Estudo de caso 1: Problema de transferência de custódia

Considere o problema em que uma determinada indústria (Empresa 1) vende os resíduos do seu processo produtivo para uma outra indústria (Empresa 2). Apenas para o efeito de contextualização, a Empresa 1 poderia ser uma refinaria de petróleo, a Empresa 2 poderia ser uma planta de produção de polietileno e o resíduo vendido seria o eteno, conforme ilustra a Figura 1.

Nesta situação, as duas empresas possuem sensores instalados na tubulação para verificar a quantidade de eteno que é transferida de uma empresa para a outra. Um problema que torna-se óbvio refere-se ao valor medido pelos dois sensores. Caso o Sensor 2 apresente valor medido ($\dot{m}_M^2$) maior do que o valor real da quantidade de eteno ($\dot{m}$), a Empresa 2 irá reclamar a diminuição do valor da conta a ser paga à Empresa 1. Por outro lado, caso o valor medido pelo Sensor 1 ($\dot{m}_M^1$) seja maior do que o valor real, a Empresa 1 irá reivindicar o aumento da conta a ser para pela Empresa 2. Desta forma, observa-se que, na hipótese de que um dos sensores (ou os dois) estejam mal calibrados, uma das empresas sofrerá prejuízo financeiro.

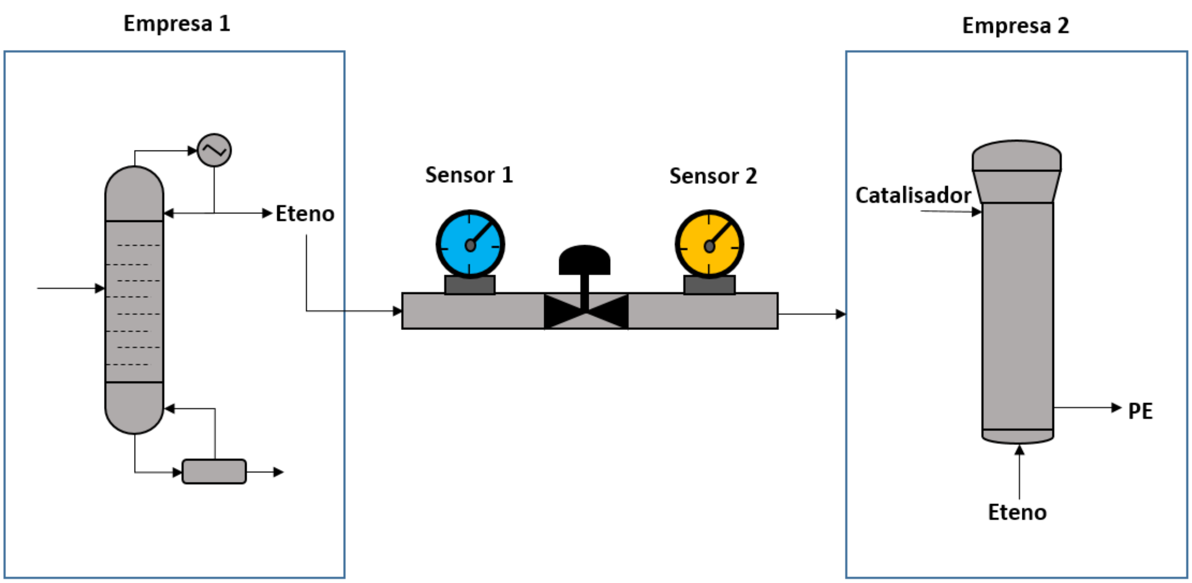

Figura 1: Ilustração do problema de transferência de custódia.

O problema de transferência de custódia é um típico problema de reconciliação de dados. Um olhar mais cuidadoso na estrutura do problema permite notar que a variável onde há incerteza no seu valor ($\dot{m}$), apresenta redundância pois é medida em dois sensores. Desta forma torna-se possível a reconciliação de dados.

