CLASE 2: MOVIMIENTO RELATIVO

OBJETIVOS:

→ Comprender la diferencia entre los concepto de DERIVADA ABSOLUTA y DERIVADA RELATIVA de un vector, y la vinculación entre ambas

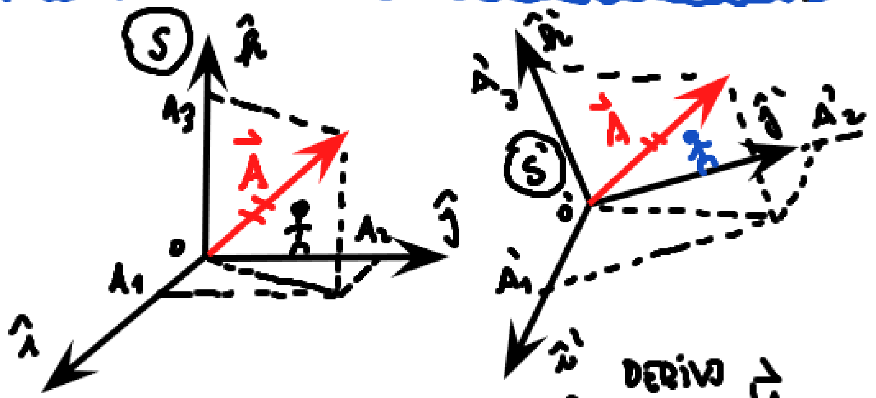
→ Aprender a determinar la velocidad angular de un sistema en rotación

→ Aprender a derivar versores móviles

→ Ser capaz de calcular la velocidad y la aceleración absolutas de una partícula mediante la derivación directa del vector posición.

→ Realizar la tarea anterior aplicando las fórmulas de Rivoblé y Coriolis. Identificar término relativo, de transporte y de Coriolis respecto a distintos sistemas de referencia

Relación entre las derivadas relativa y absoluta de un vector



Vamos a expresar EL MISMO vector $\vec{A}$ en términos de la base del sistema fijo (S) y del sistema móvil (S')

Fijo: $\vec{A} = A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}$ $\Longrightarrow$ DERIVO $\dfrac{d\vec{A}}{dt} = \dot{A}_1\hat{i} + \dot{A}_2\hat{j} + \dot{A}_3\hat{k}$

Móvil: $\underbrace{\vec{A} = A'_1\hat{i}' + A'_2\hat{j}' + A'_3\hat{k}'}_{\text{MISMO VECTOR EN 2 BASES DIFERENTES}}$ $\Longrightarrow$ $\dfrac{d\vec{A}}{dt} = \underbrace{\dot{A}'_1\hat{i}' + \dot{A}'_2\hat{j}' + \dot{A}'_3\hat{k}'}_{} + A'_1\dot{\hat{i}}' + A'_2\dot{\hat{j}}' + A'_3\dot{\hat{k}}'$

Estas expresiones coinciden y representan la tasa de cambio del vector desde el punto de vista de un observador fijo en S:

DERIVADA ABSOLUTA

"$\dfrac{\grave{d}\vec{A}}{dt}$" = **DERIVADA RELATIVA**

Tasa de cambio del vector según un observador fijo en S':

Desde su punto de vista los versores $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ están fijos

$\Longrightarrow$ Por ahora: $\dfrac{d\vec{A}}{dt} = \dfrac{\grave{d}\vec{A}}{dt} + A'_1\dot{\hat{i}}' + A'_2\dot{\hat{j}}' + A'_3\dot{\hat{k}}'$

→ Teníamos : $\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \dot{A}_1 \hat{i}' + \dot{A}_2 \hat{j}' + \dot{A}_3 \hat{k}'$

→ Se demuestra (ver notas) que : $\exists\ \vec{w}_{s'/s} \ / \left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{i}}' = \vec{w}_{s'/s} \times \hat{i}' \\ \dot{\hat{j}}' = \vec{w}_{s'/s} \times \hat{j}' \\ \dot{\hat{k}}' = \vec{w}_{s'/s} \times \hat{k}' \end{array} \right.$

MUY IMPORTANTE : PROPORCIONA UN MÉTODO SENCILLO PARA DERIVAR VERSORES MÓVILES (BASTA CON EFECTUAR LOS PRODUCTOS VECTORIALES DE $\vec{w}$ CON LOS VERSORES)

→ $\vec{w}_{s'/s}$ = Velocidad angular del sistema S' respecto del S ⟶ Asociado al CAMBIO DE ORIENTACIÓN de los versores de S' en relación a los de S

