3$ | $z_2 z_3$ | $z_1 z_2 z_3$ |
|-------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|---------------|
| Experimento | $Z_1=(1)$ | $z_2=(2)$ | (3) | $z_3=(4)$ | (5) | (6) | (7) |
| 1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 |
| 2 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 |
| 3 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 |
| 4 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 |
| 5 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 |
| 6 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 |
| 7 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| 8 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 |

Para fazer a alocação da quarta variável, o analista **admite** que as interações de ordem superior se tornem menos prováveis, à medida que a ordem da interação aumenta. Por isso, o projetista resolve sacrificar a interação de terceira ordem, alocada na coluna (7) da Tabela 3.12, resultando em:

| | z_1 | z_2 | $z_1 z_2$ | z_3 | $z_1 z_3$ | $z_2 z_3$ | $z_1 z_2 z_3$ |
|-------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|---------------|
| Experimento | $Z_1=(1)$ | $z_2=(2)$ | (3) | $z_3=(4)$ | (5) | (6) | $z_4=(7)$ |
| 1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 |
| 2 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 |
| 3 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 |
| 4 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 |
| 5 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 |
| 6 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 |
| 7 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| 8 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 |

Para alocar a quinta variável, o analista se vê na obrigação de sacrificar uma das interações binárias restantes; caso contrário, o projetista estará obrigado necessariamente a aumentar o número de experimentos do plano e a utilizar a tabela $OA_{16}(2^{15})$ do Apêndice D. Apenas o analista pode resolver essa questão fundamental a respeito da necessidade de observar todas as interações binárias ou de aumentar a carga do plano experimental. Supomos aqui que o analista não acredite que as interações não lineares sejam de fato importantes (ou que ainda não existam elementos que justifiquem a formulação dessa hipótese). Supomos ainda

que o experimentador esteja disposto a sacrificar a interação entre as variáveis alocadas nas colunas (1) e (2) da matriz de experimentos. Nesse caso, admite-se que:

| | z_1 | z_2 | $z_1 z_2$ | z_3 | $z_1 z_3$ | $z_2 z_3$ | $z_1 z_2 z_3$ |
|-------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|---------------|
| Experimento | $z_1=(1)$ | $z_2=(2)$ | $z_3=(3)$ | $z_4=(4)$ | (5) | (6) | $z_5=(7)$ |
| 1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 |
| 2 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 |
| 3 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 |
| 4 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 |
| 5 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 |
| 6 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 |
| 7 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| 8 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 |

que é equivalente ao plano experimental meio-fatorial 2^{5-2} para cinco variáveis na forma:

| Experimento | $z_1=(1)$ | $z_2=(2)$ | $z_3=(3)$ | $z_4=(4)$ | $z_5=(7)$ |
|-------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1 | -1 | -1 | +1 | -1 | -1 |
| 2 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 |
| 3 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 |
| 4 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 |
| 5 | +1 | -1 | -1 | -1 | +1 |
| 6 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 |
| 7 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 |
| 8 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

em que foram adicionadas as réplicas do ponto central. Segundo ainda a Tabela 3.13, as interações binárias estarão fundidas da seguinte forma:

| Colunas | $z_1=(1)$ | $z_2=(2)$ | $z_3=(3)$ | $z_4=(4)$ | $z_5=(7)$ |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $z_1=(1)$ | | $z_3=(3)$ | $z_2=(2)$ | (5) | (6) |
| $z_2=(2)$ | $z_3=(3)$ | | $z_1=(1)$ | (6) | (5) |
| $z_3=(3)$ | $z_2=(2)$ | $z_1=(1)$ | | $z_5=(7)$ | $z_4=(4)$ |
| $z_4=(4)$ | (5) | (6) | $z_4=(7)$ | | $z_3=(3)$ |
| $z_5=(7)$ | (6) | (5) | $z_4=(4)$ | $z_3=(3)$ | |

de maneira que apenas as interações binárias entre as variáveis $(z_1, z_4) = (z_2, z_5)$ e $(z_1, z_5) = (z_2, z_4)$ podem ser eventualmente estimadas de forma independente. Em outras palavras, o modelo mais complexo que o analista poderá eventualmente usar para interpretar os dados experimentais obtidos será:

$$y = \alpha_0 + \sum_{i=1}^5 \alpha_i z_i + \beta_{14} z_1 z_4 + \beta_{15} z_1 z_5$$

ou

$$y = \alpha_0 + \sum_{i=1}^5 \alpha_i z_i + \beta_{14} z_1 z_4 + \beta_{24} z_2 z_4$$

ou

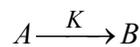
$$y = \alpha_0 + \sum_{i=1}^5 \alpha_i z_i + \beta_{25} z_2 z_5 + \beta_{15} z_1 z_5$$

ou

$$y = \alpha_0 + \sum_{i=1}^5 \alpha_i z_i + \beta_{25} z_2 z_5 + \beta_{24} z_2 z_4$$

(Como explicado no Capítulo 2, o ponto central permite ainda a identificação de um dos termos quadráticos.) Apenas o experimentador pode resolver se essas limitações são relevantes ou não para a análise proposta. Caso sejam, ele deverá reiniciar o projeto com auxílio da tabela OA₁₆(2¹⁵) do Apêndice D.

Exemplo 3.11- Suponha que no Exemplo 3.10 o analista saiba (ou desconfie) que exista uma interação não linear importante entre as variáveis z_1 e z_2 . Repare que essa observação não é desprovida de valor de jeito nenhum. Por exemplo, em problemas que envolvem reações químicas, sabe-se que existem modificações muito apreciáveis das velocidades das reações por conta das variações simultâneas de temperatura e concentração de reagente no meio reacional. Por isso, nas reações em que um reagente A se transforma em um produto B na forma



as expressões de velocidade de reação geralmente têm a forma

$$R_A = k_0 e^{-\frac{\Delta E}{RT}} C_A$$

ficando bastante claro que o experimentador pode esperar que o produto entre a temperatura (T) e a concentração de reagente (C_A) seja importante para descrever a variação da velocidade de reação (R_A). (k_0 , R e ΔE são parâmetros constantes do problema.) Portanto, se z_1 e z_2 representam respectivamente a temperatura e a concentração de reagente, parece bastante razoável que o experimentador não deseje fundir o efeito de interação não linear binária dessas duas variáveis com um outro efeito principal, pois poderia ser induzido a cometer erros importantes na análise final dos dados experimentais obtidos. Por todas essas razões, o plano experimental formulado no Exemplo 3.10 parece ser inadequado, uma vez que o efeito da interação binária entre as variáveis z_1 e z_2 , provavelmente muito importante, está fundido ao efeito principal da variável z_3 . Esse defeito do plano precisa ser removido.

Para corrigir o problema observado, o experimentador retorna ao plano OA₈(2⁷) da Tabela 3.12 para garantir que o efeito não linear desejado seja preservado e não seja fundido aos demais efeitos principais investigados. Essa etapa está ilustrada abaixo na forma:

| | z_1 | z_2 | $z_1 z_2$ | z_3 | $z_1 z_3$ | $z_2 z_3$ | $z_1 z_2 z_3$ |
|--------------------|-----------|-----------|---------------|-------|-----------|-----------|---------------|
| Experimento | $z_1=(1)$ | $z_2=(2)$ | $z_1 z_2=(3)$ | (4) | (5) | (6) | (7) |

| | | | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 |
| 2 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 |
| 3 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 |
| 4 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 |
| 5 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 |
| 6 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 |
| 7 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| 8 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 |

No entanto, é ainda necessário alocar três variáveis adicionais no plano experimental. Para isso, será necessário alocar ao menos mais três colunas das quatro restantes às variáveis ainda remanescentes. Para alocar a terceira variável, o experimentador pensa utilizar a coluna (4), oriunda do plano fatorial completo utilizado para gerar a Tabela 3.12. Para alocar a quarta variável, o analista **admite** uma vez mais que as interações de ordem superior se tornem menos prováveis, à medida que a ordem da interação aumenta, sacrificando a interação de terceira ordem, alocada na coluna (7) da Tabela 3.12. Finalmente, para alocar a quinta e última variável o experimentador precisa sacrificar uma interação binária e escolhe arbitrariamente a coluna (5), que contém a interação entre as colunas (1) e (3), para esse fim. O procedimento estabelecido pelo experimentador resulta na seguinte estrutura:

| Experimento | z_1 | z_2 | $z_1 z_2$ | z_3 | $z_1 z_3$ | $z_2 z_3$ | $z_1 z_2 z_3$ |
|-------------|-----------|-----------|---------------|-----------|-----------|-----------|---------------|
| | $z_1=(1)$ | $z_2=(2)$ | $z_1 z_2=(3)$ | $z_3=(4)$ | $z_4=(5)$ | (6) | $z_5=(7)$ |
| 1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 |
| 2 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 |
| 3 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 |
| 4 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 |
| 5 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 |
| 6 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 |
| 7 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| 8 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 |

que é equivalente ao plano fatorial fracionado 2^{5-2} na forma

| Experimento | z_1 | z_2 | z_3 | z_4 | z_5 |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | -1 | -1 | -1 | +1 | -1 |
| 2 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 |
| 3 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 |
| 4 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 |
| 5 | +1 | -1 | -1 | -1 | +1 |
| 6 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 |
| 7 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 |
| 8 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

em que já foram incluídas as réplicas do ponto central.

