SOLUCIÓN VERSION 1
Examen de Matemática Discreta I

Miércoles 8 de febrero de 2023

MO1	MO2	MO3	MO4	MO5
D	B	C	D	E

Múltiple Opción 1

Sea $\mathcal{N}$ la partición del conjunto $\{1, 2, \ldots, 100\}$ dada por $\mathcal{N} = \{\{1, 49\}, \{2, 48\}, \ldots, \{24, 26\}, \{25\}, \{50\}, \{51\}, \ldots, \{100\}\}$. Notemos que la partición $\mathcal{N}$ tiene precisamente 76 elementos. Sea X un subconjunto cualquiera de $\{1, \ldots, 100\}$ con 77 elementos. Definamos los nidos como los elementos de la partición $\mathcal{N}$, y las palomas como los elementos de X. Primero notemos que cada elemento de X pertenece a algún subconjunto de $\mathcal{N}$, porque $\mathcal{N}$ es una partición de $\{1, \ldots, 100\}$. En particular, cada paloma pertenece a algún nido. Como $|X| = 77$ y $|\mathcal{N}| = 76$, por el Principio del Palomar deducimos que existe algún nido que posee al menos dos palomas. En términos de X y de $\mathcal{N}$, esto es que existen dos elementos del conjunto X que son de la forma $\{i, 50 - i\}$ para algún $i \in \{1, \ldots, 24\}$, o equivalentemente, que existen dos elementos diferentes pertenecientes a X cuya suma es igual a 50. Esto prueba que todo subconjunto X de $\{1, \ldots, 100\}$ con 77 elementos cumple la propiedad estudiada. Construyamos ahora un subconjunto de $\{1, \ldots, 100\}$ con 76 elementos que no cumple la propiedad deseada. De hecho, si elegimos $Y = \{1, 2, \ldots, 25, 50, 51, \ldots, 100\}$ entonces Y tiene 76 elementos, y además no existen dos elementos pertenecientes a Y cuya suma sea igual a 50. Luego el menor entero positivo n que cumple la propiedad estudiada es $n = 77$, y la opción correcta es la D.

Múltiple Opción 2

Para determinar la cantidad de soluciones enteras de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 17$ que cumplen con las restricciones $-2 \leq x_1 \leq 6$, $-2 \leq x_2 \leq 6$, $-1 \leq x_3 \leq 7$ vamos a aplicar la regla de la suma, separando sobre los casos posibles según la variable x_3.

Primero notemos que no hay soluciones que cumplen que $x_3 \leq 4$. De hecho, si $x_3 \leq 4$ entonces $x_1 + x_2 = 17 - x_3 \geq 13$, pero como $x_1 \leq 6$ y $x_2 \leq 6$ entonces $x_1 + x_2 \leq 12$, obteniendo una contradicción con la anterior desigualdad. Por la restricción para x_3, toda solución entera debe cumplir entonces que $x_3 \in \{5, 6, 7\}$. Vamos a separar en los tres casos diferentes:

(1) Si $x_3 = 5$ entonces $x_1 + x_2 = 12$, y como $x_1 \leq 6$ y $x_2 \leq 6$ la única solución en este caso consiste en elegir $x_1 = x_2 = 6$.

(2) Si $x_3 = 6$ entonces $x_1 + x_2 = 11$, y como $x_1 \leq 6$ y $x_2 \leq 6$ las dos soluciones posibles consisten en elegir $x_1 = 5$ y $x_2 = 6$ o bien $x_1 = 6$ y $x_2 = 5$.

(3) Si $x_3 = 7$ entonces $x_1 + x_2 = 10$, y como $x_1 \leq 6$ y $x_2 \leq 6$ las tres soluciones posibles consisten en elegir $x_1 = 6$ y $x_2 = 4$ o bien $x_1 = x_2 = 5$ o bien $x_1 = 4$ y $x_2 = 6$.

Aplicando la regla de la suma tenemos en total $3 + 2 + 1 = 6$ soluciones enteras de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 17$ que cumplen con las restricciones dadas, y la opción correcta es la B.

Múltiple Opción 3

Para determinar la cantidad de palabras que se pueden formar permutando las letras de la palabra TACUAREMBO que inician con T, terminan con O y contienen la palabra REM, vamos a aplicar la regla de la suma. Primero, fijemos las condiciones de iniciar con la letra T y terminar con la letra O. Como TACUAREMBO tiene 10 letras, toda palabra que cumpla con estas condiciones es de la forma T________O, es decir que la letra T se encuentra en la ubicación 1 de la palabra, mientras que la letra O se encuentra en la ubicación 10 de la palabra. Además, la palabra REM puede aparecer en 6 lugares posibles, que ocurren precisamente eligiendo la ubicación de la R en las posiciones 2, 3, 4, 5, 6, o 7. En cada uno de los 6 casos anteriores, las restantes letras que son los 5 elementos del multiconjunto {A,C,U,A,B} se pueden ubicar en los 5 lugares no elegidos de 5!/(2!1!1!1!) maneras posibles (puesto que la letra A figura repetida 2 veces y las letras C, U y A figuran exactamente 1 vez). Por la regla del producto, hay un total de $6 \times 5!/(2!1!1!1!) = 360$ palabras que se pueden formar con las reglas anteriormente indicadas, y la opción correcta es la C.

