Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Solución Examen Diciembre 2022

19 de diciembre de 2022

RESPUESTAS AL MÚLTIPLE OPCIÓN

Las versiones del examen se identifican por el primer ejercicio del múltiple opción.
Versión 1: El primer ejercicio es "Sea $y(x)$ la solución a la ecuación diferencial ..."
Versión 2: El primer ejercicio es "Considere la integral impropia y la serie que siguen: ..."
Las respuestas correctas en cada versión son:

Versión	MO 1	MO 2	MO 3	MO 4	MO 5	MO 6
1	B	D	A	C	A	E
2	A	B	D	D	E	C

Resolución de ejercicios

1. Sea $y(x)$ la solución a la ecuación diferencial $y'' - y' - 2y = 1 - 2x$, con condiciones iniciales $y(0) = -1$, $y'(0) = 4$. Entonces, $y(2)$ es igual a:

(A) $y(2) = e^2 + e^{-2} - 1$ (B) $y(2) = e^4 - e^{-2} + 1$ (C) $y(2) = e^2 + e^{-4} - 2$

(D) $y(2) = e^4 + e^{-2} - 4$ (E) $y(2) = e^4 + 2e^{-2} - 1$

Se trata de una ecuación diferencial lineal de segundo orden y coeficientes constantes, por lo que debemos calcular su solución homogénea y una solución particular para obtener todo el conjunto de soluciones.

Para hallar la solución de la homogénea planteamos el polinomio característico, $\lambda^2 - \lambda - 2$, que tiene raíces $\lambda = 2$ y $\lambda = -1$. La solución de la homogénea es entonces $y_H(x) = Ae^{2x} + Be^{-x}$.

Para hallar una solución particular, buscamos una de la forma $y_P(x) = \alpha x + \beta$. De aquí tenemos que $y_P'(x) = \alpha$ y que $y_P''(x) = 0$. Sustituyendo en la ecuación:

$$0 - \alpha - 2(\alpha x + \beta) = 1 - 2x$$

de donde $\alpha = 1$ y $\beta = -1$.

La solución general de la ecuación diferencial es entonces

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = Ae^{2x} + Be^{-x} + x - 1.$$

Imponiendo las condiciones iniciales tenemos:

$$\begin{cases} y'(0) = A + B - 1 = -1 \\ y'(0) = 2A - B + 1 = 4 \end{cases}$$

de donde $A = 1$ y $B = -1$, y entonces la solución al problema de condiciones iniciales es

$$y(x) = e^{2x} - e^{-x} + x - 1.$$

Evaluando en $x = 2$ obtenemos
$$y(2) = e^4 - e^{-2} + 1.$$

---

2. Considere la integral impropia y la serie que siguen:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2}\, dx \qquad\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

Entonces:

(A) Ambas son divergentes.
(B) La serie es divergente y la integral es convergente.
(C) Ambas son convergentes.
(D) La integral es divergente y la serie es absolutamente convergente.
(E) La integral es divergente, la serie es condicionalmente convergente.

La integral es impropia en 0 y en $+\infty$, por lo que debemos separarla e dos:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2}\, dx = \int_0^{1} \frac{e^{-x^2}}{x^2}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2}\, dx$$

Observando la primera, vemos que el factor e^{-x^2} tiende a uno cuando x tiende a cero, por lo que se comporta como una constante a todos los efectos, y entonces la primera integral es equivalente a

$$\int_0^{1} \frac{1}{x^2}\, dx$$

que es divergente, por lo que toda la integral es divergente.

Para la serie, observemos que $\sin(x) \sim x$ cuando $x \to 0$, por lo que $\sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \sim \frac{1}{2^n}$ cuando $n \to \infty$. Además, para estos valores el seno es una función positiva (para argumentos positivos pequeños), por lo que $\left|\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)\right| = \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \sim \frac{1}{2^n}$.

La serie de término general $\frac{1}{2^n}$ es una geométrica convergente, por lo que la serie original es absolutamente convergente.

---

3. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dos funciones de clase C^1, que cumplen:

- $g(u, v) = (u^2 + v^3, e^{u^2} - v)$
- $\nabla f(1, 0) = (1, -1)$
- Para el vector $\vec{v} = (1, 1)$, se tiene $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1, e) = 4$
- $f(x, e) = x^2 + 1$.

La matriz Jacobiana de la función $f \circ g$ en el punto $(1, 0)$ es:

(A) $(4 + 4e, -2)$ (B) $(4 + 2e, -2e)$ (C) $(2 + 2e, 0)$

(D) $(2e, -1)$ (E) $(2 - 2e, 1)$

Por la regla de la cadena, podemos calcular $J_{f\circ g}(1,0) = J_f(g(1,0)) \cdot J_g(1,0)$. Necesitamos entonces la Jacobiana de g en el $(1,0)$, y la Jacobiana (o gradiente) de f en $g(1,0) = (1,e)$.