De acordo com a Tabela 3.13, as interações entre os efeitos experimentais considerados relevantes estão fundidos aos efeitos principais da seguinte maneira:

| Colunas | $z_1=(1)$ | $z_2=(2)$ | $z_3=(4)$ | $z_4=(5)$ | $z_5=(7)$ |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $z_1=(1)$ | | (3) | $z_4=(5)$ | $z_3=(4)$ | (6) |
| $z_2=(2)$ | (3) | | (6) | $z_5=(7)$ | $z_4=(5)$ |
| $z_3=(4)$ | $z_4=(5)$ | (6) | | $z_1=(1)$ | (3) |
| $z_4=(5)$ | $z_3=(4)$ | $z_5=(7)$ | $z_1=(1)$ | | $z_2=(2)$ |
| $z_5=(7)$ | (6) | $z_4=(5)$ | (3) | $z_2=(2)$ | |

de maneira que apenas as interações binárias entre as variáveis $(z_1, z_2) = (z_3, z_5)$ e $(z_1, z_5) = (z_2, z_4)$ podem ser eventualmente estimadas de forma independente dos efeitos principais. Portanto, como desejado inicialmente, a capacidade de fazer a estimação do efeito não linear binário entre as variáveis z_1 e z_2 foi preservada, embora esse efeito possa estar eventualmente fundido a outros efeitos binários considerados irrelevantes pelo experimentador, como aquele existente entre as variáveis z_3 e z_5 . Em outras palavras, o modelo mais complexo que o analista poderá eventualmente usar para interpretar os dados experimentais obtidos será:

$$y = \alpha_0 + \sum_{i=1}^5 \alpha_i z_i + \beta_{12} z_1 z_2 + \beta_{15} z_1 z_5$$

ou

$$y = \alpha_0 + \sum_{i=1}^5 \alpha_i z_i + \beta_{12} z_1 z_2 + \beta_{24} z_2 z_4$$

(Como explicado no Capítulo 2, o ponto central permite ainda a identificação de um dos termos quadráticos.) Apenas o experimentador pode resolver se essas limitações são relevantes ou não para a análise proposta. Caso sejam, ele deverá reiniciar o projeto com auxílio da tabela $OA_{16}(2^{15})$ do Apêndice D.

Exemplo 3.12- Suponha que no Exemplo 3.11 o analista deseje também preservar a interação não linear entre as variáveis z_4 e z_5 . Como já discutido, essa necessidade pode decorrer de conhecimento prévio do experimentador sobre o comportamento do sistema investigado. No caso considerado, o plano experimental formulado no Exemplo 3.11 deve ser considerado inadequado, uma vez que o efeito da interação binária entre as variáveis z_4 e z_5 está fundido ao efeito principal da variável z_2 . Esse defeito do plano precisa ser removido.

Para corrigir o problema observado, o experimentador retorna ao plano $OA_8(2^7)$ da Tabela 3.12 para garantir que o efeito não linear desejado seja preservado e não seja fundido aos demais efeitos principais investigados. Parte-se da condição inicialmente estabelecida a respeito da necessidade de preservar a interação linear entre as variáveis z_1 e z_2 .

| | z_1 | z_2 | $z_1 z_2$ | z_3 | $z_1 z_3$ | $z_2 z_3$ | $z_1 z_2 z_3$ |
|-------------|-----------|-----------|---------------|-------|-----------|-----------|---------------|
| Experimento | $z_1=(1)$ | $z_2=(2)$ | $z_1 z_2=(3)$ | (4) | (5) | (6) | (7) |
| 1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 |
| 2 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 |
| 3 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 |
| 4 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 |
| 5 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 |

| | | | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|----|----|
| 6 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 |
| 7 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| 8 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 |

No entanto, é ainda necessário alocar três variáveis adicionais no plano experimental, de maneira a preservar a interação não linear existente entre duas delas. Para isso, será necessário alocar ao menos mais quatro colunas das quatro restantes aos efeitos remanescentes que devem ser estimados. Para isso e para tornar mais fácil a disposição dos efeitos de interação binária, o experimentador pensa em começar pelas variáveis z_4 e z_5 , antes de z_3 . Isso não constitui qualquer problema, pois a alocação das variáveis em quaisquer das colunas não compromete a ortogonalidade do plano experimental.

Baseado no exposto, o experimentador utiliza a coluna (4), oriunda do plano fatorial completo utilizado para gerar a Tabela 3.12, para alocar a variável z_4 . O analista admite uma vez mais que as interações de ordem superior se tornem menos prováveis, à medida que a ordem da interação aumenta, sacrificando a interação de terceira ordem e alocando a variável z_5 na coluna (7) da Tabela 3.12. No entanto, de acordo com a Tabela 3.13, a interação binária entre as colunas $z_4=(4)$ e $z_5=(7)$ da Tabela 3.12 estão fundidas à coluna $z_1z_2=(3)$, que deve ser preservada para tornar possível a estimação da interação entre as variáveis z_1 e z_2 . Portanto, a escolha inicial não pode ser aceita e o experimentador é obrigado a reiniciar a análise.

O experimentador retorna uma vez mais ao plano $OA_8(2^7)$ da Tabela 3.12 para garantir que o efeito não linear desejado seja preservado e não seja fundido aos demais efeitos principais investigados. Contudo, uma observação mais detalhada da Tabela 3.13 mostra que todas as interações binárias entre as colunas (4), (5), (6) e (7) da Tabela 3.12 estão fundidas às colunas (1), (2) e (3), que precisam ser preservadas por conta das restrições impostas pelo próprio experimentador. Em outras palavras, não existe a solução procurada pelo pesquisador de preservar a capacidade de estimar os efeitos principais de cinco variáveis e os efeitos de interação de dois pares distintos de variáveis no âmbito de um plano fatorial fracionado com oito experimentos a dois níveis. Portanto, resta apenas ao experimentador a opção de decidir abandonar uma de suas necessidades ou de reiniciar o projeto com carga maior de experimentos, com auxílio da tabela $OA_{16}(2^{15})$ do Apêndice D. Apenas o experimentador pode decidir o que lhe parece mais apropriado – trabalhar mais ou obter menos informação. No caso de decidir trabalhar mais, a solução pode ser obtida facilmente no plano $OA_{16}(2^{15})$. Para tanto, utilizam-se as quatro colunas do plano fatorial completo que deu origem à tabela e a coluna relacionada à interação de mais alta ordem para acomodar as cinco variáveis de trabalho. Nesse caso particular, a capacidade de estimar todas as interações binárias de forma independente é preservada, embora a um maior custo.

Os Exemplos 3.9-12 mostram que o planejamento experimental definido depende muito da interpretação que o analista propõe para os resultados. A proposição de planos experimentais impõe ao experimentador o desafio de fazer hipóteses sobre o comportamento do sistema estudado. Quanto maior a quantidade de informação disponível, mais bem formulado será o planejamento proposto. Quanto melhores forem as hipóteses formuladas, mais significativos e fidedignos serão os resultados obtidos. Isso exige a **interação** do planejador com o plano formulado, não parecendo ser adequado que o analista do problema recorra de forma automática ao uso de tabelas de planos experimentais sem que compreenda as hipóteses subjacentes àquela tabela particular utilizada. Da mesma forma, por depender da formulação de

hipóteses, frequentemente o experimentador falha e os resultados obtidos não são tão bons como esperado. Nesse caso, o experimentador precisa retornar ao problema e refazer o plano experimental, para adequá-lo a uma nova visão do problema. Por isso, a atividade de investigação experimental pode requerer a realização de planos diversos, que se sucedem à medida que muda a visão que o pesquisador tem sobre o problema. Em outras palavras, **a atividade de planejamento experimental é interativa e iterativa** e o experimentador não deveria se sentir frustrado após a condução do primeiro conjunto de experimentos, se os resultados obtidos negarem as hipóteses formuladas inicialmente. Na verdade, a negação das hipóteses iniciais não denota a falha do experimento; muito pelo contrário, ela mostra ao experimentador que ele não compreendia muito bem o problema investigado. Não existe plano experimental ruim – existe, isso sim, conjunto ruim de hipóteses e interpretação equivocada da realidade experimental. Nesse contexto, a utilização de planos fatoriais fracionados pode ser muito conveniente, porque permite de forma organizada que conjuntos adicionais de experimentos possam ser acomodados ao plano experimental, mantendo ainda a capacidade de observar de forma independente os efeitos considerados. Por exemplo, as Tabelas 3.6 e 3.7 mostram que conjuntos ortogonais de experimentos podem ser realizados em seqüência, até que os resultados sejam suficientemente precisos e satisfatórios para o experimentador. De forma similar, o plano $OA_4(2^3)$ está contido no plano $OA_8(2^7)$, que por sua vez está contido no plano $OA_{16}(2^{15})$, e assim sucessivamente, de maneira que os planos experimentais podem crescer aos poucos, com a adição gradual de blocos meio-fatoriais fracionados.

Finalmente, antes de terminar essa seção, cabe perguntar uma vez mais em que ordem os experimentos do plano experimental devem ser ordenados. A resposta padrão, como observado no Exemplo 1.4 do Capítulo 1, é ordenar os experimentos de forma aleatória, para que seja possível filtrar efeitos externos desconhecidos e indesejados que eventualmente influenciem os resultados finais obtidos. Apesar disso, e por ter a formação de engenharia, incomodava o engenheiro Taguchi que certas variáveis tivessem que ser perturbadas com freqüência durante a experimentação. Por exemplo, suponha que uma das variáveis investigadas seja o diâmetro de um misturador em um vaso de 100 m³. A modificação do diâmetro do agitador de um vaso como esse obriga que a produção industrial seja interrompida e que a unidade fabril seja desmontada, com auxílio de muitas máquinas pesadas e muitos operários, para a troca do agitador (que certamente deve pesar algumas toneladas). A troca do agitador, portanto, resulta em uma atividade muito custosa tanto em termos financeiros quanto em termos de tempo; por isso, essa atividade deve ser executada o menor número de vezes possível, o que não combina com uma seqüência aleatória.

Raciocínio similar ao proposto no parágrafo anterior pode ser empregado em um grande número de problemas e a um grande número de variáveis. Por exemplo, a troca de temperaturas em equipamentos de grande porte exige operação muito demorada, por causa da capacitância térmica elevada dos equipamentos e necessidade de estabilização da operação em novos níveis operacionais. A troca de catalisadores em reatores tubulares exige também a interrupção da operação e a desmontagem do reator, para remoção do leito catalítico anterior e preenchimento do reator com o novo material. A mudança da composição de alimentação em processos químicos pode exigir a preparação de grandes quantidades de material e a execução de uma longa série de operações de alinhamento de vasos e linhas de alimentação. Por outro lado, certas variáveis são facilmente manipuladas, como vazões, usualmente dependentes do simples abrir e fechar de uma válvula. Portanto, parece óbvio que as diferentes variáveis investigadas impõem graus de dificuldade de manipulação diferentes nos problemas reais. Por isso, Taguchi reconheceu explicitamente nas tabelas de planejamento que as diferentes variáveis impõem

graus de dificuldade de manipulação distintos, organizando-as em diferentes grupos, como descrito na primeira linha da Tabela 3.12.

