Universidad de la República
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística, Prof. Ing. Rafael Laguardia

Matemática Discreta 1
Primer semestre de 2025

PRÁCTICO 1: Inducción completa

Ejercicio 1. Probar de, al menos, dos formas distintas que para todo natural n se cumple que

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ejercicio 2. Probar que para todo natural n se cumple que

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ejercicio 3. Probar que para todo entero positivo n existen exactamente 2^n listas binarias de largo n.

Ejercicio 4. Probar que para todo entero n tal que $n \geq 3$ se cumple que $n^2 \geq 2n + 1$.

Ejercicio 5. Probar que existe un entero positivo n_0 tal que para todo entero n que cumple que $n \geq n_0$ se satisface la siguiente desigualdad: $2^n \geq n^2$.

Ejercicio 6. Probar que para todo número natural n se cumple que $7^n - 2^n$ es múltiplo de 5 .

Ejercicio 7. Probar que $7^{2025} - 1$ es múltiplo de 6.

Ejercicio 8. Demostrar que a partir de un segmento de longitud 1 en el plano es posible construir para cada entero positivo n un segmento de longitud $\sqrt{n}$ empleando únicamente regla y compás.

Ejercicio 9. Sea n un entero positivo cualquiera. Consideremos un tablero cuadrado compuesto por $2^n \times 2^n$ cuadraditos al cual le falta un cuadradito en algún lugar. Demostrar que es posible cubrir dicho tablero con piezas en forma de L formadas por 3 cuadraditos.

Ejercicio 10. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ la sucesión definida por las condiciones iniciales $a_1 = 3$, $a_2 = 10$, $a_3 = 30$ que cumple que $a_{n+3} = 2a_{n+2} + 7a_{n+1} + a_n$ para cada entero positivo n. Probar que $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $a_n \geq 3^n$.

Ejercicio 11. Probar que todo entero positivo n tal que $n \geq 2$ es primo o es producto de dos o más números primos.

PRÁCTICO 2: Combinatoria I

Regla del producto, permutaciones, arreglos y combinaciones sin repetición

Ejercicio 1. Un alfabeto consta de 5 vocales y 22 consonantes. ¿Cuántas palabras de longitud 6 se pueden formar con tal alfabeto que no tengan ni dos consonantes ni dos vocales juntas?

Ejercicio 2. La final de un campeonato de fútbol debe definirse por penales. Para patearlos, la directora técnica debe elegir en orden 5 jugadoras diferentes de un total de 11. ¿De cuántas formas puede hacerlo? Responder a la misma pregunta si la capitana del equipo patea el quinto penal.

Ejercicio 3.

a. ¿Cuántas palabras distintas se pueden formar usando todas las letras de la palabra *ÁRBOL*?

b. ¿Cuántas palabras de largo 3 se pueden formar usando letras distintas de la palabra *ÁRBOL* ?

c. ¿Cuántas palabras distintas pueden obtenerse permuntando las letras de la palabra *ALGORITMO*? *Sugerencia: determinar primero la cantidad de formas de colocar las dos letras O y luego determinar la cantidad de formas de acomodar las restantes letras de la palabra ALGORITMO.*

Ejercicio 4.

a. ¿De cuántas formas se puede colorear una bandera de cuatro franjas horizontales si disponemos de cinco colores, de modo que franjas contiguas no tengan el mismo color?

b. Ídem a la parte **a**. con la restricción de que el color de la primera y última franja sean distintos.

Ejercicio 5. ¿Cuántos números enteros pares comprendidos entre 100 y 1000 tienen sus 3 dígitos distintos?

Ejercicio 6. ¿De cuántas formas se puede elegir un presidente, un secretario y un tesorero dentro de un grupo de 12 personas?

Ejercicio 7. Un comité de 10 personas será elegido entre 8 hombres y 8 mujeres. De cuántas formas se puede hacer una selección si:

a. no hay restricciones;

b. debe haber 5 hombres y 5 mujeres;

c. deben haber más mujeres que hombres;

d. deben haber al menos 7 mujeres.

Ejercicio 8. En una playa se juntan 13 personas y deciden hacer 4 equipos para jugar al vóleibol. Para ello van a hacer tres equipos de 3 jugadores y un único equipo de 4 jugadores. Dentro de las 13 personas, una de ellas es sumamente habilidosa y otra que muy poco habilidosa. Las restantes 11 personas son de nivel medio en este deporte. Para equiparar, se decide colocar a la persona habilidosa en uno de los equipos de 3 jugadores y a la persona poco habilidosa en el único equipo de 4 jugadores.
¿De cuántas formas se pueden armar los equipos?

Ejercicio 9. En una prueba que consta de 10 preguntas un estudiante decide responder solo 6, y quiere que al menos 3 de ellas estén entre las 5 primeras. ¿De cuántas formas distintas podría hacerlo?

Ejercicio 10. Para una selección de fútbol fueron convocados 2 goleras, 6 zagueras, 7 mediocampistas y 4 atacantes. ¿De cuántos modos es posible formar una selección con una golera, 4 zagueras, 4 mediocampistas y 2 atacantes?

Ejercicio 11. Consideremos un mazo de 48 barajas españolas. Cada una de las 48 cartas tiene asociado un valor (número del 1 al 12) y un palo (oro, copa, espada o basto). A las cartas con valor 1 se las llaman ases y a las cartas con valor 10 se las llaman sotas. Un par consiste en dos cartas con el mismo valor. ¿De cuántas formas puede un jugador extraer 5 cartas de una baraja común (de 48 cartas) y obtener

a. cinco cartas del mismo palo?

b. cuatro ases?

c. cuatro cartas del mismo valor?

d. tres ases y dos sotas?

e. tres ases y un par?

Ejercicio 12.

a. Hallar la cantidad de subconjuntos de un conjunto con n elementos utilizando la fórmula del binomio.

b. Probar que: $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \, C_j^n = 0.$

c. Hallar el valor de la siguiente suma: $\displaystyle\sum_{k=0}^{203} C_k^{203} \, (-4)^k$.

Ejercicio 13. Considerar la suma: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} C_m^i.$

a. Calcular la suma para algunos casos, usando el triángulo de Pascal.
Aclaración: si $i < m$ asumimos $C_m^i = 0.$

b. Conjeture cuánto suma en general y demuéstrelo por Inducción Completa.