La Jacobiana de g la podemos calcular directamente ya que tenemos la expresión de la función:

$$J_g(u,v) = \begin{pmatrix} 2u & 3v^2 \\ 2ue^{u^2} & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow J_g(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2e & -1 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, para calcular las derivadas de f en el $(1,e)$, podemos observar que como $f(x,e) = x^2+1$, entonces la derivada respecto a x es $f_x(x,e) = 2x$, de donde $f_x(1,e) = 2$.

Además, como $\frac{\partial f}{\partial v}(1,e) = f_x(1,e)\cdot 1 + f_y(1,e)\cdot 1 = 4$, tenemos que $f_y(1,e) = 2$.

Por lo tanto,

$$J_{f\circ g}(1,0) = J_f(g(1,0)) \cdot J_g(1,0) = (2,2)\cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2e & -1 \end{pmatrix} = (4+4e,-2).$$

---

4. Sea $A \subset \mathbb{C}$ el conjunto de los números $z \in \mathbb{C}$ que verifican:

$$\begin{cases} z^4 = 1 - i\sqrt{3} \\ z + \bar{z} > 0 \end{cases}$$

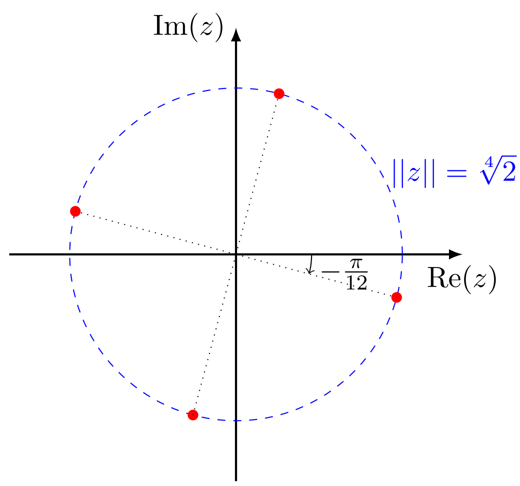
Solo una de las siguientes afirmaciones sobre el conjunto A es correcta. Indique cuál:

(A) A es simétrico respecto al eje real.
(B) A es simétrico respecto al eje imaginario.
(C) A tiene exactamente dos elementos distintos.
(D) A tiene exactamente cuatro elementos distintos.
(E) Todos los elementos de A están en la circunferencia de centro 0 y radio 1.

El complejo $1-i\sqrt{3}$ tiene módulo 2 y argumento $-\pi/3$, por lo que si $z = \rho e^{i\varphi}$ es un complejo que cumple $z^4 = 1 - i\sqrt{3}$, su módulo y su argumento deben cumplir:

$$\begin{cases} \rho^4 = 2 \\ 4\varphi = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[4]{2} \\ \varphi = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2} \end{cases}$$

Entonces tenemos 4 complejos distintos que cumplen $z^4 = 1 - i\sqrt{3}$, que se muestran en la figura (notar que $\pi/12$ radianes es igual a 15°):



Si además queremos que cumplan que $z+\bar{z}>0$, basta observar que esa condición es equivalente a $\mathrm{Re}(z)>0$, por lo que hay exactamente 2 complejos distintos que cumplen ambas condiciones.

---

5. Sea $B \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto definido como:

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \cos(x) = 0 \ , \ \sin(y) = -1\right\}$$

Considere las siguientes afirmaciones sobre el conjunto B:

(I) $\mathrm{int}(B) = \emptyset$.

(II) B es cerrado.

(III) Todos los elementos de B son puntos de acumulación de B^c.

Entonces:

(A) Todas las afirmaciones son verdaderas.
(B) Solamente las afirmaciones (I) y (II) son verdaderas.
(C) Solamente la afirmación (II) es verdadera.
(D) Solamente las afirmaciones (I) y (III) son verdaderas.
(E) Todas las afirmaciones son falsas.

El conjunto está formado por todos los puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $y = -\frac{\pi}{2} + 2m\pi$. Por lo tanto, en cualquier bola reducida de centro $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + 2m\pi\right)$ hay puntos que no son de la forma $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + 2m\pi\right)$ (es decir, puntos que no pertenecen a B). Entonces $\mathrm{int}(B) = \emptyset$ y todo punto de B es punto de acumulación de su complemento. Además si tomamos un punto en B^c es fácil ver que existe una bola centrada en ese punto totalmente contenida en B^c (basta tomar un radio menor al punto de B más cercano), por lo que B^c es abierto (y entonces B es cerrado).