→ Sustituyendo y usando la linealidad del x : $\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \vec{w} \times \big(\underbrace{A_1 \hat{i}' + A_2 \hat{j}' + A_3 \hat{k}'}_{\overset{(2)}{=} \vec{A}} \big)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \vec{w}_{s'/s} \times \vec{A}}$$

OBSERVACIONES (en relación a la ecuación $\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \vec{\omega}_{S'/S} \times \vec{A}$)

→ Si $\vec{A}$ Fijo en S' $\Rightarrow$ $\frac{d'\vec{A}}{dt} = 0$ $\Rightarrow$ $\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}$

→ En particular, esto vale para los versores $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$ que definen el sistema móvil: $\begin{cases} \dot{\hat{i}}' = \vec{\omega} \times \hat{i}' \\ \dot{\hat{j}}' = \vec{\omega} \times \hat{j}' \\ \dot{\hat{k}}' = \vec{\omega} \times \hat{k}' \end{cases}$ (ya visto)

→ Si $\vec{A} \parallel \vec{\omega}$ $\Rightarrow$ $\vec{A} \times \vec{\omega} = 0$ $\Rightarrow$ $\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt}$

→ En particular, esto se cumple para el propio $\vec{\omega}$: $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d'\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}$

→ Esto será MUY IMPORTANTE más adelante en el curso ya que permitirá obtener la derivada absoluta de $\vec{\omega}$ simplemente calculando la derivada relativa, es decir:

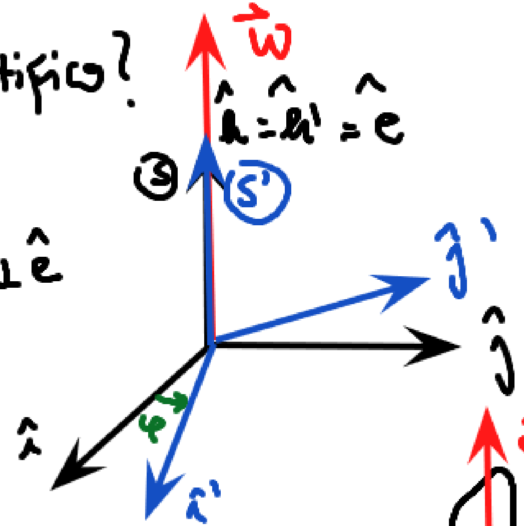
$$\text{Si } \vec{\omega} = \omega_1' \hat{i}' + \omega_2' \hat{j}' + \omega_3' \hat{k}' \Rightarrow \dot{\vec{\omega}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d'\vec{\omega}}{dt} = \underbrace{\dot{\omega}_1' \hat{i}' + \dot{\omega}_2' \hat{j}' + \dot{\omega}_3' \hat{k}'}_{\text{A PESAR DE QUE LOS VERSORES SON MÓVILES!}}$$

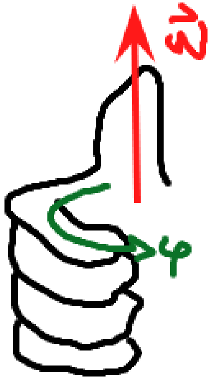
→ Vimos que para derivar vectores móviles se requiere $\vec{\omega}_{S'/S}$. ¿Cómo la identifico?

→ Hay varias posibilidades:

1) Si existe una dirección $\hat{e}$ fija en S' $\longrightarrow$ $\vec{\omega}_{S'/S} = \dot{\varphi}\,\hat{e}$

↳ Medido en el plano $\Pi \perp \hat{e}$ respetando "regla de la mano derecha"





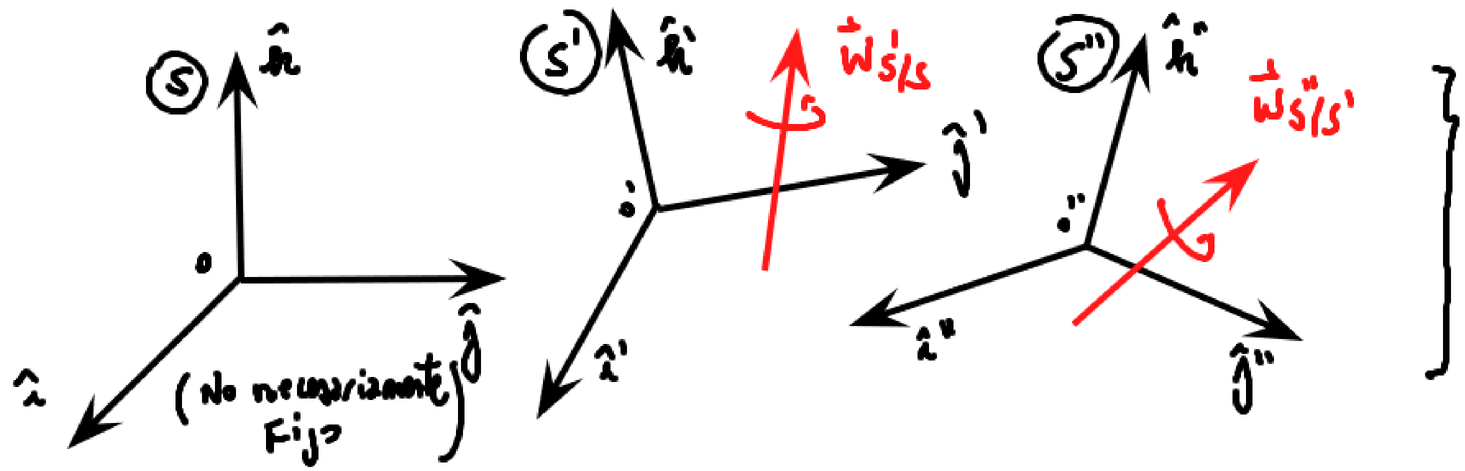
En particular, en los PROBLEMAS PLANOS se cumple lo anterior $\Rightarrow$ $\vec{\omega} \perp \Pi$

