CLASE 3: DINÁMICA DE LA PARTÍCULA

OBJETIVOS:

→ Reafirmar los conocimientos previos sobre las leyes de Newton

→ Comprender el concepto de VÍNCULO, aprender a identificarlos y expresarlos en forma de ecuación para determinar los grados de libertad del sistema y simplificar la descripción

→ Aprender a obtener las ECUACIONES DE MOVIMIENTO de un sistema

→ Aprender algunas técnicas que permitan resolver (integrar) dichas ecuaciones

LEYES DE NEWTON

1) **PRINCIPIO DE INERCIA**: $\exists$ sistema de referencia (que denominaremos INERCIALES) en los que una partícula libre de fuerzas sigue un MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME

2) **LEY DE MASA**: En dichos sistemas se cumple $\vec{F}_{NETA} = \dot{\vec{p}}$, con $\vec{p} = m\vec{v}$ → cantidad de movimiento = momento lineal

En particular, si $m = cte$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{F}_{NETA} = m\vec{a}}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \vec{F}_{NETA} \cdot \hat{i}' = m\vec{a} \cdot \hat{i}' \\ \vec{F}_{NETA} \cdot \hat{j}' = m\vec{a} \cdot \hat{j}' \\ \vec{F}_{NETA} \cdot \hat{k}' = m\vec{a} \cdot \hat{k}' \end{cases}$ (Equivale a 3 ec. escalares en 3 direcciones ortogonales CONVENIENTES)

Nota 1: $\vec{a}$ SIEMPRE es la aceleración ABSOLUTA de la partícula respecto a cualquier sist. inercial

→ Si empleo un sist. coord. conocido ⇒ HOJA DE FÓRMULAS

→ Escribo $\vec{r}$ desde S y derivo

→ Elijo S' móvil auxiliar y utilizo TEOREMA DE CORIOLIS

Nota 2: Si insisto en trabajar en S' ⇒ ojo! $\vec{F}_{NETA} \neq m\vec{a}'$!

¿Por qué? Porque $\vec{F}_{NETA} = m\vec{a} = m\vec{a}' + m\vec{a}_T + m\vec{a}_C$

$$\Rightarrow \vec{F}_{NETA} \underbrace{- m\vec{a}_T - m\vec{a}_C}_{\text{FUERZAS NO INERCIALES}} = m\vec{a}'$$

FUERZAS NO INERCIALES: Debo incluirlas por el hecho de que S' es no inercial (PERSONALMENTE RECOMIENDO TRABAJAR EN EL SIST. FIJO ⇒ $\vec{F}_{NETA} = m\vec{a}$)

3) **ACCIÓN Y REACCIÓN**: Si $\exists\, \vec{F}_{A/B} \Rightarrow \exists\, \vec{F}_{B/A}$ / $\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$

VÍNCULOS

→ Son RESTRICCIONES sobre el movimiento

→ Típicamente son de naturaleza geométrica (movimiento confinado a una curva, superficie o volumen dados)
Pero NO necesariamente (pueden depender de la velocidad, etc)

→ Trabajaremos con vínculos que pueden representarse matemáticamente mediante ECUACIONES que involucran a las coordenadas del sistema ⇒ ESTO PERMITIRÁ REDUCIR EL NÚMERO DE COORDENADAS NECESARIAS PARA DESCRIBIR EL MOVIMIENTO ⇒ GRADOS DE LIBERTAD

→ Para 1 partícula ⇒ $G.L = \underbrace{3}_{\text{coordenadas para representar 1 partícula en el espacio}} - \underbrace{V}_{\text{vínculos}}$

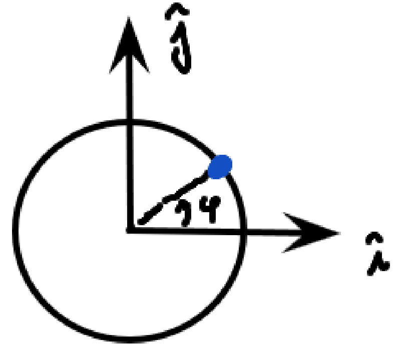
ES IMPORTANTE REALIZAR ESTE ANÁLISIS EN CONJUNTO CON LA APLICACIÓN DE LA 2da LEY DE NEWTON