Múltiple Opción 4

Consideremos la sucesión de números reales $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por la relación de recurrencia $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 2^n$, $(n \geq 0)$ con $a_0 = 0$ y $a_1 = -1$. Vamos a proceder resolviendo la recurrencia en cuatro etapas. Primero, hallamos la solución general del problema homogéneo, que es la recurrencia $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$, que llamamos a_n^H. Luego, hallamos una solución particular del problema dado, que llamamos a_n^P. El tercer paso consiste en sumar ambas soluciones y considerar $a_n = a_n^H + a_n^P$. El cuarto y último paso consiste en encontrar aquella sucesión que además cumple con las condiciones $a_0 = 0$ y $a_1 = -1$.

Para resolver el problema homogéneo basta con notar que las raíces del polinomio característico $x^2 - 5x + 6$ son 2 y 3. Entonces, la solución general del problema homogéneo es $a_n^H = c_1 \times 2^n + c_2 \times 3^n$, donde c_1 y c_2 son números (que vamos a fijar recién en el cuarto paso). Como el segundo miembro es la sucesión 2^n que ya es solución del problema homogéneo, vamos a proceder a buscar una solución particular de la forma $a_n^P = k \times n2^n$ para algún número k a fijar. Reemplazando en la recurrencia dada en la letra debemos tener que $k \times (n+2)2^{n+2} - 5k \times (n+1)2^{n+1} + 6k \times n2^n = 2^n$. Igualando el coeficiente en $n2^n$ tenemos que $0 = 0$. Igualando el coeficiente en 2^n tenemos que $-2k = 1$, es decir que $k = -1/2$, y la solución particular es $a_n^P = -\frac{n}{2}2^n$. Tenemos entonces que la solución a nuestra recurrencia sin fijar las condiciones iniciales es $a_n = a_n^H + a_n^P = c_1 \times 2^n + c_2 \times 3^n - \frac{n}{2}2^n = (c_1 - \frac{n}{2}) \times 2^n + c_2 \times 3^n$, donde los números c_1 y c_2 son números a determinar. Para determinar c_1 y c_2 vamos a utilizar las condiciones iniciales, que nos van a permitir plantear un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. De hecho, tenemos lo siguiente:

$$a_0 = (c_1 - \frac{0}{2}) \times 2^0 + c_2 \times 3^0 = c_1 + c_2 = 0;$$
$$a_1 = (c_1 - \frac{1}{2}) \times 2^1 + c_2 \times 3^1 = 2c_1 + 3c_2 - 1 = -1.$$

Entonces, obtenemos con la primera ecuación que $c_2 = -c_1$, y reemplazando c_2 por $-c_1$ en la segunda ecuación obtenemos que $2c_1 - 3c_1 = 0$. Entonces, $c_1 = 0$, y $c_2 = -c_1 = 0$. Concluimos que la solución de la recurrencia es $a_n = -\frac{n}{2} \times 2^n$, y al evaluar en $n = 100$ obtenemos que $a_{100} = -\frac{100}{2} \times 2^{100} = -50 \times 2^{100}$. Entonces, la opción correcta es la D.

Múltiple Opción 5

El grafo tripartito completo $K_{r,s,t}$ es un grafo tal que el conjunto de sus vértices es igual a la unión disjunta de tres subconjuntos V_1, V_2 y V_3 con $|V_1| = r$, $|V_2| = s$, $|V_3| = t$, y cuyas aristas son todos los pares $\{a, b\}$ tales que $a \in V_i$, $b \in V_j$ para algunos $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$.

Entonces, cada vértice pertenciente al conjunto V_1 tiene grado $s + t$, cada vértice perteneciente al conjunto V_2 tiene grado $r + t$, y cada vértice perteneciente al conjunto V_3 tiene grado $r + s$. El Teorema de Euler establece que en un grafo conexo existe un circuito euleriano si y solo si todos sus vértices tienen grado par. Como tenemos que r, s y t son enteros positivos, deducimos que el grafo bipartito completo $K_{r,s,t}$ es conexo. Entonces, por el Teorema de Euler tenemos que $K_{r,s,t}$ tiene un circuito euleriano si y solo si tanto $r + s$ como $r + t$ y $s + t$ son pares. La única manera de tener simultáneamente estas condiciones es que los tres números r, s y t sean pares o los tres números sean impares. Entonces, la opción correcta es la E.

Ejercicio de Desarrollo 1

Consideremos la relación binaria R de *divisibilidad* sobre $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$, es decir que aRb si y solo si existe algún natural n tal que $a \times n = b$.