2) Utilizando que $\begin{cases} \dot{\hat{i}}' = \vec{\omega} \times \hat{i}' \\ \dot{\hat{j}}' = \vec{\omega} \times \hat{j}' \\ \dot{\hat{k}}' = \vec{\omega} \times \hat{k}' \end{cases}$ (Peor situación posible)

Esto implica:
→ Escribir $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ en base conveniente (En gral, fija) y derivarlos
→ Plantear $\vec{\omega} = \omega_1 \hat{i} + \omega_2 \hat{j} + \omega_3 \hat{k}$
→ Imponer las relaciones anteriores y despejar $\omega_1, \omega_2, \omega_3$

Método útil cuando NO TENGO IDEA de la dirección de $\vec{\omega}$ (cono rodando en un plano, etc)

3) Empleando el TEOREMA DE ADICIÓN DE VELOCIDADES ANGULARES (RECOMENDADO)



$$\boxed{\vec{\omega}_{S''/S} = \vec{\omega}_{S''/S'} + \vec{\omega}_{S'/S}}$$

→ LA CLAVE ESTÁ EN LA ELECCIÓN DEL SISTEMA INTERMEDIO S' :

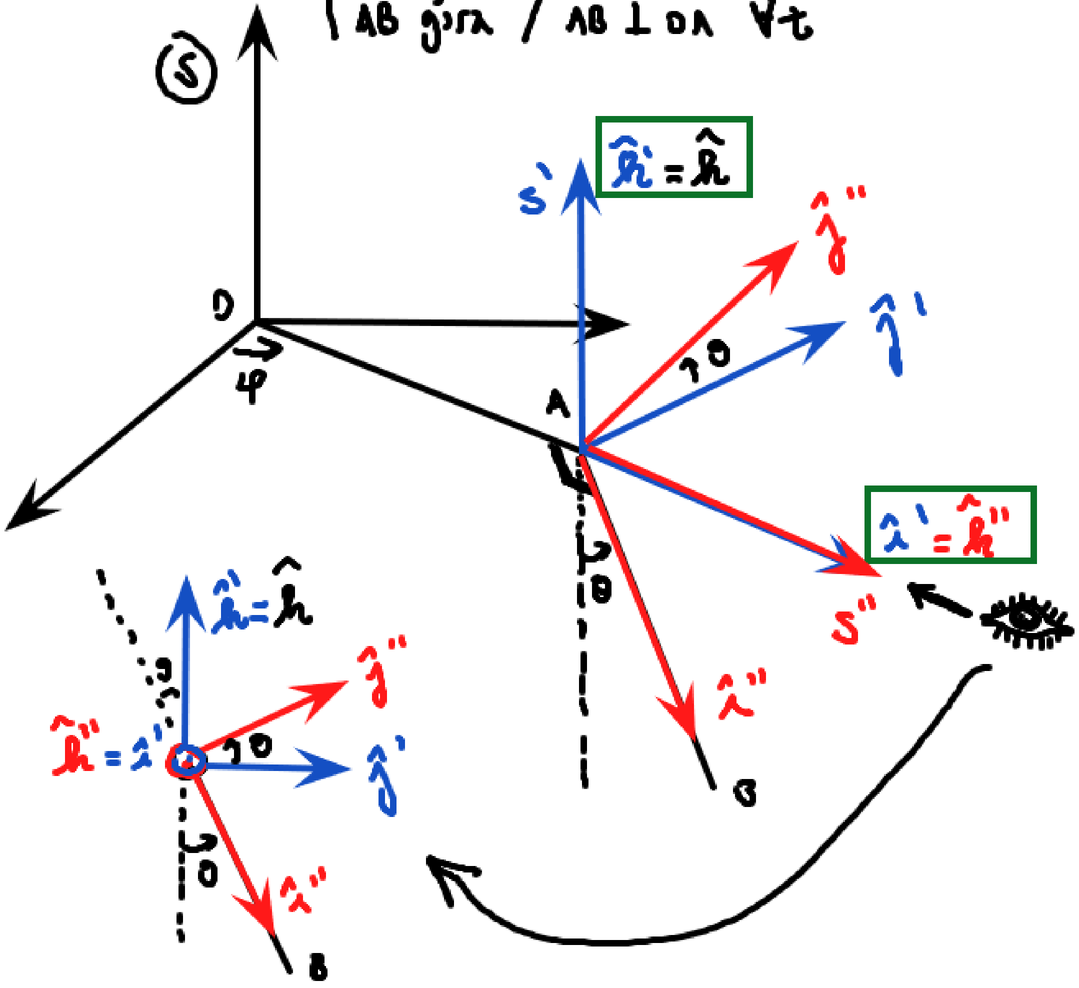
IDEALMENTE DEBE TENER UNA DIRECCIÓN FIJA RESPECTO A S ($\hat{e}_1$) Y OTRA FIJA RESPECTO A S'' ($\hat{e}_2$)