Ejercicio 14. Usando que $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$, probar que

$$\sum_{i=0}^{i=n} (C_i^n)^2 = C_n^{2n}.$$

PRÁCTICO 3: COMBINATORIA II
PERMUTACIONES, ARREGLOS Y COMBINACIONES CON REPETICIÓN

Ejercicio 1. ¿Cuántas palabras distintas pueden construirse (con o sin sentido), usando todas las letras de la palabra ASALAS?

Ejercicio 2. (Ej. 1 del examen de diciembre de 2016)

a. ¿Cuántas palabras se pueden formar con las letras de SKYWALKER que empiecen en vocal y no contengan la secuencia RL?

b. ¿Cuántas palabras se pueden formar con las letras de SKYWALKER que empiecen en vocal y no contengan la secuencia RK?

Ejercicio 3. ¿De cuántas maneras diferentes puede un Rey, desplazarse desde la esquina inferior izquierda (a1) hasta la esquina superior derecha (h8) de un tablero de ajedrez, admitiendo únicamente movimientos hacia arriba o hacia la derecha (no se permite movimiento en diagonal)?

Ejercicio 4. Determine cuántas funciones $f : \{1, 2, \ldots, 10\} \to \{1, 2, \ldots, 4\}$ verifican que cada elemento i en $\{1, 2, 3, 4\}$ tiene exactamente i preimágenes.

Ejercicio 5. Dados $A = \{1, 2, \ldots, m\}$ y $B = \{1, 2, \ldots, n\}$, hallar la cantidad de funciones $f : A \to B$ tales que:

a. No hay restricciones.

b. La función f es inyectiva.

c. La función f es biyectiva.

d. La función f es monótona creciente estrictamente.

e. La función f es monótona creciente.

Ejercicio 6. Exprese los resultados de las siguientes preguntas como una combinación con repetición.

(a) ¿Cuántas fichas diferentes hay en el juego popular del dominó?

(b) ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener al arrojar simultáneamente 3 dados idénticos?

Ejercicio 7.

(a) Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 4$.

(b) Hallar la cantidad de soluciones naturales de la inecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 < 4$.

(c) Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ tal que se cumplen simultáneamente las siguientes condiciones: $x_1 \geq 3$ y $x_4 \geq 3$.

Ejercicio 8.

(a) ¿Cuántas formas hay de sentar 5 personas en 12 sillas puestas en línea?

(b) Ídem pero las personas no deben quedar sentadas en asientos contiguos.

Ejercicio 9. Hallar la cantidad de maneras de distribuir $2r$ pelotitas de las cuales la mitad son rojas y la otra mitad son azules en n cajas diferentes (las pelotitas del mismo color se consideran indistinguibles).

Ejercicio 10. ¿De cuántas formas puede distribuir un maestro 8 bizcochos de chocolate y 7 de crema entre 3 estudiantes si cada estudiante desea al menos un bizcocho de cada tipo?

Ejercicio 11.

a. Sean n, t enteros positivos y $n_1, \ldots, n_t$ números naturales tales que $n_1 + n_2 + \cdots + n_t = n$. Demostrar que el coeficiente de $x_1^{n_1}\, x_2^{n_2} \ldots x_t^{n_t}$ en $(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^n$ es $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_t!}$.

b. Determinar el coeficiente de x^4 en el desarrollo de $\left(x^3 - x^2 + x - 1\right)^6$.

c. Hallar el coeficiente de x^6 en $(2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + x^5)^5$.

Ejercicio 12.

(a) Hallar el coeficiente en x^5 en el desarrollo de $(x^5 + x - 1)^{10}$.

(b) Hallar el coeficiente en xy^3z^5 del polinomio $(2x + 4y + 2z + 5)^{14}$.

PRÁCTICO 4: Combinatoria III

Principio de Inclusión-Exclusión, funciones sobreyectivas, desórdenes y números de Stirling.

Ejercicio 1.

(a) ¿Cuántos números naturales entre 1 y 105 inclusive no son múltiplos de 3, 5 ni 7?

(b) ¿Cuántos números naturales entre 1 y 1155 inclusive son múltiplos de 3 pero no de 5, 7 ni 11?

Ejercicio 2. Se tira un dado 6 veces. Hallar la cantidad de formas en que podemos obtener un múltiplo de 18 como suma de las 6 tiradas del dado. Tomar en cuenta el orden de los valores obtenidos en el dado. Por ejemplo, los resultados en orden $(6, 6, 2, 2, 1, 1)$ y $(6, 2, 6, 2, 1, 1)$ cuentan a favor como casos diferentes.

Ejercicio 3. ¿De cuántas formas pueden extraerse 9 canicas de una bolsa que contiene exactamente 3 canicas blancas, 3 rojas, 3 azules, y 3 negras?

Ejercicio 4. ¿Cuántos enteros positivos entre 1 y 9.999.999 inclusive cumplen que la suma de sus dígitos es igual a 31?

Ejercicio 5. Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ con las siguientes restricciones:

(a) $0 \leqslant x_i \leqslant 8$ para todo i.

(b) $0 \leqslant x_1 \leqslant 5$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 6$, $3 \leqslant x_3 \leqslant 7$ y $0 \leqslant x_4 \leqslant 8$.

(c) $0 < x_1 \leq 4$, $1 < x_2 < 5$, $3 \leq x_3 \leq 7$ y $0 \leq x_4 \leq 8$.

Ejercicio 6. Hallar la cantidad de permutaciones de los dígitos de 123456789 tales que:

(a) Ningún dígito está en su posición original.

(b) Los dígitos pares no están en su posición original.

(c) Los dígitos pares no están en su posición original y los primeros cuatro dígitos son precisamente 1, 2, 3 y 4, en algún orden.

Ejercicio 7. ¿ De cuántas formas se puede factorizar el número $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ como producto de 2 factores positivos mayores que 1? ¿ Y como producto de 3 factores positivos mayores que 1? En ambos casos el orden de los factores no importa.

Ejercicio 8. Seis perros y dos gatos tienen cuatro escondites para guarecerse de la lluvia. ¿De cuántas maneras pueden distribuirse los ocho animales en los cuatro escondites sabiendo que se utilizan todos los escondites y además no pueden haber perros y gatos en el mismo escondite?