---

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x,y) = y$ y $D \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto definido como:

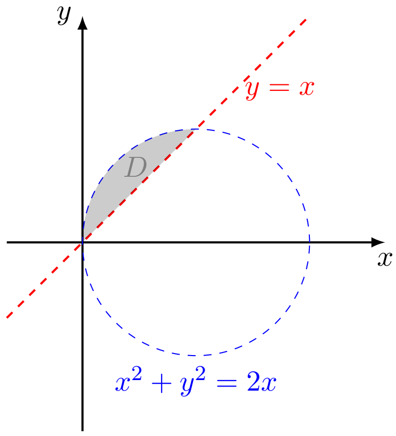
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x \ , \ y \geq x\right\}$$

La integral de f en D es igual a:

(A) $\displaystyle\iint_D f = \frac{\pi}{3}$ (B) $\displaystyle\iint_D f = 1$ (C) $\displaystyle\iint_D f = \sqrt{\pi}$

(D) $\displaystyle\iint_D f = \frac{3}{4}$ (E) $\displaystyle\iint_D f = \frac{1}{6}$

Observemos que $x^2 + y^2 = 2x$ es la ecuación de una circunferencia de centro $(1,0)$ y radio 1, por lo que el dominio de integración es el conjunto de puntos del interior de esa circunferencia que además cumplen $y \geq x$. Gráficamente, ese conjunto es:



Haciendo un cambio de variable a polares ($x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$), la condición $x^2 + y^2 \leq 2x$ se transforma en $\rho^2 \leq 2\rho\cos\theta \Rightarrow \rho \leq 2\cos\theta$, mientras que la condición $y \geq x$ resulta $\rho\sin\theta \geq \rho\cos\theta \Rightarrow \sin\theta \geq \cos\theta \Rightarrow \tan\theta \geq 1 \Rightarrow \theta \geq \frac{\pi}{4}$. Observar además que como $\rho \geq 0$, para que pueda cumplirse que $0 \leq \rho \leq 2\cos\theta$ necesariamente debe pasar que $\cos\theta \geq 0 \Rightarrow \theta \in [0, \pi/2] \cup [3\pi/2, 2\pi]$. Uniendo ambas condiciones en θ, tenemos que $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Observar que esa condición es razonable dado el dibujo anterior: los puntos en D tienen ángulos entre $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{2}$.

Recordando que el jacobiano del cambio de variable a polares es ρ, la integral que queremos calcular es:

$$\iint_D f = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^2 \sin\theta \, d\rho = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^3}{3}\Big|_{\rho=0}^{\rho=2\cos\theta} \sin\theta d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8\cos^3(\theta)}{3} \sin\theta d\theta = -\frac{2\cos^4(\theta)}{3}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\iint_D f = \frac{1}{6}}$$

DESARROLLO

---

1. (**26 puntos**) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función y $a = (x_0, y_0)$ un punto del plano.

a) Definir continuidad de f en el punto a.
Ver teórico, definición 5.5 en las notas del curso.

b) Sea a_n una sucesión de elementos de $\mathbb{R}^2$. Definir $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.
Ver teórico, definición 4.24 en las notas del curso.

c) Demostrar que si f es continua en a, y una sucesión a_n cumple $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, entonces $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.
Ver teórico, demostración del Teorema 5.9 en las notas del curso (solamente se pide el directo de esa demostración).

d) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6}{(x^2-y)^2 + x^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Utilice el resultado del ítem anterior para estudiar la continuidad de f en el origen.
Si tomamos un sucesión de la forma $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$, entonces observamos por un lado que $\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (0,0)$. Por otro lado, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{1}{n})^6}{((\frac{1}{n})^2 - (\frac{1}{n})^2)^2 + (\frac{1}{n})^6} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{1}{n})^6}{(\frac{1}{n})^6} = 1.$$

Como tenemos que $f(0,0) = 0$, entonces f no es continua en el origen.

---

2. (**26 puntos**) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función.

a) Definir diferenciabilidad de f en un punto $a = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
Ver teórico, definición 6.11 o 6.12 en las notas del curso.

Sea ahora $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y + xy^3}{x^2 + y^2 + \sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

b) Calcular las derivadas parciales de f en el $(0,0)$.
Calculemos $f_x(0,0)$ a partir de la definición:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3 \cdot 0 + h \cdot 0^3}{h^2 + 0^2 + \sqrt{h^2 + 0^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^2 + |h|} = 0.$$

La cuenta para $f_y(0,0)$ es análoga, por lo que $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

c) Estudiar la diferenciabilidad de la función en el origen.
Teniendo calculadas las derivadas parciales, para ver si f es diferenciable debemos despejar el resto y verificar si se cumple la condición de la definición. Esto es:

$$r(\Delta x, \Delta y) = f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f_x(0,0)\Delta x - f_y(0,0)\Delta y - f(0,0).$$

Como tanto las derivadas parciales como la función en el origen se anulan, el resto coincide con la función. Debemos calcular entonces:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \frac{r(\Delta x, \Delta y)}{||(\Delta x, \Delta y)||} = \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta x^3 \Delta y + \Delta x \Delta y^3}{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

Pasando a coordenadas polares, el límite queda

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^4 \cos(\theta)\sin(\theta)}{(\rho^2 + \rho)\rho} = 0,$$

pues $\cos(\theta)\sin(\theta)$ está acotado, y el factor en función de ρ tiende a cero. Por lo tanto la función es diferenciable en el origen.
