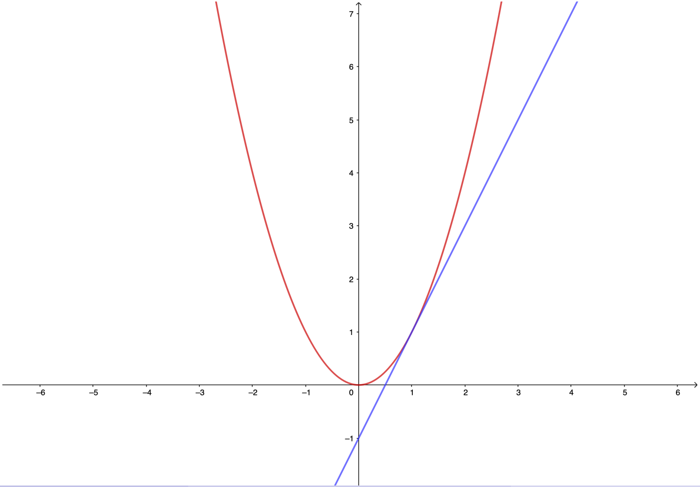
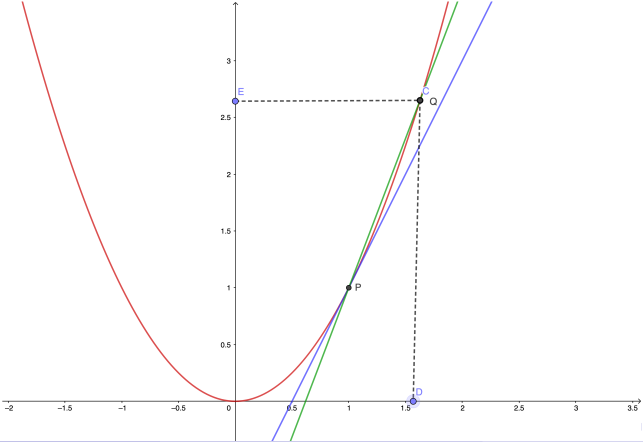
Recta tangente

La recta tangente a un gráfico $y = f(x)$ por un punto $x = a$ es la recta que mas se "parece" al gráfico cerca de a. Tomemos $y = x^2$ y $x = 1$.



Recta tangente

Sabemos que la recta debe pasar por $P = (1, 1)$, para hallarla nos faltaría conocer la pendiente m. Si tomamos un punto de la parábola $Q = (x, x^2)$ cercano a $P = (1, 1)$ y hallamos la recta por ambos puntos podremos hallar una buena aproximación de m.



Recta tangente

La ecuación de la pendiente de la recta PQ es $m_{PQ} = \frac{x^2-1}{x-1}$. Cuanto más se acerque x a 1 (con $x \neq 1$) mejor será la aproximación de la pendiente, en definitiva $m = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ será la pendiente de la tangente en este ejemplo.
Para calcular $m = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ utilizamos que $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ y $m = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} x + 1 = 2$. La recta tangente será entonces la que pasa por $P = (1, 1)$ y tiene tangente 2, o sea,

$$y - 1 = 2(x - 1)$$

Derivada de f en a

En general, la pendiente de la recta tangente a f por $(a, f(a))$ será

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

A este número si existe se le llama **derivada de f en a.**

Ecuación de la recta tangente

La ecuación de la recta tangente a f por el punto $(a, f(a))$ es

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Si realizamos el cambio de variable $h = x - a$ obtenemos que

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

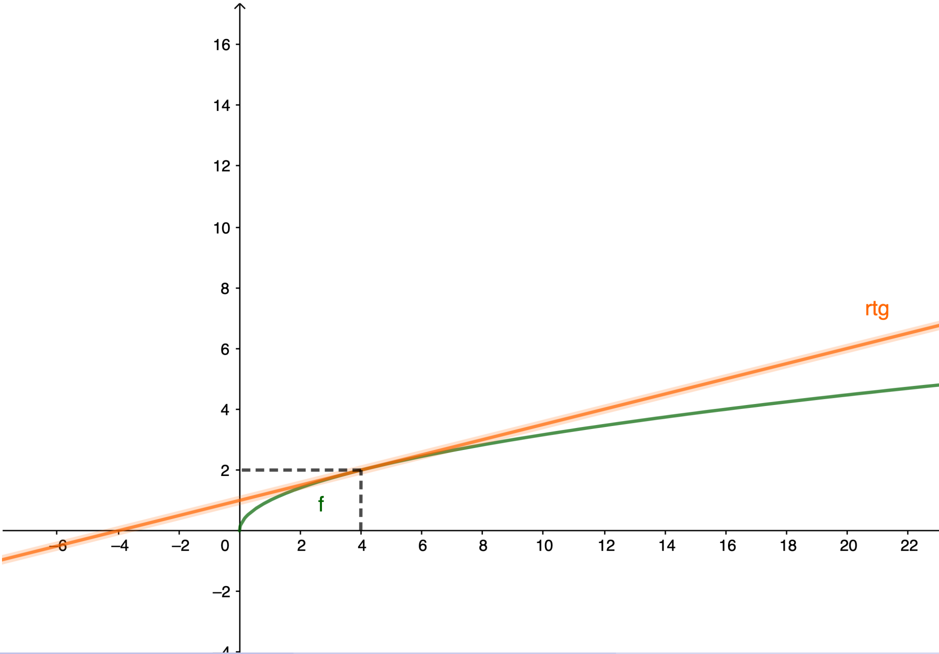
A esta definición de derivada la llamamos del cociente incremental.