Taguchi propôs originalmente que em problemas de grande porte ou experimentalmente demandantes as variáveis fossem organizadas em ordem decrescente de dificuldade de manipulação, de maneira que x_1 deve ser sempre a variável mais difícil de manipular e x_{NX} deve ser sempre a variável mais facilmente manipulável no conjunto de NX variáveis investigadas. Dessa forma, torna-se possível organizar os experimentos de forma a reduzir o esforço experimental associado à modificação das condições de experimentação. Para isso, no entanto, é necessário que as variáveis x_i e x_j , alocadas nas colunas n e m da matriz de experimentos respectivamente, respeitem a seguinte relação:

$$i > j \rightarrow n > m$$

ou seja, a variável x_2 não deve ser alocada numa coluna n anterior à coluna m onde está alocada a variável x_1 .

Nas tabelas apresentadas no Apêndice D e de acordo com o procedimento de planejamento experimental proposto por Taguchi, os experimentos devem ser realizados na ordem exata em que aparecem nas tabelas, com o objetivo de minimizar o custo e o esforço experimentais. Cada grupo descrito no topo dessas tabelas abarca um conjunto de variáveis cujos níveis são trocados número semelhante de vezes. Assim, as variáveis contidas no Grupo I da Tabela 3.12, a mais difícil de ser manipulada experimentalmente, é trocada apenas uma vez ao longo da execução do plano experimental, enquanto as variáveis associadas ao Grupo III da Tabela 3.12 são trocadas em de 4 a 7 vezes ao longo do plano experimental.

Exemplo 3.13- No Exemplo 3.7 discutiu-se um problema em que um experimentador pretendia analisar o efeito de dez variáveis independentes sobre uma resposta experimental. Desejava-se conhecer os efeitos que a temperatura (x_1), a pressão (x_2), a massa de catalisador sólido (x_3), a velocidade de agitação (x_4), o diâmetro da partícula sólida de catalisador (x_5), o tempo de reação (x_6), as concentrações de dois reagentes na carga inicial (x_7 e x_8) e as concentrações de dois aditivos usados para controlar a viscosidade do meio reacional (x_9 e x_{10}) exerciam sobre a quantidade final de um produto obtido.

De acordo com a proposta de ordenamento das variáveis em função do grau decrescente de dificuldade de manipulação, como sugerido por Taguchi, apresentam-se a seguir alguns detalhes que podem subsidiar o ordenamento proposto. Supondo que o produto é feito em um vaso agitado e de forma contínua, pode-se considerar que algumas variáveis são facilmente manipuladas. Por exemplo, a velocidade de agitação pode ser modificada por intermédio da manipulação de um simples botão de velocidade. O tempo de reação pode ser manipulado simplesmente aguardando-se mais ou menos tempo pelo momento de interromper o processo (ou tomar uma amostra ou alíquota). Por isso, propõe-se o reordenamento dessas variáveis como velocidade de agitação (x_9) e tempo de reação (x_{10}). Várias variáveis podem ser associadas às condições de alimentação da carga, normalmente controladas por válvulas de alimentação que podem ser abertas ou fechadas com facilidade. No entanto, podem ser consideradas mais difícilmente manipuláveis que a velocidade de agitação e o tempo de reação porque requerem a estabilização da operação da unidade. Por isso, propõe-se o reordenamento dessas variáveis como concentrações de dois reagentes na carga inicial (x_7 e x_8) e concentrações de dois aditivos usados para controlar a viscosidade do meio reacional (x_5 e x_6).

Numa operação contínua, a modificação dos níveis de temperatura e pressão normalmente deve ser conduzida lentamente e impõe a realização de uma série de testes de segurança. Por isso, propõe-se o ordenamento dessas variáveis como temperatura (x_3) e pressão (x_4). Finalmente, a troca do tipo e quantidade de sólido (catalisador) pode exigir a interrupção da operação e abertura do vaso reacional. Além disso, a produção de material catalítico diferenciado e com outra granulometria pode exigir procedimentos adicionais de síntese no laboratório. Por isso, propõe-se o reordenamento dessas variáveis como diâmetro da partícula sólida de catalisador (x_1) e massa de catalisador sólido (x_2).

Cai assim por terra o último pilar fundamental ainda preservado do Algoritmo 1.1 proposto no Capítulo 1 para descrever o planejamento estatístico ideal – o ordenamento aleatório dos experimentos pode e deve ser evitado quando o custo da experimentação for significativamente influenciado pela frequência de manipulação das variáveis independentes do projeto. O Exemplo 1.4 do Capítulo 1 mostra, no entanto, as conseqüências adversas que podem resultar dessa escolha. Apenas o experimentador pode decidir se a redução dos custos de experimentação pode compensar os riscos de interpretação equivocada dos dados, resultante do efeito de fatores externos não controlados sobre uma seqüência ordenada de experimentos. Se o experimentador admitir que controla muito bem todos os fatores experimentais, obviamente que se expõe pouco a esses riscos impostos por fatores externos à análise; contudo, como os fatores externos são usualmente pouco conhecidos, essa hipótese é muitas vezes excessivamente otimista. A mudança das condições ambientais, as variações dos graus de pureza das matérias-primas, as mudanças de qualidade dos insumos de processo, dentre muitos outros fatores, ameaçam frequentemente a qualidade das conclusões obtidas em planos ordenados de forma determinística. Cabe ao pesquisador decidir qual é o melhor caminho a tomar, levando em conta a realidade do seu problema particular e das condições de experimentação.

3.4. Planos Experimentais em Blocos

Muitas vezes o experimentador não está interessado em investigar detalhadamente o efeito que uma certa variável exerce sobre as respostas obtidas, mas apenas identificar se a variável afeta ou não o desempenho do sistema. Por exemplo, numa investigação sobre o crescimento microbiano pode-se ter a curiosidade de saber se há necessidade ou não de adicionar microelementos (sais minerais e vitaminas) a um meio de fermentação. Se o experimentador não tem interesse específico em quantificar a importância que a concentração de cada um dos compostos exerce sobre o crescimento microbiano, cria-se um cenário de investigação em que existe uma variável discreta que designa a adição ou não dos microelementos no caldo de fermentação. Nessa condição, podem ser propostos dois conjuntos de experimentos, a serem realizados na ausência e presença dos microelementos, e construídos dois modelos distintos para os dois conjuntos de condições investigadas. A comparação entre os resultados obtidos para os dois conjuntos permite responder se a presença dos microelementos afeta ou não o crescimento microbiano, sem, no entanto, ser possível quantificar exatamente qual é o efeito existente. Diz-se, nesse caso, que o plano experimental foi formulado em **blocos**; ou seja, que foram formulados e combinados planos experimentais diferentes, para testar o efeito qualitativo de um conjunto adicional de **variáveis de blocagem**. No caso particular analisado, a variável de blocagem investigada é o possível efeito que os microelementos exercem sobre o andamento do processo fermentativo.

Exemplo 3.14- Deseja-se investigar o efeito qualitativo que a presença de microelementos no caldo fermentativo exerce sobre um processo de fermentação do açúcar e produção do etanol. Além dessa variável, deseja-se investigar ainda o efeito quantitativo que três outras variáveis exercem sobre o processo: a concentração do açúcar, o pH do meio e a temperatura do processo. Para formulação do plano experimental deve ser usada a metodologia proposta por Taguchi. A princípio, o experimentador descarta a necessidade de estimar efeitos de interação não linear entre as variáveis de planejamento.

Seguindo a metodologia descrita na seção anterior, as variáveis são inicialmente ordenadas em ordem decrescente de dificuldade de manipulação. Como os experimentos são realizados em um banho térmico que comporta vários reatores ao mesmo tempo, é conveniente realizar vários testes experimentais na mesma temperatura simultaneamente. Por isso, a temperatura pode ser considerada como a variável mais difícil de manipular (x_1). As demais variáveis podem ser manipuladas durante a preparação do caldo de fermentação e apresentam dificuldade similar de manipulação. Por isso, a concentração de açúcar é considerada como a variável x_2 e o pH é a variável x_3 . Como a potência de 2 imediatamente superior ao número de variáveis ($NX=3$) é igual a 4, faz-se uso da tabela de Taguchi $OA_4(2^3)$. Como não é necessário preservar a capacidade de estimar qualquer efeito não linear eventualmente existente, as variáveis podem ser ordenadas diretamente nas colunas na forma

| Experimento | $z_1=(1)$ | $z_2=(2)$ | $z_3=(3)$ | NR |
|-------------|-----------|-----------|-----------|----|
| 1 | -1 | -1 | +1 | 1 |
| 2 | -1 | +1 | -1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| 4 | +1 | -1 | -1 | 1 |
| 5 | +1 | +1 | +1 | 1 |

em que o ponto central foi inserido para avaliação da variabilidade experimental. O ponto central foi inserido no meio do experimento com a suposição de que o aumento da temperatura pode ser feito de forma mais adequada na unidade se forem minimizadas as mudanças entre os diferentes níveis. Como o plano experimental deve conter dois blocos, já que o efeito da adição de microelementos precisa ser avaliado qualitativamente, o plano experimental pode ser construído por intermédio da combinação dos dois conjuntos experimentais propostos na forma

| Bloco | Experimento | $z_1=(1)$ | $z_2=(2)$ | $z_3=(3)$ | NR |
|-------------|-------------|-----------|-----------|-----------|----|
| I (SEM) | 1 | -1 | -1 | +1 | 1 |
| | 2 | -1 | +1 | -1 | 1 |
| | 3 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| | 4 | +1 | -1 | -1 | 1 |
| | 5 | +1 | +1 | +1 | 1 |
| II (COM) | 1 | -1 | -1 | +1 | 1 |
| | 2 | -1 | +1 | -1 | 1 |
| | 3 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| | 4 | +1 | -1 | -1 | 1 |
| | 5 | +1 | +1 | +1 | 1 |

resultando no plano final

| Experimento | Bloco | $z_1=(1)$ | $z_2=(2)$ | $z_3=(3)$ | NR |
|-------------|----------|-----------|-----------|-----------|----|
| 1 | I (SEM) | -1 | -1 | +1 | 1 |
| 2 | I (SEM) | -1 | +1 | -1 | 1 |
| 3 | II (COM) | -1 | -1 | +1 | 1 |
| 4 | II (COM) | -1 | +1 | -1 | 1 |
| 5 | I (SEM) | 0 | 0 | 0 | 3 |
| 6 | II (COM) | 0 | 0 | 0 | 3 |
| 7 | I (SEM) | +1 | -1 | -1 | 1 |
| 8 | I (SEM) | +1 | +1 | +1 | 1 |
| 9 | II (COM) | +1 | -1 | -1 | 1 |
| 10 | II (COM) | +1 | +1 | +1 | 1 |

ordenado deterministicamente para preservar a restrição imposta à manipulação das temperaturas de experimentação. Para cada um dos blocos é possível formular o modelo

$$y^{(i)} = \alpha_0^{(i)} + \sum_{j=1}^3 \alpha_j^{(i)} z_j + \beta^{(i)} z_1^2$$

em que o sobrescrito (*i*) indica o bloco de dados avaliado (I ou II). O efeito da adição dos microelementos no caldo fermentativo sobre a produção de etanol pode ser analisado com ajuda dos parâmetros estimados para os dois blocos distintos de experimentação. Caso os parâmetros sejam estatisticamente equivalentes, conclui-se que a adição de microelementos é pouco importante e desnecessária; caso contrário, conclui-se o oposto.