→ Para N partículas ⇒ $G.L. = 3N - V$

→ Los vínculos se hacen efectivos gracias a la presencia de FUERZAS VINCULARES (típicamente se conocerán después de resolver la dinámica)

FUERZAS VINCULARES:
- NORMALES
  - unilateral (permite el despegamiento)
  - bilateral (no permite)
- TANGENCIALES (fricción)

EJEMPLO 1: Movimiento confinado a guía circular fija de radio R

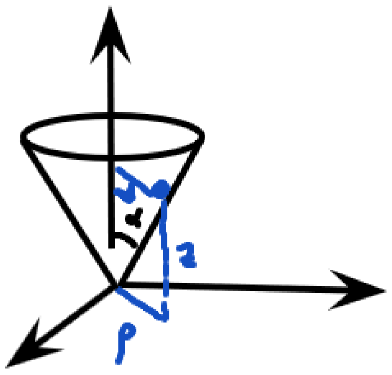


A priori se requieren 3 coordenadas
Movimiento plano $\Rightarrow z=0$
Radio constante : $r=R=cte \Rightarrow \dot{r}=\ddot{r}=0$
$(x^2+y^2=R^2)$

$\Rightarrow \underbrace{G.L. = 3-2=1}$
Basta con 1 coordenada para describir efectivamente el movimiento (por ejemplo, φ)

Nota: Para que efectivamente $r=cte$ la normal debe poder apuntar tanto hacia adentro como hacia afuera, dependiendo de las otras fuerzas actuantes $\Rightarrow$ VÍNCULO BILATERAL

EJEMPLO 2: Movimiento sobre la superficie interior de un cono de ángulo α



A priori: 3 coordenadas
Si permanece apoyada
→ En esféricas: $\theta=\alpha=cte \Rightarrow \dot{\theta}=\ddot{\theta}=0$
→ En cilíndricas: $tg\alpha = \rho/z \Rightarrow \rho = z\, tg\alpha$
→ En cartesianas: $tg\alpha = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$

$\underbrace{G.L. = 3-1=2}$
Se requieren 2 coord.
→ r, φ (esféricas)
→ $\rho\varphi$ ó z,φ (cilíndricas)

Ecuación (es) de Movimiento

→ Ecuaciones diferenciales de 2do orden en la posición (provienen de aplicar la 2da ley de Newton $\vec{F}_{NETA} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$)
↳ No confundir con la LEY HORARIA $\vec{r}(t)$ (su solución)

→ Involucran a las coordenadas de problema, sus derivadas y las constantes conocidas que definen el problema

→ En particular, NO PUEDEN APARECER EN ELLAS FUERZAS DESCONOCIDAS (Reacciones)

→ ¿Cuántas hay? $\underbrace{\text{TANTAS COMO GRADOS DE LIBERTAD TIENE EL SISTEMA}}$

ES FUNDAMENTAL REALIZAR EL ANÁLISIS DE LOS VÍNCULOS A LOS QUE ESTÁ SOMETIDO EL MOVIMIENTO PARA DETERMINAR LA CANTIDAD DE COORDENADAS "EFECTIVAS" (G.L.) ⟹ DEBO ESCRIBIR IGUAL CANTIDAD DE ECS. DE MOVIMIENTO

(si hay más de una, típicamente cada una involucra más de una coordenada ⟹ ACOPLADAS)

¿Cómo trabajo con las ecs. movimiento?