Ejemplo

Calculemos la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 4$. Para esto aplicamos la definición: $f'(4) = \lim_{x\to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$.

La recta tangente a $f(x) = \sqrt{x}$ por el punto $(4, 2)$ es

$$rtg : y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$$


16
14
12
10
8
6
4
2
−2
−4
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
rtg
f

Derivadas básicas

1. $c' = 0$ con $c \in \mathbb{R}$
2. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$ con $\alpha \in \mathbb{Q}$
3. $(e^x)' = e^x$
4. $(a^x)' = ln(a)a^x$
5. $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
6. $(log_a(x))' = \frac{1}{xln(a)}$
7. $(sen(x))' = cos(x)$
8. $(cos(x))' = -sen(x)$

Operaciones y derivadas

Sean f y g funciones derivables en $x = a$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces:

- $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

Operaciones y derivadas

Sean f y g funciones derivables en $x = a$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces:

- $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- $(cf)'(a) = c(f'(a))$

Operaciones y derivadas

Sean f y g funciones derivables en $x = a$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces:

- $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- $(cf)'(a) = c(f'(a))$
- $(f.g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

Operaciones y derivadas

Sean f y g funciones derivables en $x = a$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces:

- $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- $(cf)'(a) = c(f'(a))$
- $(f.g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
- $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$ con $g(a) \neq 0$

Operaciones y derivadas

Sean f y g funciones derivables en $x = a$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces:

- $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- $(cf)'(a) = c(f'(a))$
- $(f.g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
- $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$ con $g(a) \neq 0$
- $(f \circ g)(a) = f'(g(a))g'(a)$

Ejemplos

- Derivada de suma y producto por constante: $(x^4+2x^2-1)' = (x^4)'+(2x^2)'+(-1)' = 4x^3+2(2x) = 4x^3+4x$

Ejemplos

- Derivada de suma y producto por constante:
$(x^4+2x^2-1)' = (x^4)'+(2x^2)'+(-1)' = 4x^3+2(2x) = 4x^3+4x$
- Derivada del producto:
$(xsen(x))' = x'(sen(x)) + x(sen(x))' = sen(x) + x(cos(x))$

Ejemplos

- Derivada de suma y producto por constante:
  $(x^4+2x^2-1)' = (x^4)'+(2x^2)'+(-1)' = 4x^3+2(2x) = 4x^3+4x$
- Derivada del producto:
  $(xsen(x))' = x'(sen(x)) + x(sen(x))' = sen(x) + x(cos(x))$
- Derivada del cociente:
  $(\frac{e^x}{3x+2})' = \frac{(e^x)'(3x+2)-e^x(3x+2)'}{(3x+2)^2} = \frac{e^x(3x+2)-e^x.3}{(3x+2)^2} = \frac{e^x(3x-1)}{(3x+2)^2}$

Ejemplos

- Derivada de suma y producto por constante:
  $(x^4+2x^2-1)' = (x^4)'+(2x^2)'+(-1)' = 4x^3+2(2x) = 4x^3+4x$
- Derivada del producto:
  $(xsen(x))' = x'(sen(x)) + x(sen(x))' = sen(x) + x(cos(x))$
- Derivada del cociente:
  $(\frac{e^x}{3x+2})' = \frac{(e^x)'(3x+2)-e^x(3x+2)'}{(3x+2)^2} = \frac{e^x(3x+2)-e^x.3}{(3x+2)^2} = \frac{e^x(3x-1)}{(3x+2)^2}$
- Derivada de la composición:
  1. $(\ln(x^2))' = \frac{1}{x^2}2x = \frac{2}{x}$

Ejemplos

- Derivada de suma y producto por constante:
  $(x^4+2x^2-1)' = (x^4)'+(2x^2)'+(-1)' = 4x^3+2(2x) = 4x^3+4x$
- Derivada del producto:
  $(xsen(x))' = x'(sen(x)) + x(sen(x))' = sen(x) + x(cos(x))$
- Derivada del cociente:
  $(\frac{e^x}{3x+2})' = \frac{(e^x)'(3x+2)-e^x(3x+2)'}{(3x+2)^2} = \frac{e^x(3x+2)-e^x.3}{(3x+2)^2} = \frac{e^x(3x-1)}{(3x+2)^2}$
- Derivada de la composición:
  1. $(\ln(x^2))' = \frac{1}{x^2}2x = \frac{2}{x}$
  2. $(cos(x^3))' = -sen(x^3)3x^2$

Ejemplos

- Derivada de suma y producto por constante:
  $(x^4+2x^2-1)' = (x^4)'+(2x^2)'+(-1)' = 4x^3+2(2x) = 4x^3+4x$
- Derivada del producto:
  $(xsen(x))' = x'(sen(x)) + x(sen(x))' = sen(x) + x(cos(x))$
- Derivada del cociente:
  $(\frac{e^x}{3x+2})' = \frac{(e^x)'(3x+2)-e^x(3x+2)'}{(3x+2)^2} = \frac{e^x(3x+2)-e^x.3}{(3x+2)^2} = \frac{e^x(3x-1)}{(3x+2)^2}$
- Derivada de la composición:
  1. $(\ln(x^2))' = \frac{1}{x^2}2x = \frac{2}{x}$
  2. $(cos(x^3))' = -sen(x^3)3x^2$