Matematicamente, um simples balanço de massa representa este problema:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \tag{1}$$

Obviamente, o balanço de massa na Equação 1 não é satisfeito devido às incertezas nas medições dos sensores. Por outro lado, o problema de reconciliação consiste em calcular $\dot{m}_C^1$ e $\dot{m}_C^2$ que satisfaçam a Equação 1. Matematicamente:

$$\dot{m}_C^1 = \dot{m}_C^2 = \dot{m} \tag{2}$$

Com isto em mente, e admitindo que os erros de medição seguem a distribuição normal, é possível formular o problema de reconciliação de dados. Este problema consiste em minimizar a seguinte função objetivo:

$$F = (\boldsymbol{Z}_M - \boldsymbol{Z}_C)^T \boldsymbol{V}^{-1} (\boldsymbol{Z}_M - \boldsymbol{Z}_C) \tag{3}$$

Sujeito a:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2$$

Na Equação 3, $\boldsymbol{Z}_M$ e $\boldsymbol{Z}_C$ são os vetores de variáveis medidas e variáveis reconciliadas, $\boldsymbol{V}$ é a matriz de covariância dos erros de medição. Mais especificamente:

$$F = \begin{bmatrix} (\dot{m}_M^1 - \dot{m}_C^2) & (\dot{m}_M^2 - \dot{m}_C^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_{22}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\dot{m}_M^1 - \dot{m}_C^2) \\ (\dot{m}_M^2 - \dot{m}_C^2) \end{bmatrix} \tag{4}$$

substituindo a Equação (2) na Equação (4), obtêm-se:

$$F = \begin{bmatrix} (\dot{m}_M^1 - \dot{m}) & (\dot{m}_M^2 - \dot{m}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_{22}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\dot{m}_M^1 - \dot{m}) \\ (\dot{m}_M^2 - \dot{m}) \end{bmatrix} \tag{5}$$

É possível observar que, admitindo-se a hipótese de que a matriz de covariância dos erros de medição seja conhecida, a Equação (5) depende apenas de $\dot{m}$. Desta forma o valor mínimo de F pode ser encontrado resolvendo-se.

$$\frac{dF}{d\dot{m}} = 0 \tag{6}$$

Fazendo algumas manipulações algébricas, é possível encontrar a seguinte solução para a Equação (6).

$$\dot{m} = \frac{\sigma_{22}^2 \dot{m}_M^1 - \sigma_{12}^2 \dot{m}_M^2 - \sigma_{12}^2 \dot{m}_M^1 + \sigma_{11}^2 \dot{m}_M^1}{\sigma_{22}^2 - 2\sigma_{12}^2 + \sigma_{11}^2} \qquad (7)$$

A Equação 7 mostra que diferentes cenários podem existir a depender das covariâncias dos erros de medição. Primeiramente, consideremos que os erros de medição não possuem correlação entre si, ou seja, $\sigma_{12}^2 = 0$ e as variâncias dos erros de medição são iguais, $\sigma_{11}^2 = \sigma_{22}^2 = \sigma^2$. Substituindo na Equação (7) obtêm-se facilmente:

$$\dot{m} = \frac{\sigma^2 \dot{m}_M^1 + \sigma^2 \dot{m}_M^2}{2\sigma^2} = \frac{\dot{m}_M^1 + \dot{m}_M^2}{2} \qquad (8)$$

A Equação (7) afirma que, em uma situação onde os erros de medição estejam descorrelacionados e as variâncias são iguais, o valor reconciliado é a média dos valores medidos. Outro cenário importante ocorre quando os erros de medição são descorrelacionados ($\sigma_{12}^2 = 0$) e há disparidade muito grande entre os valores das variâncias dor erros (por exemplo, $\sigma_{11}^2 \ll \sigma_{22}^2$). Substituindo em na Equação (7), obtemos:

$$\dot{m} \cong \dot{m}_M^1 \qquad (9)$$

Em outras palavras, em uma situação a variância dos erros de medição no Sensor 2 for muito maior do que a variância dos erros de medição do Sensor 1, o valor reconciliado é aproximadamente o valor medido pelo Sensor 1.

Mais um cenário pode ocorrer quando as variâncias dos erros são idênticas $\sigma_{11}^2 = \sigma_{22}^2 = \sigma^2$ e os erros de medição são correlacionados $\sigma_{12}^2 = \rho\sigma^2$ $(-1 \leq \rho \leq 1)$. Assumindo isto, obtêm-se:

$$\dot{m} = \frac{(1-\rho)\dot{m}_M^1 + (1-\rho)\dot{m}_M^2}{2(1-\rho)} = \frac{\dot{m}_M^1 + \dot{m}_M^2}{2} \qquad (10)$$

Surpreendentemente, o valor reconciliado neste cenário é idêntico ao valor reconciliado no cenário onde os erros de medição estavam descorrelacionados e as variâncias eram idênticas.