1) Si puedo, las resuelvo (excepcional, en general es muy difícil / $\underbrace{\text{imposible obtener su solución analítica}}$)

Algunos casos resolubles:

En la vida real se resuelven NUMÉRICAMENTE

→ Fuerzas dependen solo de la velocidad: $F(v) = m\dot{v}$, $x(t_0) = x_0$, $v(t_0) = v_0$ ⇒ ECUACIÓN DE VARIABLES SEPARABLES

$$\Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{\dot{v}}{F(v)} \Rightarrow \underbrace{\int_{t_0}^{t} \frac{1}{m}\, dt} = \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{v}\, dt}{F(v)}$$

$\dot{v} = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \dot{v}\,dt = dv$

$$\Rightarrow \frac{(t - t_0)}{m} = \underbrace{\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{F(v)}}$$

Sea $\mathcal{F} / \mathcal{F}' = \frac{1}{F(v)}$

$$\frac{t - t_0}{m} = \mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(v_0)$$

$$\Rightarrow \text{si } \mathcal{F} \text{ invertible}: \quad \boxed{v(t) = \mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(v_0) + \frac{t - t_0}{m}\right)}$$

"si puedo despejar v"

Luego $x(t)$ se obtiene por integración (si $v(t)$ lo permite):

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\, dt$$

→ Ecs. lineales con coeficientes constantes (tanto homogeneos como heterogeneos)

$$\begin{cases} \ddot{x} + A\dot{x} + Bx = f(t) \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} \quad , A, B \in \mathbb{R} \quad . \quad \text{Si } f(t) = 0 \Rightarrow \text{HOMOGENEA}$$

Breve repaso del método:

i) se resuelve la ecuación homogenea por el método del polinomio característico:

$$x_H = e^{\lambda t} \Rightarrow \dot{x}_H = \lambda e^{\lambda t} \Rightarrow \ddot{x}_H = \lambda^2 e^{\lambda t} \underset{\text{sust.}}{\Rightarrow} \lambda^2 e^{\lambda t} + A\lambda e^{\lambda t} + Be^{\lambda t} = 0$$

$$e^{\lambda t}(\lambda^2 + A\lambda + B) = 0 \xrightarrow{e^{\lambda t} \neq 0} \boxed{\lambda^2 + A\lambda + B = 0}$$

ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

Caso 1: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow x_H(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$

Caso 2: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow x_H(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t}$

Caso 3: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i \Rightarrow x_H(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t))$

ii) Se busca una solución particular $x_p(t)$ de la ecuación completa $\ddot{x} + A\dot{x} + Bx = f(t)$

Para ello se propone una solución perteneciente a la familia de $f(t)$ CON COEFICIENTES INDETERMINADOS que se obtendrán IMPONIENDO que $x_p(t)$ sea solución de la ecuación.

EJS: Si $f(t) = 2\sin 5t + 3\cos 5t \Rightarrow$ Propongo $x_p(t) = a\sin(5t) + b\cos(5t)$

$f(t) = 2t^2 + 7t + 8 \longrightarrow$ Propongo $x_p(t) = at^2 + bt + c$

⋮ (ver tablas)

iii) Escribo la solución total como $x(t) = x_H(t) + x_p(t)$ y determino c_1 y c_2 a partir de los datos iniciales $x(0) = x_0$ y $v(0) = v_0$.

OJO! ESTO SIEMPRE DEBE HACERSE AL FINAL (LUEGO DE SUMAR LA SOLUCIÓN PARTICULAR HALLADA)

2) Si las fuerzas dependen solo de la posición

$\Rightarrow$ ECUACIÓN PREINTEGRABLE : Tienen la forma general $\begin{cases} \ddot{\theta} = f(\theta) \\ \theta(t_0) = \theta_0 , \dot{\theta}(t_0) = \dot{\theta}_0 \end{cases}$ $(\ddot{x} = f(x))$

→ En general no puede hallarse la ley horaria $\theta(t)$

→ Sin embargo, se puede obtener $\dot{\theta}(\theta)$ (velocidad como función de la posición) ⇒ ES ALGO!