Ejercicio 9. Probar las siguientes recurrencias para el número de funciones sobreyectivas y los números de Stiling de segundo tipo, respectivamente.

(a) Funciones Sobreyectivas: $Sob(m+1,n) = n \cdot (Sob(m,n-1) + Sob(m,n))$.

(b) Números de Stirling de segunda especie: $S(m+1,n) = S(m,n-1) + n \cdot S(m,n)$.

Ejercicio 10. Probar las siguientes identidades usando la regla de la suma y del producto:

(a) $n^m = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} Sob(m,i)$.

(b) $Sob(m,n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m-(n-1)} \binom{m}{i} Sob(m-i,n-1)$.

(c) $n! = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} d_i$, donde $d_0 = 1$ y d_i es el número de desórdenes de tamaño i.

PRÁCTICO 5

Principio del Palomar

Ejercicio 1. Sabiendo que la población mundial supera a los 8 mil millones de habitantes y que la persona más anciana del mundo tiene 122 años, probar que existen al menos 2 personas en el mundo que nacieron el mismo año, en la misma fecha del calendario, a la misma hora, en el mismo minuto, y en el mismo segundo.

Ejercicio 2. Probar que cualquier subconjunto de seis elementos del conjunto $S = \{1, 2, \ldots, 9\}$ debe contener dos elementos cuya suma sea 10.

Ejercicio 3. Probar que en una reunión cualquiera con dos o más personas siempre existen al menos dos personas que tienen la misma cantidad de amigos en esa reunión.

Ejercicio 4. Dados cinco punto de un cuadrado de lado 2, probar que hay al menos dos puntos cuya distancia es menor o igual que $\sqrt{2}$.

Ejercicio 5. Dado un número real x, denotamos mediante $\lceil x \rceil$ al menor entero y tal que $y \geq x$. Probar que toda función $f : A \to B$ donde $|A| > |B|$ tiene al menos $\lceil |A| \, / \, |B| \rceil$ elementos de A que toman el mismo valor.

Ejercicio 6. Consideremos un tablero rectangular compuesto por 141 filas y 8 columnas, definiendo en total 141×8 celdas. Cada celda se pinta de blanco o de negro de forma tal que cada fila tenga exactamente cuatro celdas pintadas de negro. Demostrar que hay al menos 3 filas con igual secuencia de colores.

Ejercicio 7. Determinar la mayor cantidad de caballos que se pueden poner en un tablero de ajedrez sin que ninguno pueda saltar hacia la posición de otro.

Ejercicio 8. Encontrar el menor entero positivo n que permita asegurar que, de cualquier forma que se elijan n enteros distintos entre 1 y 100 inclusive, habrá dos de ellos cuya suma sea igual a 50.

Ejercicio 9. Se sabe que Judit Polgár estudió ajedrez al menos una vez por día durante 30 días consecutivos, y en esos 30 días estudió exactamente 45 veces en total. Demostrar que existe un conjunto de días consecutivos en los que Judit Polgár entrenó en total exactamente 14 veces.

PRÁCTICO 6

Sucesiones definidas por relaciones de recurrencia

Ejercicio 1. Expresar a_n en función de los términos anteriores $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, siendo a_n:

(a) La cantidad de saludos entre las primeras n personas que llegan a una reunión.

(b) El número de secuencias de ceros y unos de largo n en las cuales no aparecen dos ceros seguidos.

(c) El número de secuencias de largo n de letras A, B y C que no tienen la letra A dos veces seguidas.

(d) La cantidad de formas de subir una escalera de n escalones si se pueden subir de a uno o de a dos escalones en cada paso.

(e) Lo anterior pero sin que se puedan saltar dos veces seguidas un escalón (o sea, que si se saltea un escalón, entonces el siguiente no se saltea).

(f) El número de secuencias de unos y doses que suman n. Por ejemplo, para $n = 3$ hay exactamente 3 secuencias: 111, 12 y 21.

Ejercicio 2. Para un campeonato de ajedrez se tiene una cantidad par de jugadores participantes. Se quiere armar la primera fecha (en una fecha todos los participantes juegan exactamente un partido). Sea a_k la cantidad de formas de armar la primera fecha de un campeonato con $2k$ jugadores.

(a) Calcular a_1, a_2 y a_3.

(b) Deducir que para todo entero positivo k se cumple que $a_{k+1} = (2k+1)a_k$.

(c) Probar que para todo entero positivo k se cumple que $a_k = (2k-1) \times (2k-3) \times \ldots \times 3 \times 1$.

Ejercicio 3. Se pretende diseñar una bandera con n franjas horizontales, cada una de las cuales puede ser de color rojo, azul, verde o amarillo. Hallar la cantidad de banderas posibles en cada una de las siguientes situaciones:

(a) No hay restricciones sobre el color de cada franja.

(b) Dos franjas adyacentes nunca pueden ser del mismo color.

(c) Dos franjas adyacentes nunca pueden ser del mismo color, como tampoco pueden serlo la primera y la última franjas.

Ejercicio 4. Consideremos la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $a_n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$.

(a) Mostrar que a_n verifica una relación de recurrencia de orden 2, homogénea, a coeficientes constantes.

(b) Probar que a_n es un entero positivo para todo natural n.

Ejercicio 5. En cada caso hallar el término a_{100}:

(a) $a_{n+1} - 3a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, con $a_{50} = 2 \cdot 3^{-8}$.

(b) $a_{n+2} + 4a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, con $a_0 = a_1 = 1$. *Sugerencia: emplear el cambio de variable* $b_n = a_{2n}$.

Ejercicio 6. Resolver las relaciones de recurrencia:

(a) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$ con $a_0 = 1, a_1 = 3.$

(b) $b_{n+2} - 6b_{n+1} + 9b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$ con $b_0 = 5, b_2 = 27.$

Ejercicio 7. Resolver las relaciones de recurrencia:

(a) $c_{n+1} = c_n + n2^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con $c_0 = 0$.

(b) $d_n = \frac{1}{2}d_{n-1} + \frac{1}{2}d_{n+1} + 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$, con $d_0 = d_{100} = 0$.