$$\vec{\omega}_{S'/S} = \dot{\alpha}\,\hat{e}_1$$
$$\vec{\omega}_{S''/S'} = \dot{\beta}\,\hat{e}_2$$

(α, β medidos en los planos $\perp$s a $\hat{e}_1$ y $\hat{e}_2$)

→ Si lo anterior no ocurre el teorema vale igual pero su utilidad se ve limitada debido a la dificultad para determinar las $\vec{\omega}$'s

EJEMPLO: { OA gira en plano horizontal, O fijo
{ AB gira / AB ⊥ OA $\forall t$



OBJETIVO: Hallar la velocidad angular de la varilla AB

Esto equivale a determinar la $\vec{w}$ de un sistema de referencia SOLIDARIO a la varilla

$$\underbrace{\text{referencia SOLIDARIO a la varilla}}_{S'' \to \{A, \hat{i}'', \hat{j}'', \hat{k}''\}}$$

Necesito un sistema S' intermediario ÚTIL

$\Rightarrow$ $S' \to \{A, \hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$ ¿Por qué?

Porque:
- $\hat{k}' = \hat{k} \Rightarrow \vec{w}_{S'/S} = \dot{\varphi}\,\hat{k}$
- $\hat{i}' = \hat{k}'' \Rightarrow \vec{w}_{S''/S'} = \dot{\theta}\,\hat{i}'$

TEO ADICIÓN $\Rightarrow$ $$\boxed{\vec{w}_{S''/S} = \vec{w}_{S''/S'} + \vec{w}_{S'/S} = \dot{\theta}\,\hat{i}' + \dot{\varphi}\,\hat{k}}$$

Más adelante veremos que conviene expresarla en la base solidaria $\Rightarrow$ $\hat{k} = -\cos\theta\,\hat{i}'' + \sin\theta\,\hat{j}''$; $\hat{i}' = \hat{k}''$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{w}_{S''/S} = -\dot{\varphi}\cos\theta\,\hat{i}'' + \dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{j}'' + \dot{\theta}\,\hat{k}''}$$

→ Tenemos: $\vec{\omega}_{s''/s} = -\dot{\varphi}\cos\theta\,\hat{i}'' + \dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{j}'' + \dot{\theta}\,\hat{k}''$

→ Si quisiera derivar versores:

$$\begin{cases} \dot{\hat{i}}'' = \vec{\omega}_{s''/s} \times \hat{i}'' = (-\dot{\varphi}\cos\theta\,\hat{i}'' + \dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{j}'' + \dot{\theta}\,\hat{k}'') \times \hat{i}'' = -\dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{k}'' + \dot{\theta}\,\hat{j}'' \\ \dot{\hat{j}}'' = \omega_{s''/s} \times \hat{j}'' = -\dot{\varphi}\cos\theta\,\hat{k}'' - \dot{\theta}\,\hat{i}'' \\ \dot{\hat{k}}'' = \vec{\omega}_{s''/s} \times \hat{k}'' = \dot{\varphi}\cos\theta\,\hat{j}'' + \dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{i}'' \end{cases}$$

(Como $\hat{i}'', \hat{j}'', \hat{k}''$ es una TERNA DIRECTA

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{i}'' \times \hat{j}'' = \hat{k}'' \\ \hat{j}'' \times \hat{k}'' = \hat{i}'' \\ \hat{k}'' \times \hat{i}'' = \hat{j}'' \end{cases}$$)