Caso o experimentador associe ao Bloco uma variável experimental fictícia x_4 , que pode assumir o valor -1 no Bloco I e o valor +1 no Bloco II, o plano experimental poderia também ser proposto na forma

| Experimento | z_4 (Bloco) | $z_1=(1)$ | $z_2=(2)$ | $Z_3=(3)$ | NR |
|-------------|---------------|-----------|-----------|-----------|----|
| 1 | -1 | -1 | -1 | +1 | 1 |
| 2 | -1 | -1 | +1 | -1 | 1 |
| 3 | +1 | -1 | -1 | +1 | 1 |
| 4 | +1 | -1 | +1 | -1 | 1 |
| 5 | -1 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| 6 | +1 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| 7 | -1 | +1 | -1 | -1 | 1 |
| 8 | -1 | +1 | +1 | +1 | 1 |
| 9 | +1 | +1 | -1 | -1 | 1 |
| 10 | +1 | +1 | +1 | +1 | 1 |

sendo possível formular o seguinte modelo para análise quantitativa dos dados

$$y = (\alpha_0^{(1)} + \alpha_0^{(2)} z_4) + \sum_{j=1}^3 (\alpha_j^{(1)} + \alpha_j^{(2)} z_4) z_j + (\beta^{(1)} + \beta^{(2)} z_4) z_1^2$$

onde o sobrescrito (1) identifica o efeito médio e o sobrescrito (2) indica o efeito da variável de blocagem sobre o resultado da experimentação. O efeito da adição dos microelementos sobre a

produção de etanol pode ser analisado com ajuda dos parâmetros identificados pelo sobrescrito (2). Se esses parâmetros forem estatisticamente significativos, a variável de blocagem afeta significativamente os resultados da experimentação; caso contrário, o efeito pode ser descartado.

O leitor atento pode perceber que a existência de uma variável de blocagem é equivalente a requerer que certas interações de ordem superior sejam estimadas. Por exemplo, no modelo anterior o leitor pode identificar a existência de 10 parâmetros, sendo que três deles estão associados às interações binárias (z_4, z_1) , (z_4, z_2) e (z_4, z_3) e um deles está associado à interação de terceira ordem (z_4, z_1^2) . Por isso, pode-se esperar que a formulação de planos experimentais em blocos usualmente provoque aumento do esforço de experimentação. No caso proposto, o número final de experimentos é igual a 14 (por causa das réplicas realizadas no ponto central para caracterização da variabilidade experimental). Caso o experimentador desejasse formular o plano experimental na forma convencional, associando à variável x_4 a concentração total de microelementos presentes no meio reacional (o que pode ser bastante ineficiente, porque não considera a distribuição relativa dos microelementos adicionados ao caldo de fermentação), o plano experimental a dois níveis conduziria à tabela $OA_8(2^7)$ do Apêndice D, pois 8 é a potência de 2 imediatamente superior ao número de variáveis investigadas (nesse caso, $NX=4$). Portanto, o plano poderia ser concebido na forma

| Experimento | $z_1=(1)$ | $z_2=(2)$ | $z_3=(4)$ | $z_4=(7)$ | NR |
|-------------|-----------|-----------|-----------|-----------|----|
| 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 |
| 2 | -1 | -1 | +1 | +1 | 1 |
| 3 | -1 | +1 | -1 | +1 | 1 |
| 4 | -1 | +1 | +1 | -1 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| 6 | +1 | -1 | -1 | +1 | 1 |
| 7 | +1 | -1 | +1 | -1 | 1 |
| 8 | +1 | +1 | -1 | -1 | 1 |
| 9 | +1 | +1 | +1 | +1 | 1 |

como discutido na seção anterior. Pode-se observar prontamente que o novo plano experimental formulado contém 11 elementos, resultando na economia de três experimentos. No caso particular considerado, contudo, a economia foi obtida à custa da redução do esforço experimental no ponto central. O efeito imediato é que deixou de ser possível investigar o efeito do procedimento de blocagem sobre a variabilidade experimental, já que não é mais possível comparar as variâncias obtidas nos pontos centrais distintos dos dois blocos de análise com auxílio do teste F, como mostrado nos vários exemplos apresentados no Capítulo 2. Além disso, deve ser observado que o novo ponto central pressupõe a realização de réplicas numa condição de adição de microelementos intermediária (no ponto central de concentrações), que pode ser muito pouco representativa do que ocorre no sistema real, já que a fermentação é conduzida na presença ou ausência de microelementos e não numa condição intermediária. Para o novo conjunto de experimentos e usando a mesma técnica proposta no Exemplo 3.5 para identificação de fusão de efeitos, é possível concluir ainda que os efeitos descritos pelos parâmetros $\alpha_0^{(2)}$ e $\beta^{(2)}$ estão fundidos, como mostrado abaixo

| | | | | | | | | | |
|--|-------|-------|-------|-------|-----------|-----------|-----------|---------|-------------|
| | z_1 | z_2 | z_3 | z_4 | $z_1 z_4$ | $z_2 z_4$ | $z_3 z_4$ | z_1^2 | $z_1^2 z_4$ |
|--|-------|-------|-------|-------|-----------|-----------|-----------|---------|-------------|

| | | | | | | | | | |
|-------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z_1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| z_2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| z_3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| z_4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $z_1 z_4$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $z_2 z_4$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $z_3 z_4$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| z_1^2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $z_1^2 z_4$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

indicando que os efeitos principais associados ao processo de blocagem e à influência do processo de blocagem sobre o efeito quadrático não linear não podem ser estimados de forma independente. Logo, fica bastante claro que o procedimento de blocagem não é de forma alguma semelhante à simples inclusão de uma nova variável no planejamento. Por isso, a existência de variáveis de blocagem deve ser sempre considerada com cuidado pelo experimentador que formula o plano experimental.

3.4.1. Planejamentos Sequenciais com Blocos Ortogonais

Como analisado no Exemplo 3.14, planos experimentais fatoriais em bloco são muito utilizados para testar o efeito qualitativo que certas variáveis exercem sobre o problema experimental, sem que sejam incluídas formalmente no esquema de análise quantitativa. Uma necessidade comum, por exemplo, é identificar se os resultados obtidos dependem da região operacional onde foram obtidos. Assim, um plano poderia ser feito e executado em condições brandas (digamos, baixas temperaturas e pressões) e em condições drásticas de operação (digamos, altas temperaturas e pressões). A análise poderia então ser executada de forma similar à mostrada no exemplo anterior. As análises em bloco podem também ser úteis para estudar o efeito de variáveis dificilmente quantificáveis, como a natureza estéril ou não de um meio de fermentação, a presença ou não de contaminantes, a importância de uma operação adicional no processo, dentre muitos outros exemplos. Obviamente, várias dessas variáveis podem ser utilizadas para gerar muitos blocos distintos simultaneamente. Nesse caso, o leitor talvez ache interessante consultar a Seção 3.4.2.

Planos experimentais fatoriais em bloco podem também ser planejados e executados com o objetivo específico de reduzir o esforço experimental de análise. Deve ser observado nas Tabelas 3.6 e 3.7 que um plano fatorial completo pode conter vários blocos ortogonais menores. Por exemplo, um plano fatorial a dois níveis para 10 variáveis contém $2^{10} = 1024$ experimentos, ou $2^6 = 64$ blocos ortogonais de $2^{10-6} = 16$ experimentos. Portanto, parece tentador que seja montado um esquema de experimentação que procure identificar os efeitos de forma seqüencial, e que o número de experimentos seja aumentado paulatinamente, à medida que os efeitos experimentais vão sendo revelados. Quando se conhece pouco sobre o sistema experimental investigado, uma possível estratégia pode ser a de sempre começar com um número mínimo de experimentos, para identificar os efeitos principais mais importantes, e depois aumentar o plano experimental, para introduzir a possibilidade de identificar as não

linearidades mais plausíveis, que envolvem as variáveis consideradas como as mais importantes. Essa estratégia de experimentação é sempre factível, porque os planos fatoriais completos são formados por muitos blocos menores que permitem a identificação de parte das interações não lineares do problema, como discutido na seção anterior.

Exemplo 3.15- O efeito que sete variáveis experimentais ($x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$) exercem sobre uma variável de resposta y deve ser investigado com auxílio de planos fatoriais a dois níveis. Como o experimentador tem pouca informação prévia sobre o comportamento do sistema experimental, ele propõe que inicialmente sejam identificados apenas os efeitos lineares principais com auxílio da metodologia proposta por Taguchi. Nesse caso, como a potência de dois imediatamente superior a sete é igual a oito, a tabela de experimentos $OA_8(2^7)$ é usada como referência. O plano proposto e os resultados obtidos são apresentados abaixo.

| Experimento | $z_1=(1)$ | $z_2=(2)$ | $z_3=(3)$ | $z_4=(4)$ | $z_5=(5)$ | $z_6=(6)$ | $z_7=(7)$ | y |
|-------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------|
| 1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 | 2.1 |
| 2 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 | 2.0 |
| 3 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | 12.5 |
| 4 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 | 11.4 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8.7 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 9.1 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8.9 |
| 8 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 | 12.1 |
| 9 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | 11.7 |
| 10 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 10.0 |
| 11 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | 9.7 |