(c) $e_{n+1} = 2e_n + 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con $e_0 = 0$.

(d) $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad n \in \mathbb{N}$, con $f_0 = f_1 = 1$.

Ejercicio 8. Aplicar cambios de variables para resolver las cada una de las siguientes recurrencias:

(a) $a_n - na_{n-1} = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, con $a_0 = 1$.

(b) $na_n - (n-1)a_{n-1} = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$.

(c) $a_n/a_{n-1}^p = 2$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, siendo $a_0 = 1$ y p un entero mayor que 1.

(d) $a_{n+2} = 4a_{n+1}^2/a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, siendo $a_0 = a_1 = 1$

Ejercicio 9. (Primer Parcial 2009)
Sabemos que $a_0 = 1$ y que para cada entero positivo n se cumple que $a_n - 2a_{n-1} = 3 \times 2^n$. Indicar la opción correcta: (a) $a_{50} = 2^{50}$; (b) $a_{50} = 50 \times 2^{50}$; (c) $a_{50} = 150 \times 2^{50}$; (d) $a_{50} = 151 \times 2^{50}$.

Ejercicio 10. Se considera la siguiente recurrencia: $a_n + \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} = 2^n$, $\forall n \geq 2$.
Hallar α, β y a_{100} sabiendo que: $a_0 = 1$, $a_1 = 5$, $a_2 = 1$ y $a_3 = 17$.

PRÁCTICO 7

Relaciones I

Ejercicio 1. Determinar si las siguientes relaciones son reflexivas, simétricas, antisimétricas, asimétricas o transitivas en $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

a. $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$.

b. $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$.

c. $R = \{(1, 3), (1, 1), (3, 1), (1, 2), (3, 3), (4, 4)\}$.

d. $R = \emptyset$.

e. $R = A \times A$.

Ejercicio 2. Demostrar o hallar un contraejemplo a las siguientes afirmaciones:

a. La inversa de una relación puede ser una función sin que ella misma lo sea.

b. El producto de dos relaciones puede dar la relación vacía sin que ninguna de ellas lo sea.

c. El producto de dos relaciones puede ser una función sin que ninguna de ellas lo sea.

Recordemos que el producto entre las relaciones R y S se denota $R \circ S$ y se define de la siguiente manera: $R \circ S = \{(x, z) : \exists\, y, (x, y) \in R \text{ y } (y, z) \in S\}$.

Ejercicio 3. Considere el conjunto de propiedades $P = \{\text{reflexiva, simétrica, transitiva}\}$. Hallar, para cada subconjunto T de P, una relación que cumpla cada una de las propiedades de T y no cumpla ninguna de las propiedades de $P \setminus T$.

Ejercicio 4. Sean R y S relaciones en un conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

a. Si R y S son *simétricas*: ¿lo serán también $\overline{R}$, R^{-1}, RS, $R \cup S$, $R \cap S$?

b. Ídem a los casos anteriores sustituyendo *simétrica* por *reflexiva, antisimétrica, asimétrica y transitiva*.

Ejercicio 5. Determinar la cantidad de relaciones R que se pueden definir sobre el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ que verifican simultáneamente las 3 condiciones siguientes: R es simétrica; $(a, b) \in R$; $(c, c) \in R$.

Ejercicio 6. ¿Cuántas relaciones binarias en $A = \{1, 2, \dots, n\}$ son reflexivas? Repita el mismo ejercicio cambiando reflexivas por simétricas y reflexivas por antisimétricas.

Ejercicios de relaciones de equivalencias:

Ejercicio 7. Dada una función $f : A \to B$, definimos la relación en A dada por: $xR_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.

(a) Demostrar que R_f es una relación de equivalencia en A.

(b) Demostrar que para toda relación de equivalencia S existe una función f tal que $R_f = S$.

Ejercicio 8. En cada uno de los siguientes casos, probar que R es una relación de equivalencia en A y describir las clases de equivalencia de la relación:

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, \cdot, 100\}$ y aRb si $\lfloor\sqrt{a}\rfloor = \lfloor\sqrt{b}\rfloor$, donde $\lfloor x\rfloor$ denota la parte entera de x.

(b) $A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$ y aRb si $a - b$ es un número par.

(c) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a - b$ es múltiplo de 3.

Ejercicio 9. Probar que si R es una relación en A que es simétrica y transitiva tal que para todo a en A existe algún elemento b en A tal que aRb, entonces R es una relación de equivalencia en A.

Ejercicio 10. Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia definidas en $\{1, 2, 3\}$.

Ejercicio 11. Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia en $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ que tienen exactamente 3 clases de equivalencia.

Ejercicio 12. Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia R sobre el conjunto $A = \{0, \ldots, 9\}$ con $\#\,[0] = 5$ y $\#\,[2] = 3$.

Ejercicio 13. En cada caso hallar la cantidad de relaciones de equivalencia R en $\{0, 1, \ldots, 7\}$ tales que:

a. $\#[0] = 2$ y $\#[1] = 4$.

b. $\#[0] < \#[1] < \#[2]$ y $(3, 4) \in R$.

PRÁCTICO 8
Relaciones II

Ejercicio 1. Para cada uno de los órdenes $(A, \leq)$ siguientes, dibujar el diagrama de Hasse.

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 12\}$ y $\leq$ es el orden de divisibilidad ($x \leq y$ sii y es múltiplo de x).

(b) A es el conjunto de todos los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ y $\leq$ es la inclusión $\subseteq$.

Ejercicio 2. Hallar la cantidad de relaciones de orden en $\{1, 2, 3, 4\}$ tales que $3 < 2$ y $2 < 1$.

Ejercicio 3. Sea $A = \{a, b, c\}$, calcular la cantidad de relaciones de orden que hay sobre A.

Ejercicio 4. Un orden parcial $(A, \leq)$ es un *buen orden* si todo subconjunto no vacío de A tiene mínimo.

(a) Demostrar que si $(A, \leq)$ es un buen orden entonces es un orden total.

(b) Demostrar que si $(A, \leq)$ es un orden total entonces tiene a lo sumo un elemento maximal.

(c) Concluir que si un orden parcial $(A, \leq)$ tiene dos elementos maximales distintos o dos minimales distintos entonces no es un buen orden.