(1) Probemos que R es una relación de orden parcial, es decir que es reflexiva, transitiva y antisimétrica. Si a es un número natural cualquiera entonces a es múltiplo de a, concretamente $a \times 1 = a$ y el elemento 1 es un número natural, por lo que R es una relación reflexiva. Probemos ahora que R es transitiva. Sean a, b y c tres números naturales tales que aRb y bRc. Por definición de la relación R existen dos números naturales n_1 y n_2 tales que $a \times n_1 = b$ y $b \times n_2 = c$. Pero entonces $a \times (n_1 \times n_2) = (a \times n_1) \times n_2 = b \times n_2 = c$. Además, el producto de dos naturales es también natural, por lo que $n' = n_1 \times n_2$ es un número natural. Concluimos que $a \times n' = c$ siendo n' un número natural, y por definición de la relación esto significa que aRc. Luego, R es transitiva. Por último, si a y b son dos números naturales tales que aRb y bRa, entonces existen dos números natuales n_1 y n_2 tales que $a \times n_1 = b$ y $b \times n_2 = a$. Pero entonces $a \times (n_1 \times n_2) = (a \times n_1) \times n_2 = b \times n_2 = a = a \times 1$. Entonces, $a \times (n_1 n_2 - 1) = 0$, y debemos tener que $a = 0$ o $n_1 n_2 = 1$. Si $a = 0$ entonces como $a \times n_1 = b$ tendríamos que $b = 0$, y en particular $a = b$. Si $a \neq 0$ entonces $n_1 n_2 = 1$, y la única manera en la que el producto de dos números naturales sea igual a 1 es que ambos números sean iguales a 1. Luego $n_1 = n_2 = 1$ y nuevamente tenemos que $a = b$. En ambos casos deducimos que $a = b$. Entonces, la relación R es antisimétrica, y la relación R es un orden parcial, como querámos demostrar.

(2) Sea n un número natural cualquiera. Como $1 \times n = n$ entonces $1Rn$, y 1 es el mínimo de R. Como $n \times 0 = 0$ entonces $nR0$ para todo natural n, y 0 es el máximo de R.

(3) Probemos que R es un retículo, a partir de su definición. Debemos probar entonces que todo par de naturales a y b tienen un supremo (es decir, un mínimo del conjunto de cotas superiores) y un ínfimo (un máximo dentro del conjunto de cotas inferiores). Si alguno de los elementos es 0, sin perder generalidad $a = 0$, entonces tendremos que el supremo entre a y b, que denotamos $sup(a, b)$, es 0, mientras que el ínfimo, que denotamos $inf(a, b)$, es precisamente b. Supongamos entonces que a y b son dos enteros positivos. Notemos que el conjunto de cotas superiores que llamaremos S incluye, en particular, al producto ab. Luego, S es un subconjunto no vacío de números naturales. Por el principio del buen orden de los números naturales, tiene mínimo, que llamaremos m. Entonces, m es el mínimo del conjunto de todas las cotas superiores de a y b, es decir que $m = sup(a, b)$. Para finalizar, notemos que el máximo del conjunto de todas las cotas inferiores comunes entre a y b es el máximo común divisor entre a y b, que es un entero positivo cuando a y b son naturales distintos de 0. Entonces, R es un retículo, como queríamos demostrar.

Ejercicio de Desarrollo 2

(1) La fórmula de Euler establece que si $G = (V, E)$ es un grafo plano, conexo entonces toda inmersión plana de G tiene una cantidad r de regiones que verifica la siguiente igualdad: $|V| - |E| + r = 2$.

(2) Probemos que si $G = (V, E)$ es un grafo plano sin lazos y conexo tal que $|V| \geq 3$, entonces $|E| \leq 3|V| - 6$. De hecho, como todo ciclo en un grafo simple tiene al menos 3 aristas, cada región va a estar delimitada por al menos 3 aristas. Sea r la cantidad de regiones del grafo G (donde se incluye la región no acotada). Por la fórmula para la suma de los grados de las regiones de G, tenemos que $2|E| \geq 3r$. Además el grafo G satisface las hipótesis del Teorema de Euler, y por lo tanto se cumple que $|V| - |E| + r = 2$. Triplicando la última ecuación tenemos que $3|V| - 3|E| + 3r = 6$, y como $2|E| \geq 3r$ tenemos que $6 = 3|V| - 3|E| + 3r \leq 3|V| - 3|E| + 2|E|$, o equivalentemente que $|E| \leq 3|V| - 6$, como queríamos demostrar.

(3) Probemos usando la parte (2) que K_5 no es plano. De hecho, supongamos por absurdo que K_5 sí es plano. Tendríamos entonces que K_5 es plano, conexo, tiene 5 vértices y $5 > 3$. Por la parte (2) tend'iamos que $|E(K_5)| \leq 3|V(K_5)| - 6$. Pero esta última desigualdad es falsa, porque $|E(K_5)| = 10$ y $|V(K_5)| = 5$. La contradicción proviene de suponer que K_5 es plano. Luego, K_5 no puede ser plano, completando la demostración.