Examen – Matemática Discreta I

Miércoles 8 de febrero de 2023.

Número de lista	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

M01	M02	M03	M04	M05	Des. 1	Des. 2	Puntaje Total

Sugerencia: pasar las respuestas de los ejercicios de múltiple opción cuidadosamente.
Lo completado aquí será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir.
Cada respuesta correcta de múltiple opción vale 10 puntos.
Cada ejercicio de desarrollo correcto y completo vale 25 puntos.
Respuestas incorrectas restan 1 punto.
El examen se aprueba con 60 puntos. La duración del examen es de tres horas y media.

Múltiple Opción 1

Dados tres enteros positivos r, s y t, se define el grafo tripartito completo $K_{r,s,t}$ como un grafo tal que el conjunto de sus vértices es igual a la unión disjunta de tres subconjuntos V_1, V_2 y V_3 con $|V_1| = r$, $|V_2| = s$, $|V_3| = t$, y cuyas aristas son todos los pares $\{a, b\}$ tales que $a \in V_i$, $b \in V_j$ para algunos $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$.

El grafo tripartito completo $K_{r,s,t}$ tiene un circuito euleriano si y solo si

(A) r, s y t son todos pares;
(B) r, s y t son todos impares;
(C) r, s y t son todos pares o si hay dos pares y un impar;
(D) r, s y t son todos pares o si hay uno par y dos impares;
(E) r, s y t son todos pares o todos impares.

Múltiple Opción 2

Se considera la sucesión de números reales $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por la relación de recurrencia $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 2^n$, $(n \geq 0)$ con $a_0 = 0$ y $a_1 = -1$. Entonces:
(A) $a_{100} = 102 \times 2^{100}$; (B) $a_{100} = 42 \times 3^{100}$; (C) $a_{100} = 0$; (D) $a_{100} = -50 \times 2^{100}$; (E) $a_{100} = -42 \times 3^{100}$.

Múltiple Opción 3

Determinar la cantidad de palabras que se pueden formar permutando las letras de la palabra TACUAREMBO que verifican simultáneamente las siguientes tres condiciones:

i. Comienzan en T.
ii. Terminan en O.
iii. Contienen la palabra REM en alguna parte.

(A) 60; (B) 120; (C) 360; (D) 720; (E) 10080.

Múltiple Opción 4

Determinar la cantidad de soluciones enteras de la ecuación $x_1+x_2+x_3 = 17$ que cumplen las siguientes restricciones $-2 \leq x_1 \leq 6$, $-2 \leq x_2 \leq 6$, $-1 \leq x_3 \leq 7$.
(A) 5; (B) 6; (C) 7; (D) 8; (E) 9.

Múltiple Opción 5

Sea A un subconjunto de n elementos distintos $(n \geq 2)$ del conjunto $\{1, 2, \ldots, 100\}$. Indicar el mínimo valor de n que garantiza que existen dos elementos distintos de A que suman 50.
A) 74; B) 75; C) 76; D) 77; E) 78.

Ejercicio de Desarrollo 1

Se considera la relación binaria R de *divisibilidad* sobre $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$, definida por:

$$a \, R \, b \quad \text{sii} \quad \exists n \in \mathbb{N},\ an = b\,.$$

(Es decir: $a \, R \, b$ si y solo si b es múltiplo de a)

(1) Demostrar que R es una relación de orden sobre $\mathbb{N}$

(2) ¿El orden R tiene mínimo? ¿máximo? Justificar las respuestas.

(3) ¿El orden R es un retículo? Justificar la respuesta.

Ejercicio de Desarrollo 2

(1) Enunciar (sin demostrar) la fórmula de Euler para grafos planos conexos.

(2) Probar que si $G = (V, E)$ es un grafo plano sin lazos y conexo tal que $|V| \geq 3$, entonces $|E| \leq 3|V| - 6$.

(3) Probar usando (2) que K_5 no es plano.

Importante: justificar detalladamente cada paso de las demostraciones.