Ejercicio 5. Demostrar que en un conjunto con 61 personas hay al menos 13 personas cada una de las cuales desciende de la siguiente o hay un al menos 6 personas tales que ninguna de ellas desciende de otra.

Ejercicio 6. Hallar el número de relaciones de orden en $\{1, 2, 3, 4\}$ que contienen a la relación $\{(1, 2); (3, 4)\}$.

Ejercicio 7. Sea $A = \{1, 2, ..., 100\}$. ¿Qué hay más, relaciones de equivalencia o de orden en A?

Ejercicio 8. Un empleado de un centro de cómputos, tiene que ejecutar 10 programas P_0, P_1, ..., P_9 que, debido a las prioridades, están restringidos a las siguientes condiciones: $P_7, P_2 < P_9$; $P_6 < P_7$; $P_4 < P_6$; $P_8, P_5 < P_2$; $P_3, P_0 < P_5$; $P_3, P_4 < P_8$; $P_1 < P_3, P_4, P_0$; donde, por ejemplo, $P_i < P_j$ significa que el programa P_i debe realizarse antes que el programa P_j. Determine un orden de ejecución de estos programas de modo que se satisfagan las restricciones.

Ejercicio 9. Determinar cuáles de los órdenes del Ejercicio 1 representa un retículo.

Ejercicio 10. ¿Cuáles de los diagramas de Hasse de la Figura 1 representa un retículo?

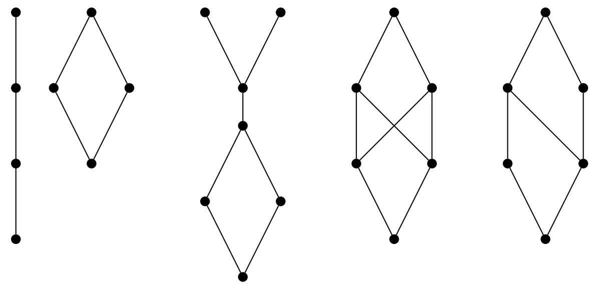


Figura 1

Ejercicio 11. Sea $(A, \leq)$ una relación de orden parcial, donde A es un conjunto finito y no vacío.

a. Demostrar que la relación $(A, \leq)$ tiene al menos un elemento que es maximal.

b. Demostrar que la relación inversa $(A, \geq)$ es también de orden parcial.

c. Utilizando las partes anteriores, demostrar que $(A, \leq)$ tiene al menos un elemento que es minimal.

d. Estudiar si son ciertas las afirmaciones anteriores si A es un conjunto infinito. En cada una de las afirmaciones anteriores, probar o dar un contraejemplo.

PRÁCTICO 9

Grafos I: Caminos, conexidad, subgrafos

Ejercicio 1. Para el grafo de la Figura 2(ii), determinar:

a. Un camino abierto que no sea un recorrido.

b. Un recorrido que no sea camino simple.

c. Un camino simple de b a d de longitud 3.

d. Un camino cerrado que no sea un circuito.

e. Un circuito que no sea un ciclo.

f. Todos los ciclos que incluyen a b.

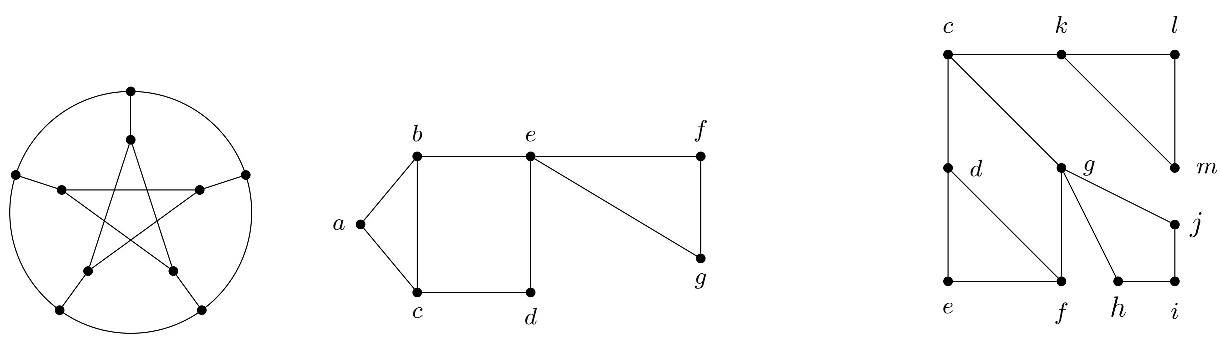
g. Todos los caminos simples de b a f.

Ejercicio 2.

a. ¿Cuál es la distancia entre el vértice d y los demás vértices del grafo de la Figura 2(iii)?

b. Hallar el diámetro de K_n, $K_{n,m}$, P_n, C_n y del grafo de Petersen (Figura 2(i)).

c. ¿Cuántos caminos simples tienen P_n y $K_{1,n}$?



(i) Grafo de Petersen (ii) (iii)

Figura 2

Ejercicio 3. Sean x e y dos vértices adyacentes de C_{20}. ¿Cuántos caminos de largo 11 empiezan en x y terminan en y?

Ejercicio 4. ¿Cuántos caminos de largo n hay entre dos vértices opuestos de C_4?

Ejercicio 5. Hallar el máximo número de aristas que se le puede quitar a K_n sin que el grafo deje de ser conexo.

Ejercicio 6. Para cada natural n tal que $n \geq 3$ se define el grafo n-rueda, y se denota W_n, como el grafo que se obtiene de C_n tras agregar un vértice que es adyacente a cada uno de los vértices de C_n. La Figura 3 ilustra a los grafos W_3, W_4 y W_5.

a. ¿Cuántas aristas tiene W_n?

b. ¿Cuántos 3-ciclos tiene W_3? ¿y W_4?

c. ¿Cuántos 4-ciclos tienen W_3, W_4 y W_5?

d. Ídem para 5-ciclos.

e. Ídem para 6-ciclos.

f. ¿Cuántos k-ciclos tiene W_n?