Fazendo-se a estimação dos parâmetros do modelo linear

$$y = \alpha_0 + \sum_{i=1}^7 \alpha_i z_i$$

por mínimos quadrados (admite-se que os erros experimentais são constantes), o valor final da função objetivo obtida é igual a $F_{ob}=0.083$. Como o valor esperado do χ^2 com 3 graus de liberdade e 95% de confiança deve estar no intervalo $0.21 < \chi^2 < 9.34$, conclui-se que a variância experimental é provavelmente menor do que 1. De fato, no ponto central o valor da variância de y é igual a 0.04 com dois graus de liberdade. Admitindo-se que a variância de y é constante e igual a 0.04, a estimação dos parâmetros por máxima verossimilhança leva ao valor final da função objetivo igual a 2.08, plausível e no intervalo de confiança esperado para χ^2 . Nesse caso, obtém-se o seguinte modelo

$$y = (8.93 \pm 0.02) + (1.94 \pm 0.03) z_1 + (1.96 \pm 0.03) z_2 - (2.99 \pm 0.03) z_3 - (0.24 \pm 0.03) z_4 + (0.06 \pm 0.03) z_5 - (0.11 \pm 0.03) z_6 + (0.13 \pm 0.03) z_7$$

em que os intervalos de confiança dos parâmetros estão calculados com 95% de confiança. Vê-se que aparentemente as variáveis mais importantes são x_1, x_2 e x_3 . De acordo com a matriz de interações binárias, no entanto, as interações z_1z_2, z_1z_3 e z_2z_3 estão fundidas respectivamente a

z_3 , z_2 e z_3 . Para manter a capacidade de estimar as interações que provavelmente são as mais importantes, planeja-se um segundo bloco de experimentos na forma

| Experimento | $z_1=(1)$ | $z_2=(2)$ | $z_1z_2=(3)$ | $z_3=(4)$ | $z_1z_3=(5)$ | $z_2z_3=(6)$ | $z_1z_2z_3=(7)$ | y |
|-------------|-----------|-----------|--------------|-----------|--------------|--------------|-----------------|------|
| 1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 | 11.7 |
| 2 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 | 2.2 |
| 3 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | 11.8 |
| 4 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 | 1.8 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 9.3 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 9.0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8.9 |
| 8 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 | 12.3 |
| 9 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | 9.7 |
| 10 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 11.9 |
| 11 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | 10.4 |

que leva ao modelo

$$y = (9.00 \pm 0.02) + (2.10 \pm 0.03) z_1 - (2.95 \pm 0.03) z_3 + (1.93 \pm 0.03) z_1 z_3$$

com valor final da função objetivo igual a 12.88, fator de correlação igual a 0.998 e com intervalos de confiança dos parâmetros calculados com 95% de confiança. (Como o valor da função objetivo é maior que o esperado para o valor do χ^2 com 3 graus de liberdade e 95% de confiança, a variância da medida y deve ser um pouco maior que o valor de referência de 0.04.) Observa-se que as únicas variáveis relevantes são x_1 e x_3 ; portanto, se o plano fatorial completo para sete variáveis tivesse sido formulado inicialmente, a maior parte do esforço experimental (131 experimentos, contando as réplicas do ponto central) teria sido dedicada a mostrar que as demais variáveis não são de fato importantes para o problema considerado. É muito importante também observar que a variável x_2 não parece ser importante para o problema, embora no primeiro bloco de experimentos o experimentador tivesse sido levado a considerar a importância da segunda variável por causa do conhecido problema da fusão de efeitos. No primeiro bloco de experimentos, o efeito da segunda variável de fato mede o efeito da não linearidade, cuja existência foi descartada no início do procedimento experimental.

Estendendo o segundo modelo ao primeiro bloco de experimentos, obtém-se

$$y = (8.93 \pm 0.02) + (1.94 \pm 0.03) z_1 - (2.99 \pm 0.03) z_3 + (1.96 \pm 0.03) z_1 z_3$$

que é essencialmente a mesma coisa, respeitados os erros experimentais. As diferenças são muito pequenas nos dois blocos, mostrando que a análise e a estimação são bastante saudáveis. A diferença significativa notada entre os dois valores de α_0 e α_1 apenas corroboram o fato de que a variância experimental deve ser um pouco maior que o valor de referência adotado de 0.04, a partir da variância observada no centro com poucos graus de liberdade.

3.4.2. Blocos em Cruz

Como discutido no Capítulo 2, a identificação de efeitos não lineares quadráticos (fundamental em muitos problemas que exigem atividades de otimização) requer a utilização de três níveis durante a formulação do plano, o que resulta em aumento muito considerável do esforço de experimentação. Por exemplo, se cinco variáveis são consideradas, um plano fatorial completo a dois níveis contém $2^5=32$ experimentos (fora as réplicas do ponto central), enquanto um plano fatorial completo a três níveis contém $3^5=243$ experimentos (fora as réplicas do ponto central). Em outras palavras, o custo da identificação dos efeitos quadráticos pode ser proibitivo em muitos problemas reais. Contudo, dois pontos precisam ser considerados pelo experimentador: de forma geral, nem todas as variáveis exercem efeitos quadráticos significativos sobre a resposta do problema; e, de forma geral, não é necessário identificar todos os efeitos quadráticos do problema. O primeiro ponto induz o analista a considerar a estratégia experimental discutida no Exemplo 3.15; ou seja, identificar inicialmente os efeitos lineares principais mais importantes do problema e apenas depois realizar experimentos que permitam a identificação dos eventuais efeitos quadráticos existentes para as variáveis identificadas como as mais importantes do problema. O segundo ponto induz o analista a possivelmente desconsiderar a identificação de interações binárias entre os efeitos quadráticos principais e os demais efeitos lineares e não lineares do modelo, que resultam sempre em interações de ordem superior (usualmente, pouco importantes).

Admitindo-se que o analista considera o cenário apresentado no parágrafo anterior como válido, parece razoável admitir que o modelo perseguido para explicar os dados experimentais tem a forma:

$$y = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{NX} \alpha_i z_i + \sum_{i=1}^{NX} \sum_{j>i}^{NX} \beta_{ij} z_i z_j + \sum_{i=1}^{NX} \gamma_i z_i^2 \quad (3.10)$$

em que os únicos efeitos quadráticos que precisam ser identificados são os efeitos quadráticos principais (e, talvez, para apenas parte das variáveis investigadas). Nesse caso, parece também claro que a identificação do efeito quadrático pode ser feita variando-se o valor da variável x_i ao redor de um ponto de referência (o ponto central, por exemplo). O **plano experimental em cruz** (ou **plano experimental do tipo estrela**) é o plano que permite a identificação dos efeitos quadráticos individuais, obtido quando se variam os valores das condições experimentais entre as condições extremas para cada uma das variáveis investigadas ao redor do ponto central, como descrito no Algoritmo 3.2. O plano em cruz é o bem conhecido plano que propõe a variação de uma variável de cada vez.

Algoritmo 3.2- Formulação de um Plano em Cruz.

Comentário: Posicionamento das variáveis na condição central.

1. Para i variando de 1 a NX , faça $z_i=0$.

Comentário: Inicializando o índice k que identifica o experimento.

2. $k=0$.

Comentário: Gerando as condições do plano.

3. Para i variando de 1 a NX , faça:

4. $z_i=-1$;

5. $k=k+1$;
6. Para j variando de 1 a NX , escreva o valor de z_j no experimento k ;
7. $z_i=-1$;
8. $k=k+1$;
9. Para j variando de 1 a NX , escreva o valor de z_j no experimento k ;
10. $z_i=0$;
11. Volte ao passo 3.

Comentário: Finalizando o plano experimental e incluindo o ponto central.

12. $k=k+1$.
13. Para j variando de 1 a NX , escreva o valor de z_j no experimento k .

Exemplo 3.16- Formula-se a seguir um plano em cruz para três variáveis:

| Experimento | z_1 | z_2 | z_3 | NR |
|-------------|-------|-------|-------|----|
| 1 | -1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | +1 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | +1 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | -1 | 1 |
| 6 | 0 | 0 | +1 | 1 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 3 |

cujos efeitos calculados ao longo da matriz de experimentos são mostrados abaixo

| Experimento | z_1 | z_2 | z_3 | z_1^2 | z_2^2 | z_3^2 | $z_1 z_2$ | $z_1 z_3$ | $z_2 z_3$ |
|-------------|-------|-------|-------|---------|---------|---------|-----------|-----------|-----------|
| 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | +1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | +1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | +1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Vê-se com clareza na tabela acima que o plano em cruz não é ortogonal, se os efeitos quadráticos são considerados na forma mais simples, já que as somas das colunas que contêm os efeitos estimados não são identicamente nulas. Dessa forma, algum tipo de normalização precisa ser introduzido no modelo para que se identifiquem os efeitos experimentais de forma independente, como discutido no Capítulo 2. Da mesma forma, os efeitos de interação não linear binária entre as variáveis não podem ser estimados, porque esses efeitos são constantes e iguais a zero em todo o plano experimental. Isso mostra como a estratégia de investigar uma variável por vez pode ser deletéria para a análise quantitativa do problema experimental e como a formulação de um plano em cruz simples não parece adequada para a investigação de problemas experimentais complexos.

A análise do Algoritmo 3.2 mostra que o número de experimentos contidos em um plano em cruz é igual a

$$NE = 2 NX + NR \quad (3.11)$$

Essa informação é muito importante para que se avalie o esforço experimental associado ao plano em cruz e para que se entenda o problema de normalização do modelo, realizada para que se permita a estimação independente dos parâmetros quadráticos. Como mostrado no Exemplo 3.17 abaixo, não é possível formular uma transformação simples do efeito quadrático que permita a estimação independente de todos os parâmetros do modelo. Portanto, um plano em cruz não é ortogonal e não pode ser transformado num plano ortogonal por meio de transformações simples de representação dos efeitos não lineares do problema.

Exemplo 3.17- O modelo usado para interpretar quantitativamente os dados experimentais do plano em cruz do Exemplo 3.16 pode ser normalizado na forma:

$$y = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{NX} \alpha_i z_i + \sum_{i=1}^{NX} \gamma_i (z_i^2 + a_i z_i + b_i)$$

onde a_i e b_i são fatores de normalização a serem determinados. Como a soma dos efeitos deve ser nula ao longo dos experimentos, conclui-se que

$$\sum_{k=1}^{NE} (z_{ik}^2 + a_i z_{ik} + b_i) = 2 + 0 a_i + (2 NX + NR) b_i \rightarrow b_i = -\frac{2}{2 NX + NR}$$

No Exemplo 3.16, $b_i = -2/9$. De forma similar, a soma do produto dos efeitos também deve ser nula na malha experimental, de maneira que

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{NE} (z_{ik}^2 + a_i z_{ik} + b_i)(z_{jk}^2 + a_j z_{jk} + b_j) = \\ & \sum_{k=1}^{NE} \left(\begin{array}{c} z_{ik}^2 z_{jk}^2 + a_j z_{ik}^2 z_{jk} + b_j z_{ik}^2 + a_i z_{ik} z_{jk}^2 + a_i a_j z_{ik} z_{jk} + a_i b_j z_{ik} + \\ b_i z_{jk}^2 + a_j b_i z_{jk} + b_i b_j \end{array} \right) = \\ & 0 + 0 + 2 b_j + 0 + 0 + 0 + 2 b_i + 0 + b_i b_j = (4 + b_i) b_j \neq 0 \end{aligned}$$

Portanto, a transformação proposta não é capaz de transformar o plano em cruz numa forma ortogonal, independentemente dos valores de a e b adotados na transformação. Consequentemente, os parâmetros estimados para cada um dos efeitos sempre apresentam algum grau de dependência entre si.