→ Método:

$$\ddot{\theta} = f(\theta) \xRightarrow{\times \dot{\theta}} \dot{\theta}\ddot{\theta} = f(\theta)\dot{\theta} \xRightarrow[\text{en } t]{\text{integrar}} \int_{t_0}^{t} \dot{\theta}\, \overbrace{\ddot{\theta}\, dt}^{d\dot{\theta}} = \int_{t_0}^{t} f(\theta) \overbrace{\dot{\theta}\, dt}^{d\theta}$$

$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \dot{\theta}\, dt = d\theta$

$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} \Rightarrow \ddot{\theta}\, dt = d\dot{\theta}$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\, d\dot{\theta}}_{} = \underbrace{\int_{\theta_0}^{\theta} f(\theta)\, d\theta}_{} \qquad (F' = f)$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{\dot{\theta}_0^2}{2} = F(\theta) - F(\theta_0) \Rightarrow \boxed{\frac{\dot{\theta}^2}{2} - F(\theta) = \frac{\dot{\theta}_0^2}{2} - F(\theta_0)}$$

LEY DE CONSERVACIÓN: LA CANTIDAD $\frac{\dot{\theta}^2}{2} - F(\theta)$ VALE LO MISMO EN $t = t_0$ QUE EN LOS TIEMPOS POSTERIORES.

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\theta}(\theta) = \pm \sqrt{\dot{\theta}_0^2 + 2(F(\theta) - F(\theta_0))}}$$

3) Si la ecuación es del tipo $\begin{cases} \ddot\theta + g(\theta)\dot\theta^2 = f(\theta) \\ \theta(t_0)=\theta_0,\ \dot\theta(t_0)=\dot\theta_0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ PODEMOS CONVERTIRLA EN UNA EC. LINEAL DE 1º ORDEN MEDIANTE EL CAMBIO DE VARIABLE $\boxed{\mu(\theta)=\dot\theta^2(t)}$

Nótese que μ será función de θ, no de t

$\underbrace{}$

Al resolverla no obtendremos $\theta(t)$, sino $\dot\theta(\theta)$

EQUIVALENTE A PREINTEGRAR

Veamos: $\dot\theta^2 = \mu(\theta) \xrightarrow{\text{deriv respecto a } t} 2\dot\theta\ddot\theta = \underbrace{\frac{d\mu}{d\theta}}_{\mu'}\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\dot\theta} \Rightarrow 2\dot\theta\ddot\theta = \mu'\dot\theta \Rightarrow \boxed{\ddot\theta = \frac{\mu'}{2}}$

El ' indicará derivación con respecto a θ

Además: $\boxed{\dot\theta^2 = \mu}$

$$\Rightarrow \underbrace{\ddot\theta}_{} + g(\theta)\dot\theta^2 = f(\theta)$$

$$\boxed{\frac{\mu'}{2} + g(\theta)\mu = f(\theta)}$$

EC. LINEAL DE 1º ORDEN

MÉTODO: i) Se resuelve la homogénea: $\frac{\mu'}{2} + g(\theta)\mu = 0 \Rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = -2g(\theta) \Rightarrow \underbrace{\int \frac{\overbrace{\mu' d\theta}^{=d\mu}}{\mu}} = -2\int g(\theta) + C$

VARIABLES SEPARABLES

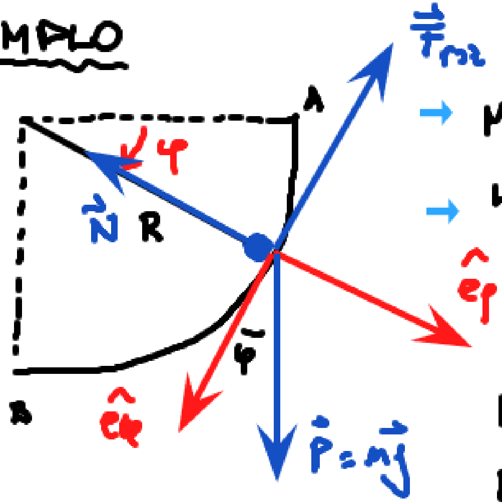
$\ln\mu = -2G(\theta) + C$

$\mu_H = K e^{-2G(\theta)}$

ii) Busco solución particular μ_P → A OJO (fácil si $g = cte$) / variación de constantes (Investigar)

