SOLUCIÓN VERSIÓN 2 - Segundo Parcial
Matemática Discreta I

Martes 22 de noviembre de 2022

M01	M02	M03	M04	M05
C	D	D	C	B

Múltiple Opción 1

Veamos primero que todo grafo simple G no conexo cumple que $\overline{G}$ sí es conexo. De hecho, si G no es conexo y tomamos una componente conexa de G, digamos G_1, resulta que el grafo complemento $\overline{G}$ tiene como subgrafo al grafo bipartito completo que une a cada vértice de G_1 con cada vértice de $G-G_1$. Como $\overline{G}$ tiene un subgrafo conexo recubridor, entonces es conexo.

Sea ahora G un grafo simple autocomplementario con $n \geq 12$ vértices y m aristas. Notemos que G es necesariamente conexo, puesto que si G no fuese conexo tendríamos que $\overline{G}$ sí lo es, contradiciendo el hecho que G es isomorfo a su complemento. Como es autocomplementario, tiene la mitad de aristas que el grafo completo K_n, por lo que $m = n(n-1)/4$. Usando que $n \geq 12$ se consigue que $m \geq 12(n-1)/4 = 3(n-1)$. Pero recordemos que los grafos planos y conexos con al menos 3 vértices deben verificar que $m \leq 3n-6$, por lo que G no puede ser plano. Luego, el grafo G es conexo pero no es plano, y la opción correcta es la C.

Múltiple Opción 2

Es claro que si desconectamos el grafo completo quitando la menor cantidad de aristas y sin dejar vértices aislados, debemos tener dos componentes conexas completas. La diferencia de la cantidad de aristas entre el grafo K_n y el grafo $K_a \cup K_{n-a}$ es $f(a) = a(n-a)$, donde se pide por letra que $2 \leq a \leq n-2$. Por simetría podemos elegir $2 \leq a \leq n/2$. Veremos que el mínimo de la función $f(a) = a(n-a)$ dentro del dominio $2 \leq a \leq n/2$ y eligiendo valores enteros para a se encuentra cuando $a = 2$. De hecho, si b es un entero positivo cualquiera tal que $3 \leq b \leq n/2$ entonces

$$f(b) - f(b-1) = b(n-b) - (b-1)(n-b+1) = n - 2b + 1 \geq 1,$$

donde la última desigualdad usa que $b \leq n/2$, por lo que $2b \leq n$. Esto implica que $f(b) > f(b-1)$ cada vez que $b \geq 3$, y reiterando esta desigualdad conseguimos que el mínimo se encuentra en $a = 2$, y vale $f(a) = 2(n-2) = 2n-4$. Entonces, la opción correcta es la D.

Múltiple Opción 3

Si n es impar cada vértice de K_n tiene grado par, y por el Teorema de circuitos eulerianos tenemos que K_n tiene un circuito euleriano. En particular, si $n = 9$ tenemos que $a_9 = \binom{9}{2} = 36$. Si n es par, podemos retirar de K_n un total de $n/2-1$ aristas que no tienen ningún vértice en común, y el resultado es un grafo que tiene exactamente dos vértices de grado impar (y todos los restantes de grado par). Es posible encontrar un recorrido euleriano en tal grafo, que tiene precisamente $\binom{n}{2} - (n/2-1) = n(n-2)/2 + 1$ aristas. Notemos además que esta cantidad de aristas es la máxima que puede tener un recorrido. De hecho, no existe circuito euleriano, y los extremos del recorrido deben ser de grado impar, por lo que no podemos tener más de dos vértices de grado impar. Luego $a_{10} = 10 \times 8/2 + 1 = 41$, y la opción correcta es la D.

Múltiple Opción 4

A partir del diagrama de Hasse propuesto se deduce que $e \leq d \leq c \leq a \leq b$ es un orden lineal que incluye al orden parcial dado. Por lo tanto, la opción correcta es la C.