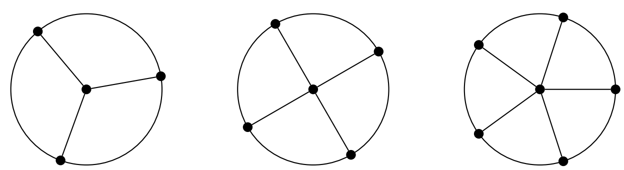


Figura 3

Ejercicio 7. Sea G un grafo conexo. Demostrar que si $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son dos caminos simples en G cuya longitud es la máxima posible, entonces $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ tienen un vértice en común.

Ejercicio 8. Sea G el grafo cuyo conjunto de vértices es $\{1, 2, \ldots, 15\}$ tal que el vértice i es adyacente al j si y solo si su máximo común divisor es mayor que 1. ¿Cuántas componentes conexas tiene G?

Ejercicio 9. Dibujar un grafo G que tenga tres vértices u, v y w tales que

$$\kappa(G-u) = \kappa(G), \qquad \kappa(G-v) > \kappa(G), \qquad \kappa(G-w) < \kappa(G).$$

Ejercicio 10. Un hombre desea cruzar a un perro, una oveja y una bolsa de repollos al otro lado del río utilizando una canoa. El tamaño de la canoa no permite llevar más de un objeto a la vez. Además, no se puede dejar al perro sólo con la oveja ni a la oveja sola con la bolsa de repollos. Una secuencia de viajes se dice admisible si no se repite la misma configuración luego de uno o de dos viajes de ida y vuelta.

a. Indicar una secuencia de viajes admisibles que cumpla el objetivo.

b. Encontrar una secuencia de viajes admisibles que cumpla el objetivo usando exactamente 9 viajes de ida y vuelta y un viaje solo de ida para terminar. ¿Y si cambiamos 9 viajes de ida y vuelta por 10 viajes de ida y vuelta es posible lograr el objetivo?

Sugerencia: asociar a cada configuración factible un vértice y unir dos vértices si se puede pasar de dicha disposición a la otra en un viaje de ida y vuelta, o un viaje solo de ida en el último paso.

Ejercicio 11. Sean G, G_1 y G_2 los grafos que se ilustran en la Figura 4.

a. ¿Cuántos subgrafos conexos de G tienen 4 vértices e incluyen un ciclo?
b. Mostrar que los subgrafos G_1 y G_2 son subgrafos inducidos de G.
c. Dibujar el subgrafo de G inducido por $\{b, c, d, f, i, j\}$.
d. Dibujar el grafo $G - \{e_1, e_2\}$, donde $e_1 = \{a, c\}$ y $e_2 = \{a, d\}$.
e. Dibujar un subgrafo de G que no sea inducido.
f. ¿Cuántos subgrafos recubridores tiene G?
g. ¿Cuántos subgrafos recubridores conexos tiene G?

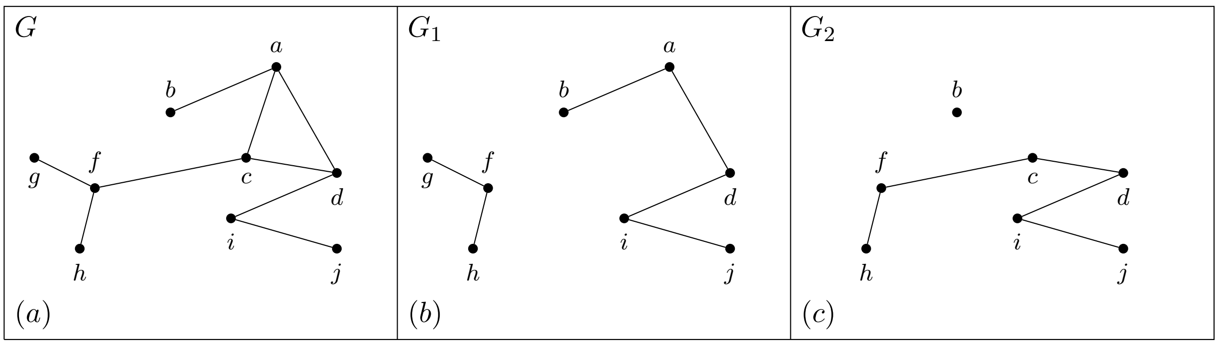


Figura 4

Ejercicio 12. El hipercubo de dimensión n, que denotamos H_n, es el grafo cuyos vértices son las n-uplas de ceros y unos tales que dos n-uplas son adyacentes si coinciden en todas sus coordenadas salvo exactamente en una de ellas. A modo de ejemplo, en el grafo H_3 el vértices $(0, 0, 0)$ es adyacente a $(1, 0, 0)$ pero no a $(1, 0, 1)$.

a. Dibujar a cada uno de los grafos H_1, H_2 y H_3.
b. Determinar la cantidad de vértices y aristas que posee el grafo H_n.
c. Hallar 2 caminos simples diferentes en H_5 desde $(0, 0, 1, 1, 0)$ hacia $(0, 0, 0, 1, 0)$.
d. Demostrar H_n no tiene 3–ciclos.
e. Hallar la cantidad de 4–ciclos que tiene H_n.
Sugerencia: hallar la cantidad de 4–ciclos en H_n que incluyen un vértice fijo.

Ejercicio 13. Sea G_n el grafo con vértices las n-uplas de 0s y 1s:

$$V(G_n) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in \{0, 1\}\}$$

Dos n-uplas serán adyacentes si difieren en los valores de exactamente dos de sus posiciones, coincidiendo en el resto. Por ejemplo, en G_n, $(0, 0, 1)$ es adyacente a $(1, 1, 1)$ y a $(1, 0, 0)$, pero no a $(1, 1, 0)$.

a. Dibujar G_1, G_2 y G_3.
b. Determinar el conjunto de enteros positivos n para los cuales G_n es un grafo conexo.
c. Determinar, para cada entero positivo n, la cantidad de componentes conexas de G_n.

Sugerencia: Sumar la cantidad de unos de cada vértice de G_n.