iii) $\underbrace{\mu(\theta)}_{=\dot\theta^2(\theta)} = \mu_H(\theta) + \mu_P(\theta)$ y determino K con el $\underbrace{\text{dato inicial}}_{\text{DEBO TRADUCIRLO A LAS VARIABLES } \mu=\dot\theta^2,\ \theta}$

EJEMPLO



→ Masa puntual desliza por rampa circular de radio R partiendo del reposo desde A

→ Hallar la velocidad en función de la posición si a) la rampa es lisa

b) es rugosa de coeficiente dinámico $f = \frac{1}{5}$

Evidentemente es conveniente trabajar en POLARES $\Rightarrow \vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\,\hat{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\,\hat{e}_\varphi$

La fuerza neta es $\vec{F}_N = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{roz}$

→ Newton: $\vec{F}_N = m\vec{a}$

$$\vec{F}_N \cdot \hat{e}_\rho = m\vec{a}\cdot\hat{e}_\rho \Rightarrow mg\sin\varphi - N = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)$$

$$\vec{F}_N \cdot \hat{e}_\varphi = m\vec{a}\cdot\hat{e}_\varphi \Rightarrow mg\cos\varphi - fN = m(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})$$

→ VÍNCULO: $\rho = R = cte \Rightarrow \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0 \Rightarrow \begin{cases} mg\sin\varphi - N = -mR\dot{\varphi}^2 \\ mg\cos\varphi - fN = mR\ddot{\varphi} \end{cases}$

NINGUNA DE ELLAS ES LA EC. MOVIMIENTO. ¿POR QUÉ?

HAY QUE ELIMINAR N...

Tenemos: $\begin{cases} mg\sin\varphi - N = -mR\dot{\varphi}^2 \\ mg\cos\varphi - fN = mR\ddot{\varphi} \end{cases} \xRightarrow{\times(-f)}$

$$\begin{array}{r} -fmg\sin\varphi + fN = fmR\dot{\varphi}^2 \\ mg\cos\varphi - fN = mR\ddot{\varphi} \\ \hline mg(\cos\varphi - f\sin\varphi) = mR(\ddot{\varphi} + f\dot{\varphi}^2) \end{array}$$

$\div mR \Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} + f\dot{\varphi}^2 = g/R(\cos\varphi - f\sin\varphi)}$

ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

2) $f = 0 \Rightarrow \ddot{\varphi} = g/R\cos\varphi \Rightarrow$ ECUACIÓN DE LA FORMA $\ddot{\varphi} = f(\varphi) \Rightarrow$ PREINTEGRABLE

Entonces: $\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = g/R\cos\varphi\,\dot{\varphi} \Rightarrow \int_0^t \dot{\varphi}\underbrace{\ddot{\varphi}\,dt}_{=d\dot{\varphi}} = g/R\int_0^t \cos\varphi\underbrace{\dot{\varphi}\,dt}_{=d\varphi}$

$\Rightarrow \underbrace{\int_{\dot{\varphi}_0=0}^{\dot{\varphi}} \dot{\varphi}\,d\dot{\varphi}}_{=\frac{\dot{\varphi}^2}{2}} = g/R\underbrace{\int_{\varphi_0=0}^{\varphi}\cos\varphi\,d\varphi}$

$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = g/R(\sin\varphi - \cancel{\sin 0}) \Rightarrow \dot{\varphi}(\varphi) = \sqrt{\frac{2g}{R}\sin\varphi}$

$\boxed{\vec{v}(\varphi) = \sqrt{2gR\sin\varphi}\,\hat{e}_\varphi}$

b) $f \neq 0 \Rightarrow \ddot{\varphi} + f\dot{\varphi}^2 = g/R(\cos\varphi - f\sin\varphi) \rightarrow$ LA PRESENCIA DEL TÉRMINO $\dot{\varphi}^2$ NO PERMITE PREINTEGRAR