(Expresando $\vec{\omega}$ en esa base queda muy fácil)

→ OJO! Para derivar versores de una base móvil DEBO EMPLEAR LA VELOCIDAD ANGULAR CORRESPONDIENTE AL SISTEMA DEFINIDO POR ESOS VERSORES

→ Por ejemplo, para el sistema S' se tiene que $\vec{\omega}_{s'/s} = \dot{\varphi}\,\hat{k}'$ →

$$\begin{cases} \dot{\hat{i}}' = \dot{\varphi}\,\hat{k}' \times \hat{i}' = \dot{\varphi}\,\hat{j}' \\ \dot{\hat{j}}' = \dot{\varphi}\,\hat{k}' \times \hat{j}' = -\dot{\varphi}\,\hat{i}' \\ \dot{\hat{k}}' = \dot{\varphi}\,\hat{k}' \times \hat{k}' = 0 \end{cases}$$

(es una base de coord. cilíndricas!)

→ Si insisto en usar otra $\vec{\omega}$ ⇒ NO OLVIDAR LA DERIVADA RELATIVA

(NO RECOMENDADO)

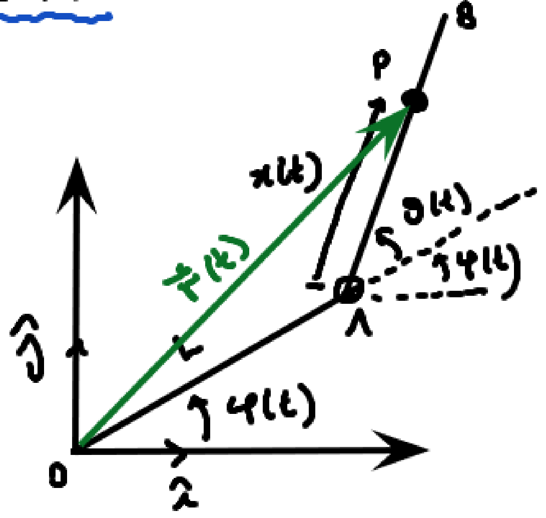
(seguramente el versor ya no sea fijo en el otro sistema)

CÁLCULO DE LA VELOCIDAD Y LA ACELERACIÓN

→ **MÉTODO ESTÁNDAR:** Escribo el vector $\vec{r}(t)$ EN EL SISTEMA ABSOLUTO Y DERIVO (RECOMENDADO)

Nota: NO ESTOY OBLIGADO A USAR LA BASE DEL SISTEMA FIJO (SÍ EL ORIGEN)
(cualquier vector puede ser expresado en cualquier base)

EJEMPLO:



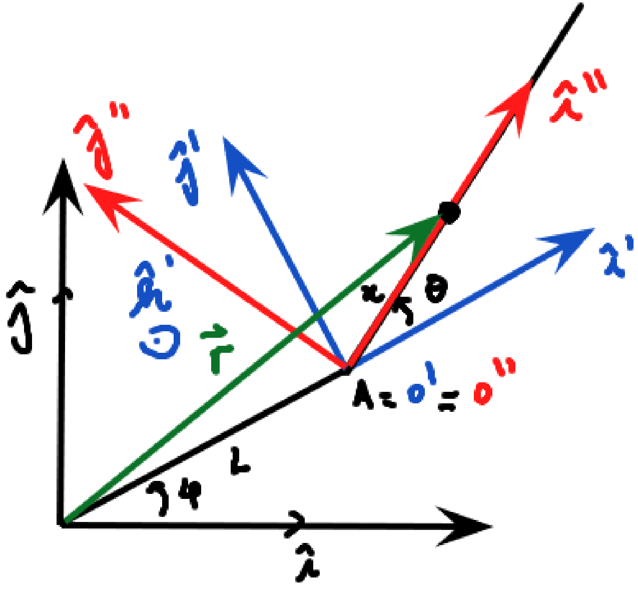
Queremos escribir la velocidad y la aceleración de P

¿Puedo trabajar en el sistema fijo? Puedo, pero NO CONVIENE

Veamos: $\vec{r}(t) = [L\cos\varphi + x\cos(\varphi+\theta)]\,\hat{\imath} + [L\sin\varphi + x\sin(\varphi+\theta)]\,\hat{\jmath}$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = [-L\sin\varphi\,\dot\varphi + \dot{x}\cos(\varphi+\theta) - x\sin(\varphi+\theta)(\dot\varphi+\dot\theta)]\,\hat{\imath}$$
$$+ [L\cos\varphi\,\dot\varphi + \dot{x}\sin(\varphi+\theta) + x\cos(\varphi+\theta)(\dot\varphi+\dot\theta)]\,\hat{\jmath} \quad \text{ETC...}$$