PRÁCTICO 10

Grafos II: Grado, isomorfismo, árboles, caminos y circuitos eulerianos

Definiciones y suposiciones:

- Todos los grafos de este práctico son no dirigidos y simples, es decir, sin lazos ni aristas múltiples.
- Un vértice v de un grafo G es *aislado* si no es adyacente a ningún otro vértice de G.
- El *grafo complemento* de G, que se denota $\overline{G}$, tiene como conjunto de vértices a $V(G)$ y como conjunto de aristas a $V^{(2)} \setminus E$, donde $V^{(2)} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.
- Un grafo G se dice *autocomplementario* si es isomorfo a $\overline{G}$.
- Si G_1 y G_2 son dos grafos disjuntos entonces su *grafo unión*, que se denota $G_1 \cup G_2$, tiene como conjunto de vértices a $V(G_1) \cup V(G_2)$ y como conjunto de aristas a $E(G_1) \cup E(G_2)$.
- Denotaremos $\kappa(G)$ a la cantidad de componentes conexas de G.
- Un grafo se dice *k–regular* si cada uno de sus vértices tiene grado k. Un *vértice colgante* es un vértice de grado 1. Cuando el grafo es un árbol, también llamamos *hojas* a los vértices colgantes.

Grado

Ejercicio 1.

a. Hallar el número de vértices de un grafo 3–regular con 9 aristas.
b. Hallar el número de vértices que tiene un grafo con diez aristas, dos vértices de grado 4 y los demás vértices de grado 3.
c. ¿Existen tales grafos? En caso afirmativo construirlos.

Ejercicio 2. En una clase con 9 alumnos, cada alumno le manda 3 tarjetas de navidad a otros 3. ¿Es posible que cada alumno reciba tarjetas de los mismos 3 compañeros a los cuales él le mando una?

Ejercicio 3. Sea G un grafo con n vértices. ¿Cuántos vértices de $\overline{G}$ tienen grado par si G tiene un sólo vértice de grado par?

Ejercicio 4.

a. ¿Cuál es el máximo número de vértices posible para un grafo con 17 aristas si cada uno de sus vértices tiene grado mayor que o igual a 3?

b. ¿Existe algún grafo con dicha cantidad de vértices? En caso afirmativo construirlo.

Ejercicio 5. Construir, para cada número natural n par tal que $n \geq 4$, un grafo G_n que sea conexo 3–regular con exactamente n vértices.

Ejercicio 6. Demostrar que todo grafo no trivial tiene al menos vértices con el mismo grado.

Isomorfismo

Ejercicio 7.

a. Demostrar que dos grafos son isomorfos si y sólo si sus complementos son isomorfos.

b. ¿Cuáles de los grafos de la Figura 5 son isomorfos?

c. Determine el número de aristas de $\overline{G}$ en función del número de aristas de G.

d. Determine el número de aristas de un grafo autocomplementario de orden n.

e. Construya un grafo autocomplementario de orden 4 y otro de orden 5.

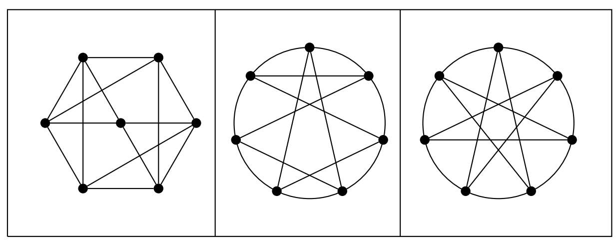
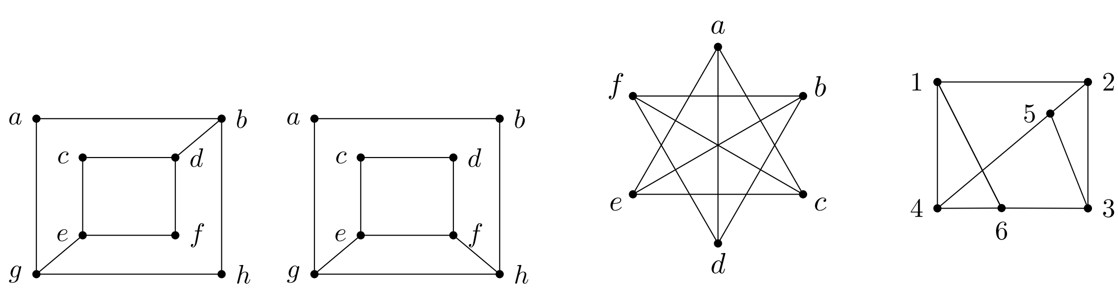


Figura 5

Ejercicio 8. Para cada par de grafos de la Figura 6 determine si los grafos son o no isomorfos.



(a) **(b)**

Figura 6

Ejercicio 9. Probar que K_n posee tres subgrafos dos a dos isomorfos cuyos conjuntos de aristas son una partición del conjunto de aristas de K_n si y sólo si n es de la forma $3k$ o $3k+1$.

Árboles

Ejercicio 10. Un bosque es un grafo acìclico (equivalentemente, sus componentes conexas son árboles).

a. Sea $F_1 = (V_1, E_1)$ un bosque de siete árboles con $|E_1| = 40$. ¿Cuánto vale $|V_1|$?
b. Si $F_2 = (V_2, E_2)$ es un bosque con $|V_2| = 62$ y $|E_2| = 51$, ¿cuántos árboles determina F_2?

Ejercicio 11. Sea G un bosque con exactamente dos árboles, que llamaremos T_1 y T_2. Hallar el número de vértices tanto de T_1 como de T_2 sabiendo que $|E(T_1)| = 17$ y que $|V(T_2)| = 2|V(T_1)|$.

Ejercicio 12. ¿Cuántas hojas tiene un árbol con cuatro vértices de grado 2, uno de grado 3, dos de grado 4 y uno de grado 5?

Ejercicio 13. ¿Qué tipo de árboles tienen exactamente dos hojas?

Ejercicio 14. Dar un ejemplo de un grafo G que no sea un árbol y que tenga un vértice más que el número de aristas. Probar que cualquier grafo que verifique las condiciones anteriores no puede ser conexo.

Ejercicio 15. Probar que todo árbol con n vértices y m aristas tiene al menos $n-m$ componentes conexas.

Ejercicio 16. ¿Cuál es la máxima cantidad de vértices que puede tener un grafo conexo con exactamente 30 aristas?

Circuitos y Recorridos Eulerianos

Ejercicio 17. Encuentre un recorrido euleriano para $G = (V, E)$ con $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ y $E = \{ab, ac, ai, aj, bc, cd, ci, de, df, dg, dh, ef, fg, fh, gh, hi, ij\}$.