Sin embargo, la ecuación toma la forma $\underbrace{\ddot{\varphi} + g(\varphi)\dot{\varphi}^2 = F(\varphi)}$ con $\begin{cases} g(\varphi) = f \\ F(\varphi) = g/R(\cos\varphi - f\sin\varphi) \end{cases}$

UTILIZO EL C.V. $u(\varphi) = \dot{\varphi}^2(t)$

$$\dot{\varphi}^2 = u \Rightarrow 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = \frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = u'\dot{\varphi} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \ddot{\varphi} = u'/2 \\ \dot{\varphi}^2 = u \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{u'}{2} + fu = g/R(\cos\varphi - f\sin\varphi)$$

i) HOMOGÉNEA: $\frac{u'}{2} + fu = 0 \Rightarrow \frac{u'}{2} = -fu \Rightarrow \frac{u'}{u} = -2f \Rightarrow \underbrace{\int \frac{u'\,d\varphi}{u}} = -2f\int d\varphi + C$

$$Lu = -2f\varphi + C$$

$$\Rightarrow \boxed{u_H = Ke^{-2f\varphi}}$$

ii) Busco solución particular de la ec. completa $\frac{\mu'}{2} + f\mu = g/R(\cos\varphi - f\sin\varphi)$

Como $f(\varphi)$ es una combinación lineal de senos y cosenos, y además $g(\varphi) = f = cte$

$\Rightarrow$ Propongo $\underbrace{\mu_p(\varphi) = \alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi \Rightarrow \mu_p'(\varphi) = \alpha\cos\varphi - \beta\sin\varphi}$

$\Downarrow$ sustituyo en la ecuación

$$\underbrace{\alpha\cos\varphi - \beta\sin\varphi + 2f\alpha\sin\varphi + 2f\beta\cos\varphi} = 2g/R\cos\varphi - 2fg/R\sin\varphi$$

$$\underbrace{(\alpha + 2f\beta)}_{=2g/R}\cos\varphi + \underbrace{(2f\alpha - \beta)}_{=-2fg/R}\sin\varphi = 2g/R\cos\varphi - 2fg/R\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2f\beta = 2g/R \\ 2f\alpha - \beta = -2fg/R \end{cases} \xRightarrow{\text{VERIFICAR}} \begin{cases} \alpha = 2g/R\left(\frac{1-2f^2}{1+4f^2}\right) \\ \beta = \frac{6fg}{R(1+4f^2)} \end{cases}$$

Luego: $u(\varphi) = Ke^{-2f\varphi} + \alpha \sin\varphi + \beta\cos\varphi$, con α y β recién halladas

Falta determinar K $\Rightarrow$ DATO INICIAL: Sabíamos que $\underbrace{V(t=0)=0}$

Debemos traducir este dato a las variables u y φ

leta

En $t=0 \rightarrow \varphi = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi = 0 \\ \dot\varphi = V_0/R = 0 \Rightarrow \dot\varphi^2 = u = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{u(\varphi=0) = 0}$$

Finalmente: $u(\varphi=0) = K + \beta = 0 \Rightarrow K = -\beta \Rightarrow$

$$\boxed{u = \dot\varphi^2(\varphi) = \beta(\cos\varphi - e^{-2f\varphi}) + \alpha\sin\varphi}$$

con α y β hallados anteriormente

Nota: Una vez resuelta la dinámica podemos determinar la fuerza asociada al vínculo:

$$mg\sin\varphi - N = -mR\dot\varphi^2 \Rightarrow \boxed{N = mg\sin\varphi + mR\underbrace{\dot\varphi^2(\varphi)}_{\text{solución de la ec. diferencial}}}$$

(No es correcto dejarlo como función de φ y $\dot\varphi$ sin determinar $\dot\varphi(\varphi)$)