⇒ Queda claro que los versores $\{\hat{\imath},\hat{\jmath}\}$ de la base fija no son los más adecuados para describir el movimiento
(lo serán menos aún cuando consideremos las fuerzas que actúan sobre P)



→ Defino los sistemas: $S'\{O'=A, \hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$ ⇒ $\vec{\omega}_{S'/S} = \dot{\varphi}\,\hat{k}$

$S''\{O''=A, \hat{i}'', \hat{j}'', \hat{k}''\}$ ⇒ $\vec{\omega}_{S''/S'} = \dot{\theta}\,\hat{k}$

⇓ TEO. ADICIÓN

$\vec{\omega}_{S''/S} = (\dot{\theta}+\dot{\varphi})\,\hat{k}$

AL DEFINIR LOS SISTEMAS YA CONVIENE INDICAR SUS VELOCIDADES ANGULARES (LAS NECESITAREMOS PARA DERIVAR LOS VERSORES)

→ En término de los nuevos versores:

$$\boxed{\vec{r} = L\,\hat{i}' + x\,\hat{i}''}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = L\,\dot{\hat{i}}' + \dot{x}\,\hat{i}'' + x\,\dot{\hat{i}}''$$

$$\boxed{\vec{v} = L\dot{\varphi}\,\hat{j}' + \dot{x}\,\hat{i}'' + x(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\,\hat{j}''}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = L\ddot{\varphi}\,\hat{j}' + L\dot{\varphi}\,\dot{\hat{j}}' + \ddot{x}\,\hat{i}'' + \dot{x}\,\dot{\hat{i}}'' + \dot{x}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\,\hat{j}'' + x(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi})\,\hat{j}'' + x(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\,\dot{\hat{j}}''$$

$$\vec{a} = L\ddot{\varphi}\,\hat{j}' - L\dot{\varphi}^2\,\hat{i}' + \ddot{x}\,\hat{i}'' + \dot{x}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\,\hat{j}'' + \dot{x}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\,\hat{j}'' + x(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi})\,\hat{j}'' - x(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2\,\hat{i}''$$

$$\boxed{\vec{a} = L\ddot{\varphi}\,\hat{j}' - L\dot{\varphi}^2\,\hat{i}' + \ddot{x}\,\hat{i}'' + 2\dot{x}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\,\hat{j}'' + x(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi})\,\hat{j}'' - x(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2\,\hat{i}''}$$

DERIVADAS DE LOS VERSORES

$$\dot{\hat{i}}' = \vec{\omega}_{S'/S} \times \hat{i}' = \dot{\varphi}\,\hat{k} \times \hat{i}' = \dot{\varphi}\,\hat{j}'$$

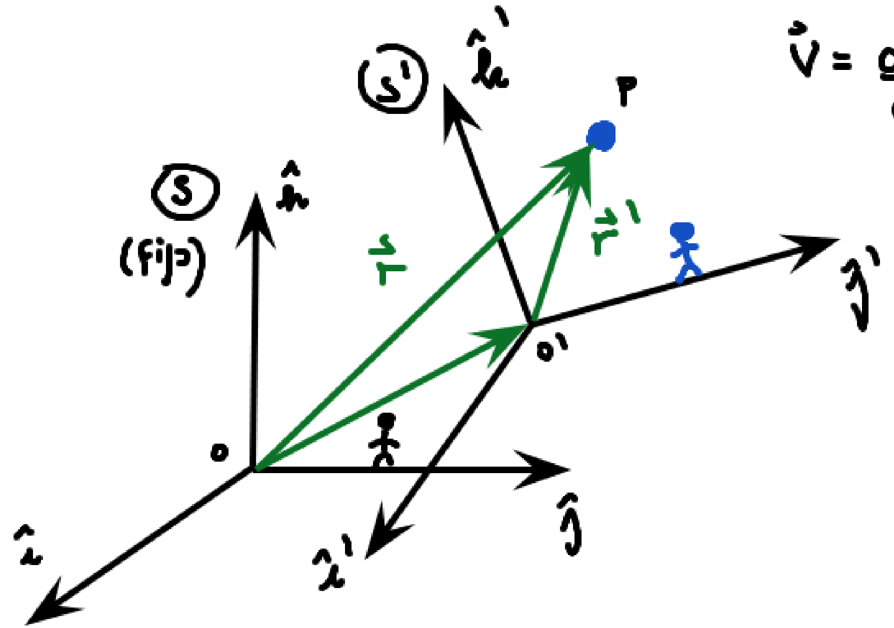
$$\dot{\hat{j}}' = \vec{\omega}_{S'/S} \times \hat{j}' = \dot{\varphi}\,\hat{k} \times \hat{j}' = -\dot{\varphi}\,\hat{i}'$$

$$\dot{\hat{i}}'' = \vec{\omega}_{S''/S} \times \hat{i}'' = (\dot{\theta}+\dot{\varphi})\,\hat{k}'' \times \hat{i}'' = (\dot{\theta}+\dot{\varphi})\,\hat{j}''$$

$$\dot{\hat{j}}'' = \vec{\omega}_{S''/S} \times \hat{j}'' = (\dot{\theta}+\dot{\varphi})\,\hat{k}'' \times \hat{j}'' = -(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\,\hat{i}''$$