O esquema seqüencial de experimentação e identificação de efeitos quadráticos pode ser implementado de forma similar à realizada no Exemplo 3.15, como ilustrado no Exemplo 3.18 a seguir.

Exemplo 3.18- Suponha que um plano fatorial mínimo foi formulado para quatro variáveis, como descrito no Exemplo 3.15. Os resultados são apresentados abaixo:

| Experimento | $z_1=(1)$ | $z_2=(2)$ | $z_1z_2=(3)$ | $z_3=(4)$ | $z_1z_3=(5)$ | $z_2z_3=(6)$ | $z_4=(7)$ | y |
|-------------|-----------|-----------|--------------|-----------|--------------|--------------|-----------|-----|
| 1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 | 2.1 |
| 2 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 | 1.8 |
| 3 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | 3.8 |
| 4 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 | 4.2 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4.1 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3.7 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3.9 |
| 8 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 | 8.3 |
| 9 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | 8.1 |
| 10 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 5.9 |
| 11 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | 6.2 |

cuja análise quantitativa leva a

$$y = (3.90 \pm 0.04) + (2.07 \pm 0.03) z_1 - (1.05 \pm 0.03) z_1 z_2 + (1.15 \pm 0.03) z_2^2$$

em que o sinal de interrogação deixa claro que não é possível identificar a fonte da não linearidade. No entanto, como as variáveis z_1 e z_2 são as que mais influenciam a resposta experimental, parece tentador identificar o efeito quadrático em função dessas duas variáveis. Por isso, é adicionado um plano em cruz ao conjunto de experimentos na forma:

| Experimento | $z_1=(1)$ | $z_2=(2)$ | $z_1z_2=(3)$ | $z_3=(4)$ | $z_1z_3=(5)$ | $z_2z_3=(6)$ | $z_4=(7)$ | y |
|-------------|-----------|-----------|--------------|-----------|--------------|--------------|-----------|-----|
| 1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 | 2.1 |
| 2 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 | 1.8 |
| 3 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | 3.8 |
| 4 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 | 4.2 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4.1 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3.7 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3.9 |
| 8 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 | 8.3 |
| 9 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | 8.1 |
| 10 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 5.9 |
| 11 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | 6.2 |
| 12 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2.8 |
| 13 | +1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7.3 |
| 14 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4.3 |
| 15 | 0 | +1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3.8 |

cuja análise quantitativa leva a

$$y = (3.93 \pm 0.04) + (2.11 \pm 0.03) z_1 - (1.05 \pm 0.03) z_1 z_2 + (1.06 \pm 0.05) z_1^2$$

em que fica claro que a fonte da não linearidade é a variável z_j . O leitor atento concluirá que a identificação do efeito quadrático foi possível sem a realização de um plano fatorial completo a três níveis, embora esteja claro que as interações de ordem superior foram desprezadas e que em geral ocorre a perda da ortogonalidade do plano experimental com a inserção do bloco em cruz no plano experimental fatorial fracionado original.

3.4.3. Blocos Induzidos por Variáveis Discretas

Os planos fatoriais e fatoriais fracionados estudados no Capítulo 2 e nas seções anteriores pressupõem que as variáveis analisadas podem ser manipuladas de forma contínua nas faixas de interesse. Contudo, essa suposição nem sempre é verdadeira. Por exemplo, imagine que o experimentador analisa o efeito de diferentes ácidos (ácido nítrico, ácido sulfúrico e ácido clorídrico) sobre a velocidade de corrosão de uma peça metálica colocada em contato com um meio aquoso. Nesse caso, o experimento ocorre necessariamente a três níveis (os três ácidos), mas como devem ser definidos os valores das variáveis normalizadas? Em outras palavras, quem são os níveis -1, 0 e +1? Aliás, será que essa definição faz sentido no caso de interesse? Afinal, que variável está sendo modificada exatamente?

No problema proposto, o experimentador pode sentir enorme dificuldade de identificar a propriedade que melhor caracteriza a mudança do ácido. Por exemplo, o pH pode ser usado para identificar a acidez do meio, mas talvez não explique completamente o efeito eventualmente observado sobre a velocidade de corrosão. Certamente há outras variáveis que caracterizam a afinidade química e eletroquímica do composto ácido pelo substrato, como a carga elétrica e a eletronegatividade (facilidade de doar elétrons) do ânion (nitrato, sulfato ou cloreto). Portanto, o efeito de cada composto ácido sobre a velocidade de corrosão talvez não possa mesmo ser descrita de outra forma, que não em termos do composto ácido utilizado. Quando a variável considerada no estudo experimental não pode ser fracionada de forma contínua nem pode ser descrita de forma simples em termos de uma medida facilmente mensurável, diz-se que a variável tem natureza discreta.

O problema pode ser ainda mais complexo, porque o substrato utilizado para os testes de corrosão pode ser também constituído por diferentes materiais (ferro, aço, latão) e ter diferentes formas (esfera, quadrado, estrela). No primeiro caso, o analista pode achar que a diferença de potencial medida entre o metal e uma referência pode representar adequadamente as propriedades do material. No segundo caso, o analista pode achar que o número de vértices da peça representa adequadamente a complexidade da forma e a susceptibilidade à corrosão no meio ácido. Apesar disso, o fato é que o experimentador não pode manipular arbitrariamente essas variáveis. Por exemplo, não faz sentido definir um número não inteiro de vértices na peça analisada. Para piorar, o analista pode ter interesse em avaliar o efeito associado a outras variáveis que podem ser manipuladas continuamente, como a temperatura e a concentração dos ácidos no meio aquoso. Como agir nesses casos, em que variáveis contínuas e discretas se misturam em um plano experimental?

Primeiramente é preciso perceber que a filosofia de planejamento fatorial pode ser usada de forma absolutamente trivial a problemas de natureza discreta e de natureza mista, como mostrado no Exemplo 3.19. Contudo, nesses casos o número de experimentos resultantes costuma ser abusivamente grande, inviabilizando a implementação do plano na prática.

Exemplo 3.19- Um experimentador deseja investigar o efeito que três variáveis discretas (3 tipos de ácido, 3 tipos de material e 3 formas de corpos de prova) e duas variáveis contínuas (temperatura e concentração de ácido, nas faixas de 25 a 50 °C e de 0.1 a 0.5 M, respectivamente) exercem sobre a velocidade de corrosão. Para investigar o problema, é proposto um plano fatorial para as variáveis discretas, contendo $3 \times 3 \times 3 = 27$ condições experimentais, em que cada material metálico é preparado nas três formas possíveis dos corpos de prova e submetido aos testes de corrosão em soluções de cada um dos três ácidos. Cada uma das 27 combinações discretas é usada como um bloco para a formulação de um plano experimental a dois níveis para duas variáveis e réplicas no ponto central, contendo $2 \times 2 + 3 = 7$ experimentos. Portanto, a combinação de todos os experimentos propostos resulta em um plano que contém $27 \times 7 = 189$ testes de corrosão. Para avaliar quantitativamente o efeito das variáveis discretas sobre os resultados obtidos, os 27 modelos construídos para duas variáveis contínuas deverão ser comparados entre si.

O número de experimentos em planos fatoriais completos que contêm variáveis discretas pode crescer rapidamente se o número de níveis (condições discretas distintas) for muito elevado e/ou se o número de variáveis discretas for muito grande. Nesse caso, o experimentador pode usar estratégias de planejamento similares às utilizadas anteriormente para variáveis contínuas, com o objetivo de construir menor número de blocos discretos para análise. Uma estratégia comumente usada para reduzir o número de blocos discretos é utilizar uma representação contínua para a variável discreta. Uma outra estratégia consiste em aplicar o conceito de plano em cruz para cada um dos efeitos discretos. Essas estratégias são ilustradas nos exemplos que seguem.

Exemplo 3.20- No problema proposto no Exemplo 3.19, o experimentador não pode executar os 189 experimentos previstos por limitações orçamentárias e temporais. Por isso, o experimentador admite que as variáveis discretas podem ser representadas adequadamente em termos da força ácida do composto (ácido nítrico – HNO_3 < ácido sulfúrico – H_2SO_4 < ácido clorídrico – HCl , medida em termos de mol de átomos de hidrogênio por massa de composto), da condutividade elétrica do metal (aço < ferro < latão) e do número de vértices do corpo de prova (esfera < quadrado < estrela). Em função dessa proposta, o experimentador formula um plano experimental a dois níveis na forma

| Bloco | Ácido | Material | Corpo de Prova | NE |
|-------|-----------------|------------|----------------|----|
| 1 | Nítrico (-1) | Aço (-1) | Estrela (+1) | 7 |
| 2 | Nítrico (-1) | Latão (+1) | Esfera (-1) | 7 |
| 3 | Clorídrico (+1) | Aço (-1) | Esfera (-1) | 7 |
| 4 | Clorídrico (+1) | Latão (+1) | Estrela (+1) | 7 |
| 5 | Sulfúrico (0) | Ferro (0) | Quadrado (0) | 7 |

Como em cada um dos cinco blocos de experimentos será executado um plano experimental a dois níveis para duas variáveis, o número total de experimentos planejados é igual a 35. O modelo construído com os experimentos dos Blocos 1 e 2 pode ser comparado aos modelos construídos com os experimentos dos Blocos 3 e 4 e do Bloco 5 para identificar a importância do meio ácido sobre a resposta da velocidade de corrosão. De forma similar, o modelo construído com os experimentos dos Blocos 1 e 3 pode ser comparado aos modelos construídos com os experimentos dos Blocos 2 e 4 e do Bloco 5 para identificar a importância do material sobre a resposta da velocidade de corrosão. Finalmente, o modelo construído com os experimentos dos Blocos 1 e 4 pode ser comparado aos modelos construídos com os

experimentos dos Blocos 2 e 3 e do Bloco 5 para identificar a importância da forma do corpo de prova sobre a resposta da velocidade de corrosão. Obviamente, o conjunto de experimentos proposto não permite a comparação exaustiva de resultados, como no caso do plano fatorial completo. Contudo, como já foi amplamente discutido nas seções anteriores, esse é o preço que se paga toda vez que se reduz o número de experimentos de um plano experimental.

