Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Segundo semestre de 2022

Primer parcial

1 de octubre de 2022

Nº Lista	Apellido, Nombre	Cédula	Firma

IMPORTANTE

- La duración del parcial es de tres horas.
- No se permite usar ni calculadora ni material de consulta.
- El parcial tiene 5 ejercicios de múltiple opción y un ejercicio de desarrollo con 3 partes.
- En cada ejercicio de múltiple opción solo hay una opción correcta.
- La comprensión de la letra de los ejercicios es parte de la prueba.
- **Tenga cuidado al pasar las respuestas. Para los ejercicios de múltiple opción lo completado en el cuadro de abajo será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir.**
- **Notación**: Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, denotamos con $\partial(A)$ a la frontera de A y $\bar{A}$ a la clausura de A, definida como $\bar{A} = A \cup \partial(A)$.

MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 25 puntos)

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C**, **D** o **E**, según corresponda.

1	**2**	**3**	**4**	**5**

Correctas: 5 puntos. Incorrectas: -1 puntos. Sin responder: 0 puntos.

DESARROLLO (Total: 15 puntos)

Un ejercicio de desarrollo se encuentra en la página 3.

SOLO PARA USO DOCENTE

MO	D.1.a)	D.1.b)	D.2	D.3.a)	D.3.b)	Total

MÚLTIPLE OPCIÓN

1. Sea $y(x)$ la solución a la ecuación diferencial $\dfrac{y'(x)e^{x^2}}{x} = -2(1 + y^2(x))$ que cumple $y(0) = 0$. Entonces:

(A) $y(\sqrt{2}) = -e$
(B) $y(\sqrt{2}) = \tan(1 + e^2)$
(C) $y(\sqrt{2}) = \tan(1)$
(D) $y(\sqrt{2}) = 1$
(E) $y(\sqrt{2}) = \tan(e^{-2} - 1)$

---

2. Considere las siguientes afirmaciones sobre series:

(1) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$ es convergente.

(2) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{3^n}$ es absolutamente convergente.

(3) La serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log(2) \cdot \log(3) \cdot \log(4) \cdots \log(n)}{n!}$ es convergente.

Entonces:

(A) Solamente las afirmaciones (1) y (2) son verdaderas.
(B) Solamente las afirmaciones (2) y (3) son verdaderas.
(C) Todas las afirmaciones son verdaderas.
(D) Solamente la afirmación (2) es verdadera.
(E) Solamente las afirmaciones (1) y (3) son verdaderas.

---

3. Considere las soluciones de la siguiente ecuación en los números complejos:

$$z^3 = i$$

Entonces:

(A) Las soluciones son simétricas respecto al eje vertical (eje imaginario).
(B) El producto de las soluciones es 0.
(C) Las soluciones son simétricas respecto al eje horizontal (eje real).
(D) La suma de las soluciones es -1.
(E) Hay exactamente dos soluciones en el eje imaginario.

4. Considere la siguiente integral impropia:

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1+e^{-x}}{\log(x)\left(1+x\log^{\alpha}(x)\right)}dx$$

Entonces:

(A) La integral es divergente para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
(B) La integral es convergente si y solo si $\alpha < 1$.
(C) La integral es convergente para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
(D) La integral es convergente si y solo si $\alpha > 0$.
(E) La integral es convergente si y solo si $\alpha > 1$.

---

5. Considere el conjunto

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 < 1,\, y \geq |x|\right\}$$

y las siguientes afirmaciones:

(I) A es un conjunto abierto.

(II) $\bar{A} = A$.

(III) $(0, 1/2)$ es un punto de acumulación de A.

Entonces:

(A) Todas las afirmaciones son verdaderas.
(B) Solo la afirmación (I) es verdadera.
(C) Solo las afirmaciones (II) y (III) son verdaderas.
(D) Solo la afirmación (III) es verdadera.
(E) Ninguna de las tres afirmaciones es verdadera.

DESARROLLO

1. a) Definir límite finito de una sucesión $\left(\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R} \text{ sii } \ldots\right)$
   b) Definir sucesión acotada (Se dice que una sucesión a_n es acotada sii ...)

2. Sean a_n y b_n sucesiones tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y b_n es acotada. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

3. a) Dar un ejemplo de un par de sucesiones a_n y b_n, con $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y b_n **no acotada**, tales que $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.
   b) Dar un ejemplo de un par de sucesiones a_n y b_n, con $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y b_n **no acotada**, tales que el límite de $a_n b_n$ no sea cero (infinito u otro límite real no nulo).