→ MÉTODO 2: ROVERBAL Y CORIOLIS

"Teorema" de Roverbal



$$\left.\begin{array}{l}\vec r = \vec r\,' + \vec{OO'} \\ \vec v = \dfrac{d\vec r}{dt}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec v = \frac{d\vec r\,'}{dt} + \overbrace{\frac{d(\vec{OO'})}{dt}}^{=\ \vec V_{O'}} \quad (1)$$

$\vec V_{O'}$ = Velocidad ABSOLUTA de O' (porque O es fijo)

¿Es esto la velocidad relativa? No!

La velocidad relativa es la TASA DE CAMBIO DE $\vec r\,'$ DESDE EL PUNTO DE VISTA DE UN OBSERVADOR FIJO EN S'

⇒ ESO CORRESPONDE A LA DERIVADA RELATIVA: $\vec v\,' = \frac{d'\vec r\,'}{dt}$

Lo bueno es que ya conocemos la relación entre ambas derivadas: $\frac{d\vec A}{dt} = \frac{d'\vec A}{dt} + \vec\omega_{S'/S}\times\vec A$

$$\Rightarrow \frac{d\vec r\,'}{dt} = \overbrace{\frac{d'\vec r\,'}{dt}}^{=\ \vec v\,'} + \vec\omega\times\vec r\,' \quad (2) \qquad \xRightarrow{(1),(2)} \qquad \boxed{\vec v = \vec v\,' + \vec V_{O'} + \vec\omega_{S'/S}\times\vec r\,'}$$

ROVERBAL

→ Tenemos el Teorema de Roverbal: $\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_{o'} + \vec{\omega}_{s'/s} \times \vec{r}\,'}$, donde

$\vec{v}\,' = \frac{d'\vec{r}\,'}{dt}$ es la velocidad relativa al sistema S' ( )

$$\vec{v}_{o'} + \vec{\omega}_{s'/s} \times \vec{r}\,' \equiv \vec{V}_T \rightarrow \text{VELOCIDAD DE TRANSPORTE}$$

Asociado a la TRASLACIÓN de S'

Asociado a la ROTACIÓN de S'

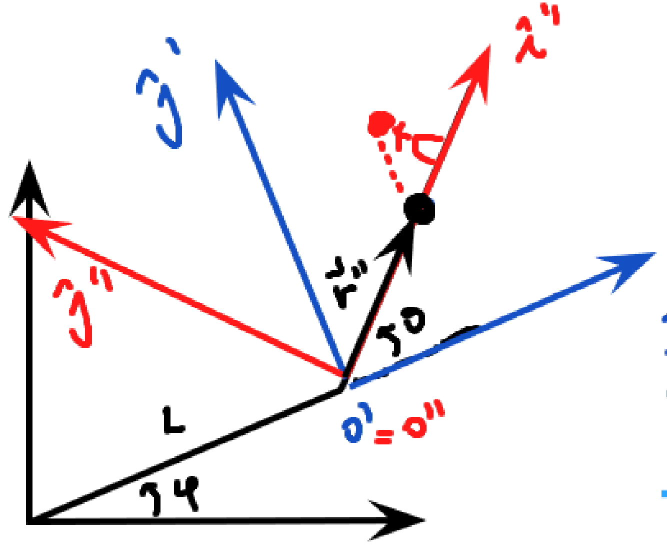
Se tiene por el solo hecho de estar en S', aunque se esté en reposo en ese sistema

→ Derivando nuevamente y aplicando la relación entre $\frac{d\vec{\lambda}}{dt}$ y $\frac{d'\vec{\lambda}}{dt}$ se obtiene (HACERLO):

$$\boxed{\vec{a} = \underbrace{\vec{a}\,'}_{\vec{a}\,' = \frac{d'\vec{v}\,'}{dt}\ (\text{RELATIVA})} + \underbrace{\vec{a}_{o'} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')}_{\equiv\, \vec{a}_T\ (\text{TRANSPORTE})} + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}\,'}_{\equiv\, \vec{a}_C\ (\text{CORIOLIS})}}$$

(TEOREMA DE CORIOLIS)

→ Retomemos el ejemplo:



Para calcular $\vec{v}$ y $\vec{a}$ usando Rover 2 y Coriolis debemos ELEGIR UN SISTEMA MÓVIL AUXILIAR ⇒ Lo haremos tomando $S''\{O''=A, \hat{i}'', \hat{j}'', \hat{k}''\}$

(e indicarlo claramente!)