Exemplo 3.21- No problema proposto no Exemplo 3.19, o experimentador não pode executar os 189 experimentos previstos por limitações orçamentárias e temporais. Por isso, o experimentador admite que as variáveis discretas podem ser representadas adequadamente em termos da força ácida do composto (ácido nítrico – HNO_3 < ácido sulfúrico – H_2SO_4 < ácido clorídrico – HCl , medida em termos de mol de átomos de hidrogênio por massa de composto), da condutividade elétrica do metal (aço < ferro < latão) e do número de vértices do corpo de prova (esfera < quadrado < estrela). Em função dessa proposta, o experimentador formula um plano em cruz, como descrito abaixo

| Bloco | Ácido | Material | Corpo de Prova | NE |
|-------|-----------------|------------|----------------|----|
| 1 | Nítrico (-1) | Ferro (0) | Quadrado (0) | 7 |
| 2 | Clorídrico (+1) | Ferro (0) | Quadrado (0) | 7 |
| 3 | Sulfúrico (0) | Aço (-1) | Quadrado (0) | 7 |
| 4 | Sulfúrico (0) | Latão (+1) | Quadrado (0) | 7 |
| 5 | Sulfúrico (0) | Ferro (0) | Esfera (-1) | 7 |
| 6 | Sulfúrico (0) | Ferro (0) | Estrela (+1) | 7 |
| 7 | Sulfúrico (0) | Ferro (0) | Quadrado (0) | 7 |

Como em cada um dos cinco blocos de experimentos será executado um plano experimental a dois níveis para duas variáveis, o número total de experimentos planejados é igual a 49. Os modelos construídos com os experimentos dos Blocos 1, 2 e 7 podem ser comparados entre si para identificar a importância do meio ácido sobre a resposta da velocidade de corrosão. De forma similar, os modelos construídos com os experimentos dos Blocos 3, 4 e 7 podem ser comparados entre si para identificar a importância do material sobre a resposta da velocidade de corrosão. Finalmente, os modelos construídos com os experimentos dos Blocos 5, 6 e 7 podem ser comparados entre si para identificar a importância do corpo de prova sobre a resposta da velocidade de corrosão. Obviamente, e como no caso anterior, o conjunto de experimentos proposto não permite a comparação exaustiva de resultados, quando comparado ao caso do plano fatorial completo. Contudo, como já foi amplamente discutido nas seções anteriores e comentado no Exemplo 3.20, esse é o preço que se paga toda vez que se reduz o número de experimentos de um plano experimental.

3.4.4. Planos Rotacionais

Diz-se que um plano experimental é **rotacional** quando a variância de predição da variável de resposta do modelo é similar em todas as condições experimentais propostas. Essa condição adicional imposta ao plano experimental pode ser útil quando o analista deseja que o modelo final obtido tenha um desempenho similar em todas as condições da malha de experimentos, evitando que os diferentes pontos estejam sujeitos a diferentes erros de predição.

Como mostrado no Capítulo 4 do volume I dessa série de publicações, para modelos genéricos na forma linear nos parâmetros:

$$y = \sum_{i=1}^{NF} \alpha_i f_i(\mathbf{x}) \quad (3.12)$$

a variância de predição ($\hat{\sigma}_y^2$) pode ser calculada na forma

$$\hat{\sigma}_y^2 = [f_1(\mathbf{x}) \quad f_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad f_{NF}(\mathbf{x})] \mathbf{V}_\alpha \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_{NF}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

onde \mathbf{V}_α é a matriz de covariâncias das incertezas paramétricas. Quando os parâmetros são estimados com a técnica de mínimos quadrados (compatível com a idéia de avaliação de erros com réplicas apenas no ponto central), a matriz \mathbf{V}_α ganha a forma (ver o Capítulo 4 do volume I dessa série de publicações)

$$\mathbf{V}_\alpha = \sigma_y^2 \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{NE} [f_1(\mathbf{x}_k)]^2 & \sum_{k=1}^{NE} [f_1(\mathbf{x}_k)][f_2(\mathbf{x}_k)] & \cdots & \sum_{k=1}^{NE} [f_1(\mathbf{x}_k)][f_{NF}(\mathbf{x}_k)] \\ \sum_{k=1}^{NE} [f_2(\mathbf{x}_k)][f_1(\mathbf{x}_k)] & \sum_{k=1}^{NE} [f_2(\mathbf{x}_k)]^2 & \cdots & \sum_{k=1}^{NE} [f_2(\mathbf{x}_k)][f_{NF}(\mathbf{x}_k)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{NE} [f_{NF}(\mathbf{x}_k)][f_1(\mathbf{x}_k)] & \sum_{k=1}^{NE} [f_{NF}(\mathbf{x}_k)][f_2(\mathbf{x}_k)] & \cdots & \sum_{k=1}^{NE} [f_{NF}(\mathbf{x}_k)]^2 \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.14)$$

No caso particular em que o plano é ortogonal

$$\mathbf{V}_\alpha = \sigma_y^2 \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{NE} [f_1(\mathbf{x}_k)]^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{k=1}^{NE} [f_2(\mathbf{x}_k)]^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{k=1}^{NE} [f_{NF}(\mathbf{x}_k)]^2 \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.15)$$

de maneira que

$$\hat{\sigma}_y^2 = \sigma_y^2 \sum_{i=1}^{NF} \left[\frac{[f_i(\mathbf{x})]^2}{\sum_{k=1}^{NE} [f_i(\mathbf{x}_k)]^2} \right] \quad (3.16)$$

em que a Equação (3.16) pode ser aplicada a qualquer ponto \mathbf{x} , depois de estimados os parâmetros com os pontos experimentais \mathbf{x}_k , $k=1 \dots NE$. Restringindo o uso da Equação (3.16) aos próprios pontos experimentais da malha, chega-se à seguinte relação:

$$\hat{\sigma}_y^2 = \sigma_y^2 \sum_{i=1}^{NF} \left[\frac{[f_i(\mathbf{x}_j)]^2}{\sum_{k=1}^{NE} [f_i(\mathbf{x}_k)]^2} \right] = \sigma_y^2 \sum_{i=1}^{NF} \left[\frac{[f_i(\mathbf{x}_m)]^2}{\sum_{k=1}^{NE} [f_i(\mathbf{x}_k)]^2} \right], \quad j, m = 1 \dots NE \quad (3.17)$$

onde os índices j e m designam pontos arbitrários da malha experimental. A Equação (3.17) pode ser reescrita na forma

$$\sum_{i=1}^{NF} \left[\frac{[f_i(\mathbf{x}_j)]^2}{\sum_{k=1}^{NE} [f_i(\mathbf{x}_k)]^2} \right] = C, \quad j = 1 \dots NE \quad (3.18)$$

em que C é uma constante positiva arbitrária. A Equação (3.18) mostra que a formulação de um plano experimental rotacional depende dos efeitos que estão sendo estimados e impõe a satisfação de NE equações não lineares simultaneamente, o que em geral só é possível em problemas muito simples, como mostrado nos exemplos abaixo.

Exemplo 3.22- Seja um plano experimental ortogonal a dois níveis, em que os efeitos estão normalizados convenientemente para assumirem os valores iguais a -1 ou $+1$ nos pontos experimentais. Nesse caso, a Equação (3.18) ganha a forma:

$$\sum_{i=1}^{NF} \left[\frac{1}{NE} \right] = C \rightarrow C = \frac{NF}{NE}$$

de maneira que todo plano fatorial a dois níveis com efeitos normalizados no intervalo $[-1, +1]$ é também um plano rotacional. É curioso perceber que as variâncias de predição aumentam com o número de fatores (redução do grau de liberdade) e diminuem com o aumento do número de experimentos. Ambos os efeitos já poderiam ser esperados.

Exemplo 3.23- Seja um plano experimental ortogonal a três níveis, em que os efeitos estão normalizados convenientemente para assumirem os valores iguais a -1 , 0 ou $+1$ nos pontos experimentais. Nesse caso, a Equação (3.18) ganha a forma:

$$0 \leq \sum_{i=1}^{NF} \left[\frac{[f_i(\mathbf{x}_j)]^2}{\left(\frac{2 NE}{3}\right)} \right] \leq \frac{3 NF}{2 NE}$$

de maneira que planos fatoriais a três níveis com efeitos normalizados no intervalo [-1,+1] não são rotacionais. Quanto maior o número de efeitos nulos na condição experimental considerada, menor a variância de predição (e melhor o desempenho relativo do modelo) naquele ponto particular da malha experimental.