Múltiple Opción 5

Dadas las restricciones en los cardinales y considerando que hay en total 7 elementos de la relación de equivalencia, las únicas dos posibilidades son que $(|[3]|, |[2]|, |[1]|) = (1, 2, 3)$ o bien que $(|[3]|, |[2]|, |[1]|) = (1, 2, 4)$. Los conjuntos cocientes serán respectivamente de la forma $\{\{3\}, \{2, x\}, \{1, y, z\}, \{t\}\}$ o bien $\{\{3\}, \{2, x\}, \{1, y, z, t\}\}$.

Para el primer caso hay $\binom{4}{1} = 4$ formas de elegir x, $\binom{3}{2} = 3$ formas de elegir $\{y, z\}$ y 1 forma de elegir t (el elemento que queda), habiendo $4 \times 3 = 12$ formas en total. Para el segundo caso hay 4 formas de elegir x y 1 forma de elegir $\{y, z, t\}$ (los elementos que quedan), habiendo 4 formas. Por la regla de la suma tenemos en total $12 + 4$, es decir, 16 relaciones de equivalencia que cumplen con lo pedido. Luego, la opción correcta es la B.

Ejercicio de Desarrollo 1

Sea A un conjunto y R una relación de equivalencia en A. Vamos a probar que las clases de equivalencia de la relación R forman una partición de A. Para cada elemento x de A vamos a denotar $[x]$ a la clase de x, que es $[x] = \{y \in A : (x, y) \in R\}$. Como R es relación de equivalencia entonces R es en particular reflexiva. Luego $x \in [x]$ para todo $x \in A$, lo que asegura que la unión de todas las clases (sobre todos los elementos x pertenecientes a A) es igual al conjunto A, es decir que:

$$\bigcup_{x \in A} [x] = A.$$

Por último vamos a probar que dados dos elementos x e y de A se cumple que $[x] \cap [y] = \emptyset$ o bien que $[x] = [y]$, lo que concluye que las clases de equivalencia definen una partición del conjunto A. Supongamos que $z \in [x] \cap [y]$. Por definición de clase de equivalencia tenemos que $(x, z) \in R$ y que $(y, z) \in R$. Como R es simétrica (por ser de equivalencia) y además $(y, z) \in R$, resulta que $(z, y) \in R$. Como R es transitiva y tenemos que $(x, z) \in R$ y además que $(z, y) \in R$, resulta que $(x, y) \in R$. Pero entonces $y \in [x]$. Nuevamente usando la simetría también sabemos que $(y, x) \in R$. Ahora veremos que en estas condiciones resulta que $[x] = [y]$. De hecho, si $z \in [x]$ entonces $(x, z) \in R$, pero como $(y, x) \in R$ y R es simétrica tenemos que $(y, z) \in R$, y $z \in [y]$. Como z fue un elemento arbitrario de $[x]$, esto implica que $[x] \subseteq [y]$. Razonando de modo análogo conseguimos que $[y] \subseteq [x]$, y por lo tanto $[x] = [y]$.

Hemos probado que la reunión de todas las clases es igual al conjunto A y además que dos clases de equivalencia cualquiera son iguales o bien disjuntas. Entonces las clases de equivalencia definen una partición del conjunto A, como queríamos demostrar.

Ejercicio de Desarrollo 2

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple que tiene un ciclo hamiltoniano. Sea n la cantidad de vértices de G. Como G es simple y tiene un ciclo hamiltoniano, debemos tener $n \geq 3$. Sea C_n el ciclo hamiltoniano de G. Probemos primero que G es conexo. En efecto, consideremos dos vértices cualesquiera v y w de G. Como v y w pertenecen a C_n y C_n es subgrafo de G, hay al menos dos caminos que unen u con v en el grafo G, que son los mismos caminos con extremos u y v dentro del ciclo C_n. Luego hay al menos un camino entre todo par de vértices del grafo G, y resulta que G es conexo. Sea ahora v un vértice cualquiera de G. Resta probar que $G - v$ también es conexo. Como C_n contiene a todos los vértices de G, entonces $C_n - v$ contiene a todos los vértices de $G - v$. Luego $C_n - v$ es un árbol recubridor de $G - v$, y concluimos que $G - v$ es conexo. Hemos probado entonces que G es 2-conexo, como queríamos demostrar.