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_{S''/S} = (\dot{\varphi}+\dot{\theta})\,\hat{k}''}$$

⇒ PARA NO CONFUNDIRNOS REESCRIBIMOS LOS TEOREMAS CAMBIANDO LOS SUPRAÍNDICES: $\vec{V} = \vec{V}'' + \vec{V}_{O''} + \vec{\omega}_{S''/S} \times \vec{r}''$, idem Coriolis

→ $\vec{r}'' = x\,\hat{i}'' \Rightarrow \boxed{\vec{V}'' = \dfrac{d\vec{r}''}{dt} = \dot{x}\,\hat{i}''}$ ($\hat{i}''$ es fijo en S'')

→ $\vec{\omega} \times \vec{r}'' = (\dot{\varphi}+\dot{\theta})\,\hat{k}'' \times x\,\hat{i}'' \Rightarrow \boxed{\vec{\omega} \times \vec{r}'' = x(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\,\hat{j}''}$

→ $\vec{r}_{O''} = L\,\hat{i}' \Rightarrow \boxed{\vec{V}_{O''} = L\dot{\varphi}\,\hat{j}'}$

HAY QUE TRABAJAR CON ORDEN!

Roverbal ⇒ $\vec{V} = \vec{V}'' + \vec{V}_{O''} + \vec{\omega}_{S''/S} \times \vec{r}'' \Rightarrow \boxed{\vec{V} = \dot{x}\,\hat{i}'' + L\dot{\varphi}\,\hat{j}' + x(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\,\hat{j}''}$ ✓

Ahora la aceleración: (Recordar que $\vec{w} = \vec{w}_{S''/S} = (\dot{\varphi}+\dot{\theta})\hat{k}''$)

$\rightarrow \vec{r}'' = x\hat{i}'' \Rightarrow \vec{v}'' = \dot{x}\hat{i}'' \Rightarrow \boxed{\vec{a}'' = \dfrac{d''(\dot{x}\hat{i}'')}{dt} = \ddot{x}\hat{i}''}$ ($\hat{i}''$ es constante en S'')

$\rightarrow \vec{r}_{O''} = L\hat{i}' \Rightarrow \vec{v}_{O''} = L\dot{\varphi}\hat{j}' \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{O''} = L\ddot{\varphi}\hat{j}' - L\dot{\varphi}^2\hat{i}'}$

$\rightarrow \vec{w}\times(\underbrace{\vec{w}\times\vec{r}''}_{x(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\hat{j}''}) = (\dot{\varphi}+\dot{\theta})\hat{k}''\times(x(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\hat{j}'') \Rightarrow \boxed{\vec{w}\times(\vec{w}\times\vec{r}'') = -x(\dot{\varphi}+\dot{\theta})^2\hat{i}''}$

$\rightarrow \dot{\vec{w}}\times\vec{r}'' = (\ddot{\varphi}+\ddot{\theta})\hat{k}''\times(x\hat{i}'') \Rightarrow \boxed{\dot{\vec{w}}\times\vec{r}'' = x(\ddot{\varphi}+\ddot{\theta})\hat{j}''}$

$\rightarrow 2\vec{w}\times\vec{v}'' = 2(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\hat{k}''\times\dot{x}\hat{i}'' \Rightarrow \boxed{2\vec{w}\times\vec{v}'' = 2\dot{x}(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\hat{j}''}$

$\Rightarrow \vec{a} = \vec{a}'' + \vec{a}_{O''} + \dot{\vec{w}}\times\vec{r}'' + \vec{w}\times(\vec{w}\times\vec{r}'') + 2\vec{w}\times\vec{v}'' \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \ddot{x}\hat{i}'' + L\ddot{\varphi}\hat{j}' - L\dot{\varphi}^2\hat{i}' + x(\ddot{\varphi}+\ddot{\theta})\hat{j}'' - x(\dot{\varphi}+\dot{\theta})^2\hat{i}'' + 2\dot{x}(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\hat{j}''}$ ✓

SE SUGIERE REPETIR EL CÁLCULO EMPLEANDO $S'\{O'=A, \hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$ COMO SISTEMA MÓVIL AUXILIAR

Nota: Cuando apliquen Newton será necesario proyectar la aceleración en una ÚNICA BASE ADECUADA