Exemplo 3.24- Se apenas os efeitos lineares principais devem ser estimados em um plano experimental ortogonal, a Equação (3.18) ganha a forma:

$$\sum_{i=1}^{NF} \left[\frac{x_{ij}^2}{\sum_{k=1}^{NE} x_{ik}^2} \right] = \sum_{i=1}^{NF} \left[\frac{x_{ij}^2}{\lambda_i^2} \right] = C$$

que é a equação que descreve uma hiper-elipsóide. Dessa forma, conclui-se que os pontos experimentais que constituem um planejamento ortogonal devem estar inscritos em uma elipse, para que tenha características rotacionais e simultaneamente permitam a identificação independente dos efeitos lineares principais. No caso muito particular em que as somas das variáveis sejam constantes, a equação pode ser escrita na forma

$$\sum_{i=1}^{NF} \left[\frac{x_{ij}^2}{\sum_{k=1}^{NE} x_{ik}^2} \right] = \sum_{i=1}^{NF} \left[\frac{x_{ij}^2}{\lambda_i^2} \right] = \sum_{i=1}^{NF} x_{ij}^2 = C \quad , \quad j = 1 \dots NE$$

No caso particular em que três variáveis estão envolvidas, por exemplo, e admitindo que C é igual a 1, então

$$x_{1j}^2 + x_{2j}^2 + x_{3j}^2 = 1 \quad , \quad j = 1 \dots NE$$

Uma solução possível para essa equação é

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Outra solução possível é

$$x_1 = 1 \ ; \ x_2 = x_3 = 0$$

As soluções anteriores sugerem a formulação de um plano fatorial a cinco níveis para identificação dos efeitos principais de três variáveis e com balanceamento do desempenho do modelo em toda a malha experimental na forma

| Experimento | z_1 | z_2 | z_3 | NR |
|-------------|---------|---------|---------|----|
| 1 | -1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | +1 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | +1 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | -1 | 1 |
| 6 | 0 | 0 | +1 | 1 |
| 7 | -0.5774 | -0.5774 | +0.5774 | 1 |
| 8 | -0.5774 | +0.5774 | -0.5774 | 1 |
| 9 | +0.5774 | -0.5774 | -0.5774 | 1 |
| 10 | +0.5774 | +0.5774 | +0.5774 | 1 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 3 |

O leitor mais atento vai perceber que o plano apresentado acima é a combinação de um bloco em cruz com um bloco meio fatorial para três variáveis, em que os níveis -1 e $+1$ foram substituídos para satisfazer a condição de rotacionalidade. Portanto, a solução apresentada não é única. Apesar disso, estratégias semelhantes podem ser adotadas em outros problemas que envolvam mais variáveis e efeitos experimentais. As réplicas no ponto central foram adicionadas para permitir a avaliação da variância experimental, embora esse ponto não faça parte do bloco rotacional. A matriz de correlações das condições experimentais no caso avaliado é a seguinte

| | z_1 | z_2 | z_3 | $z_1 z_2$ | $z_1 z_3$ | $z_2 z_3$ | z_1^2 | z_2^2 | z_3^2 |
|-----------|-------|-------|-------|-----------|-----------|-----------|---------|---------|---------|
| z_1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,632 | 0 | 0 | 0 |
| z_2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0,632 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| z_3 | 0 | 0 | 1 | 0,623 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $z_1 z_2$ | 0 | 0 | 0,632 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $z_1 z_3$ | 0 | 0,632 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $z_2 z_3$ | 0,632 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| z_1^2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -0,258 | -0,258 |
| z_2^2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0,258 | 1 | -0,258 |
| z_3^2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0,258 | -0,258 | 1 |

Logo, todos os efeitos não lineares podem ser estimados com o plano rotacional proposto (a correlação nunca é igual a 1 ou -1), embora esses efeitos estejam parcialmente fundidos aos efeitos lineares principais e entre si, não podendo ser estimados de forma completamente independente. Portanto, o plano proposto não é ortogonal, quando os efeitos de ordem superior são incluídos no modelo.

Exemplo 3.25- Deseja-se construir um plano rotacional para um problema experimental que envolve duas variáveis, incluindo-se no modelo o efeito da interação binária. Portanto, e de forma análoga à realizada no Exemplo 3.24, a Equação (3.18) ganha a forma

$$x_{1j}^2 + x_{2j}^2 + x_{1j}^2 x_{2j}^2 = 1$$

cuja solução é

$$x_{1j}^2 = \frac{1 - x_{2j}^2}{1 + x_{2j}^2}$$

Possíveis soluções numéricas são constituídas pelos pares [+1,0], [-1,0], [0.6,0.5], dentre muitas outras possibilidades. Por isso, propõe-se a seguinte solução rotacional

| Experimento | z_1 | z_2 | $z_1 z_2$ | NR |
|-------------|-------|-------|-----------|----|
| 1 | -1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | +1 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | +1 | 0 | 1 |
| 5 | -0.6 | -0.5 | +0.3 | 1 |
| 6 | -0.6 | +0.5 | -0.3 | 1 |
| 7 | +0.6 | -0.5 | -0.3 | 1 |
| 8 | +0.6 | +0.5 | +0.3 | 1 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 3 |

Como nos demais casos, o ponto central foi adicionado para permitir a avaliação dos erros experimentais. O plano proposto acima permite a determinação dos efeitos lineares principais e da interação binária de forma independente. No entanto, a adição de termos quadráticos quebra a ortogonalidade do plano, pois os dois efeitos quadráticos estão parcialmente fundidos, como visto nos demais casos.

3.5- Conclusões

No Capítulo 2 ficou evidente que o número de experimentos num planejamento fatorial completo cresce como uma potência do número de níveis, à medida que o número de variáveis aumenta. Por isso, neste capítulo foram apresentados e discutidos alguns procedimentos clássicos de planejamento de experimentos que podem ser obtidos como frações dos planos fatoriais clássicos. De forma geral, os planejamentos foram propostos com o objetivo de manter as propriedades de ortogonalidade discutidas no Capítulo 2, para que ainda fosse possível estimar parâmetros independentes, apesar do menor número de experimentos da grade experimental. A despeito disso, foi mostrado que a redução do número de experimentos traz alguns inconvenientes para o analista, como a fusão dos efeitos experimentais e a redução da precisão dos parâmetros estimados. Ambos os efeitos podem comprometer a análise qualitativa e quantitativa dos resultados experimentais.

É particularmente importante frisar que um procedimento sistemático para identificação e posterior eliminação do risco da fusão de efeitos foi apresentado, com base nas tabelas e procedimentos propostos originalmente por Taguchi. Contudo, durante a discussão foi abandonado o último preceito remanescente do plano estatístico ideal, que diz respeito ao ordenamento aleatório da seqüência experimental. Como discutido na Seção 3.3, há muitas razões que podem justificar a realização de experimentos numa ordem determinística, visando à redução do esforço e do custo da experimentação. Finalmente, foram discutidos aspectos de blocagem, que permitem a extensão dos procedimentos fatoriais para a investigação de efeitos causados por variáveis discretas e a implementação de estratégias seqüenciais de experimentação, para identificação de efeitos não lineares com mínimo esforço experimental.

3.6- Leitura Adicional

A literatura relacionada ao estudo de técnicas de planejamento de experimentos é muito vasta, já que estas técnicas encontram aplicação nas mais variadas áreas de pesquisa científica. Assim, não cabe aqui uma revisão detalhada de todos os livros que tratam deste assunto. Sugere-se que o leitor interessado em rever os conceitos básicos relacionados ao cálculo estatístico e às técnicas de estimação de parâmetros consulte o Volume I desta série de publicações:

“*Análise de Dados Experimentais I. Fundamentos de Estatística e Estimação de Parâmetros*”, M. Schwaab e J.C. Pinto, E-Papers, Rio de Janeiro, 2007.

Dois textos clássicos relacionados ao uso de técnicas estatísticas para a análise de dados e processos e para o planejamento de experimentos são:

“*Process Analysis by Statistical Methods*”, D.M. Himmelblau, John Wiley & Sons, New York, 1970.

“*Statistics for Experimenters. An Introduction to Design, Data Analysis, and Model Building*”, G.E.P. Box, W.G. Hunter e J.S. Hunter, John Wiley & Sons, New York, 1978.

Algumas obras clássicas já foram citadas ao longo do texto, mas merecem ser também relembradas como leitura adicional, como o texto original de Plackett e Burman

“*The Design of Optimum Multifactorial Experiments*”, R.L. Plackett e J.P. Burman, *Biometrika*, **33**, 305-325, 1946.

e os livros pioneiros de Taguchi

“*Introduction to Quality Engineering: Designing Quality into Products and Processes*”, G. Taguchi, Asian Productivity Organization, Tokyo, 1986.

“*Taguchi Methods, Orthogonal Arrays and Linear Graphs: Tools for Quality Engineering*”, G. Taguchi and S. Konishi, American Suppliers Institute, New York, 1987.

Um livro particularmente abrangente e que apresenta uma ampla coleção de tabelas experimentais para diferentes combinações de níveis é

“*Quality Through Design: Experimental Design, Off-Line Quality Control, and Taguchi’s Contributions*”, N. Logothetis e H.P. Wynn, Oxford University Press, Oxford, 1989.

Finalmente, livros escritos em português que também apresentam e discutem técnicas fatoriais fracionadas de planejamento experimental são:

“*Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros*”, D.C. Montgomery e G.C. Runger, 2ª Edição, LTC, Rio de Janeiro, 2007.

“*Planejamento de Experimentos e Otimização de Processos*”, M.I. Rodrigues e A.F. Iemma, Casa do Pão Editora, Campinas, 2005.

“*Planejamento de Experimentos Usando o Statistica*”, V. Calado e D. Montgomery, E-Papers, Rio de Janeiro, 2003.

3.7- Exercícios Sugeridos

- 1- Use o Exemplo 3.1 como referência para mostrar que um plano fatorial a três níveis pode sempre ser fracionado em três subconjuntos ortogonais de condições experimentais.
- 2- Construa um plano fatorial a três níveis para três variáveis e separe os três blocos resultantes do sacrifício da interação de mais alta ordem. Mostre que os três blocos de experimentos são ortogonais e identifique as interações confundidas em cada um dos três blocos.
- 3- Construa um plano de Taguchi para avaliar o efeito que as seguintes variáveis exercem sobre a queda de pressão observada no escoamento de um líquido no interior de um tubo: diâmetro do tubo, rugosidade do tubo (ou seja, o grau de uniformidade da parede interna do tubo), vazão de líquido e temperatura do líquido. Admite-se que existe interação não linear entre o diâmetro e a rugosidade (imagina-se que a importância da rugosidade deve diminuir com o aumento do diâmetro) e entre o diâmetro e a vazão (imagina-se que o aumento do diâmetro diminua também a importância da vazão, porque a velocidade do escoamento cai).
- 4- Construa um plano experimental para avaliar o efeito que as condições de agitação exercem sobre os tamanhos médios das gotas de óleo produzidas numa suspensão aquosa. As seguintes variáveis devem ser consideradas: o tipo de agitador (âncora, hélice, turbina), a presença de chicanas (o número de chicanas – 0, 1, 2 ou 3), a velocidade da agitação (100 a 900 rpm), a temperatura do processo (35 a 75 °C), o tipo de óleo (azeite, gasolina, petróleo) e a carga de óleo (10 a 30% em massa). Identifique as variáveis discretas e proponha um plano fatorial completo e um plano fatorial fracionado mínimo para o problema. Discuta como a análise dos dados deverá ser realizada.
- 5- O Exemplo 2.12 do Capítulo 2 apresenta dois planos ortogonais não fatoriais para duas variáveis. Comprove a propriedade de rotacionalidade de ambos os planos propostos.