Ejercicio 18.

a. Determine los valores de n para los cuales el grafo completo K_n tendrá un circuito euleriano.

b. ¿Para cuáles n tiene K_n un recorrido euleriano?

Ejercicio 19. Encuentre la longitud máxima de un recorrido en a) K_6; b) K_8; c) K_{10}; d) K_{2n}, $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 20. Halle un recorrido o un circuito euleriano para cada grafo de la Figura 7 o demuestre que no existe.

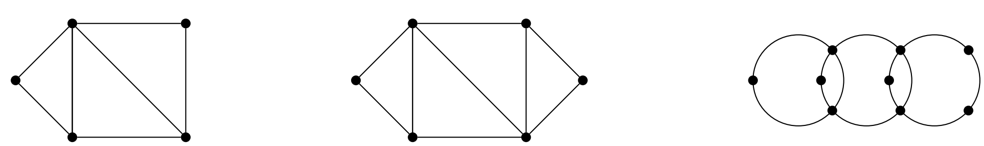


Figura 7

PRÁCTICO 11

Grafos III: Planitud y Coloración

ALGUNAS DEFINICIONES Y RESULTADOS ÚTILES:

- Inmersión plana: representación del grafo en el plano de forma de que dos aristas distintas no se cortan (salvo en los vértices en el caso de ser adyacentes).
- Grafo plano: grafo que admite una inmersión plana.
- En toda inmersión plana de un grafo plano la suma de los grados de las regiones es el doble de la cantidad de aristas (incluyendo la región infinita).
- Región infinita: es la región no acotada determinada por una inmersión plana de un grafo finito.
- La fórmula de Euler afirma que en todo grafo plano con v vértices, e aristas, r regiones y κ componentes conexas, se cumple que $v - e + r = \kappa + 1$.W
- Sea G un grafo sin vértices de grado 2, decimos que G' es homeomorfo a G si este puede obtenerse a partir de G via subdivisiones elementales (informalmente, agregando vértices en medio de las aristas).
- Teorema de Kuratowski: un grafo es no plano si y sólo si tiene un subgrafo que es homeomorfo a $K_{3,3}$ o a K_5.

Ejercicio 1. Dibujar una inmersión plana para cada uno de los grafos cuyos conjuntos de vértices y aristas se indican a continuación:

(a) $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq 4\}$;

(b) $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq 5, i - j \text{ impar}\}$;

(c) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 1\}, \{1, 4\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}\}$.

(d) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 1\}, \{1, 4\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}, \{1, 7\}\}$.

Ejercicio 2. Para cada una de las inmersiones planas de los grafos del ejercicio anterior hallar el grado de cada una de las regiones y comprobar que su suma es igual a $2|E(G)|$.

Ejercicio 3. Sea G un grafo plano con 8 vértices, que admite una inmersión plana que determina 4 regiones con grados 3, 3, 4, y 8, respectivamente (la región de grado 8 corresponde a la región infinita).

(a) Determinar la cantidad de aristas de G.

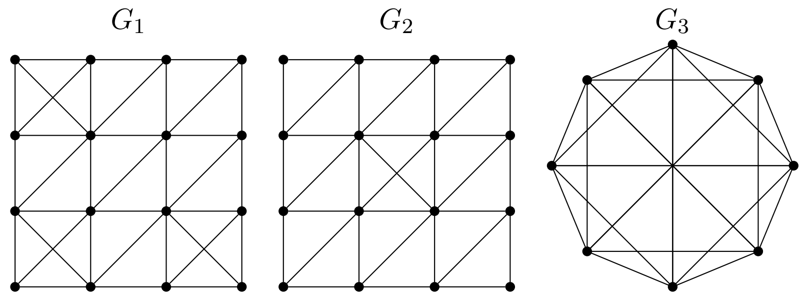
(b) Determinar la cantidad de componentes conexas de G.

(c) Mostrar que dicho grafo G existe.

Ejercicio 4. Probar que $K_{3,3}$ y K_5 no son grafos planos sin usar el Teorema de Kuratowski.

Ejercicio 5. Determine cuáles de los grafos de la Figura 8 son planos. Si un grafo es plano, vuelva a dibujarlo sin aristas solapadas. Si no es plano, encuentre un subgrafo homeomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$.

Ejercicio 6. Demostrar que en todo grafo plano $e \leq 3v - 6$, donde e y v denotan la cantidad de aristas y de vértices, respectivamente. Concluya que todo grafo plano tiene algún vértice de grado 5 o menor.



(parcial 2001) (parcial 2001) (parcial 2000)

Figura 8

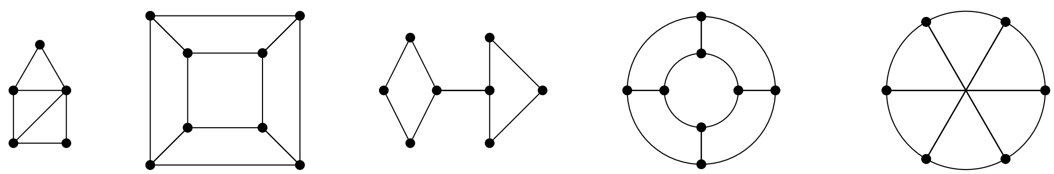


Figura 9

Ejercicio 7. Demostrar que todo grafo plano se puede colorear con seis colores.

Ejercicio 8. Encontrar el número cromático de cada uno de los grafos presentados en la Figura 9.

Ejercicio 9. Hallar el polinomio cromático de C_n, K_n, P_n, $K_{2,n}$ y K_5 menos una arista. Deducir el número cromático de cada grafo y la cantidad de coloraciones usando 5 colores o menos.

Ejercicio 10. Sea G un árbol con el menos 2 vértices. Hallar el polinomio cromático y el número cromático de G.

Ejercicio 11. Demostrar que para todo grafo simple G se cumple que $\chi(G) \leq 2$ si y sólo si G no tiene ciclos impares.

Ejercicio 12. Sea G un grafo y $\Delta(G) = \text{máx}_{v \in V(G)}\{gr(v)\}$.

(a) Demostrar que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

(b) Dar un ejemplo de grafo que cumpla con la igualdad.